



土の構成式入門

6. 粒状体理論と適用

まつ 松 岡

はじめ 元*

なか い 井 照 夫*

6.1 ま え が き

粒状体とは、固体でも液体でも気体でもない、粒子（固相）と他の相（間隙水や間隙空気）からなる土のような多相混合物に対して名付けられたものであろう¹⁾。土質材料を研究対象としてながめたとき、このことは最も基本的かつ本質的な事実であるとともに、その究明を困難にしている原因であると考えられる。粒状体理論は、土が粒子の集合体であるという本来の姿を直視して、土の応力・変形挙動を根本的に解析しようとする立場に立ったアプローチを意味する。これは魅力的な手法ではあるが、大きさ・形の異なる無数の粒子の不規則な集合体である土をこの立場から追求することには多くの困難が伴う。そこで、この立場の研究は、1) 種々の実験的手法により実態の把握を行いメカニズムを解明すること、2) ある種の単純化の仮定のもとにモデル化をはかり理論展開を行うこと、によって進められてきたように見受けられる。

土が粒子の集合体であるという原点に立ち戻って土の構成式を導こうとする場合、応力と「粒子構造」の関係、ひずみと「粒子構造」の関係を求め、粒子構造を介して応力とひずみを結び付けねばならない。ところが、応力やひずみは連続体の概念であり、粒子構造は本来粒状体の概念である。これらの異なった考え方に基づいた概念を結合させるため、現状ではある種の単純化、モデル化が行われている。こうして粒状体の変形機構の解明に基づき、応力・ひずみ間の適切な表現を試みるというのが、粒状体理論のアプローチの特徴といえよう。なお、せん断時には隣接粒子との相対ずれによる粒子の移動が一般に活発であり、圧密時には粒子の動きが比較的少ないので、このアプローチの関心はどちらかというとせん断によるひずみの表現に集中しているようである。

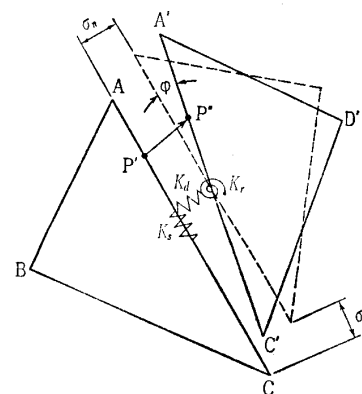
さて粒状体理論は弾塑性体理論のアプローチと矛盾するものではなく、むしろ最近その相互関係が明らかにされてきて、互いに他を刺激する状況にあると思われる。ここでは、弾塑性論的アプローチとの対比を明確にしつつ、粒状体理論による構成式の組立て方に重点をおき、その適用例についても述べることにする。

6.2 離散化モデルとファブリック・テンソル

最近、川井モデルや Cundall (カンダール) モデルのような離散化モデルおよびファブリック・テンソルが話題になっているので、それらの意義について述べる。川井モデル²⁾は、図-6.1 に示すように剛体要素（三角形でなくてもよい）がばねでつながれたもので剛体ばねモデルと呼ばれている。これは有限要素法では節点変位の連続性が仮定されているため、不連続な変形挙動を表現し得ないという欠点を補ったモデルで、剛体ブロック間の不連続な変形を考慮したものと考えられる。

地盤工学の分野では節理系岩盤の破壊現象³⁾や、フーティング下の地盤や斜面のすべり現象^{4),5)}の解析に適用されている。図-6.1 のばねは必ずしも線形弾性だけでなく非線形弾性や弾塑性的な特性も含め得るということであるので、ジョイント要素と近い特性を有するものと思われる。粒状体の個々の粒子の滑動のような問題にも適用可能であろう。

Cundall モデル⁶⁾は図-6.2 に示すように剛体円形粒子がばね要素（弾性）、ダッシュポット要素（粘性）、スライダ要素（摩擦特性）、ノー・テンション要素（引張りに抵抗しない特性）でつながれている。円形粒子は土粒子や岩塊を表し、ばね、ダッシュポット、スライダは粒子間の力学特性を表現したものである。Cundall によれば、粒子の個数は1000個が限度であり、このモデルによる解析は一つの粒状体の実験の代用となるとのことであり、実験で

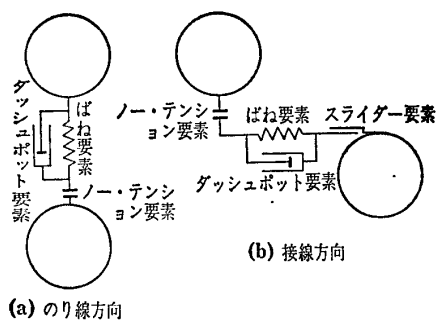


K_d, K_s, K_t : 垂直力, せん断力, モーメントに対するばね

図-6.1 川井モデルの概要

*名古屋工業大学助教授 工学部土木工学科

講 座

図—6.2 Cundall モデルの概要 (藤村ほか⁷⁾ による)

は起こり得ない仮空の条件を与えて解析結果を検討できるというメリットを有する。我が国では、このモデルによってトンネル掘削による地面沈下を算定しようとした例⁷⁾が発表されている。

川井モデルや Cundall モデルは以上のようにブロックや粒子の挙動から一足飛びに地盤の挙動を推定しようというものであり、土の構成式を飛び越えたものとみることができよう。

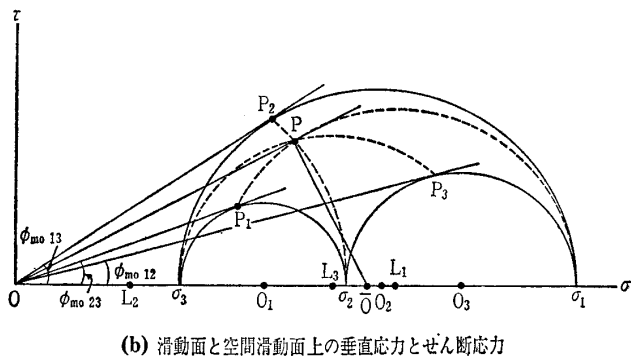
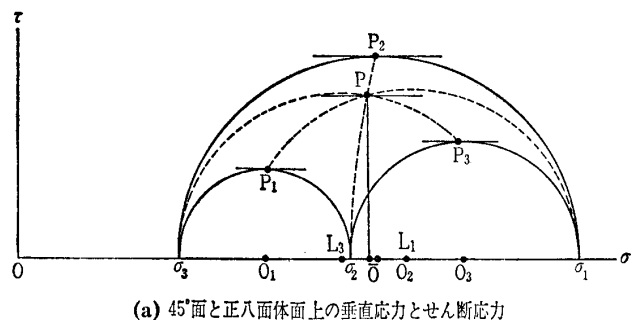
最近、粒状体力学の分野でファブリック・テンソル (構造テンソル) という言葉が用いられているが、これは粒状体の粒子構造を特徴付けるあるテンソル量と考えられる。その表現は研究者によって多少の違いがあるが、代表的なものは粒子接点角 (粒子の接触方向) の空間分布がほぼだ円体で近似できる⁸⁾ ことに着目し、粒子の接触法線に基づいて定義されたテンソル量である^{9)~11)}。このことは応力テンソルが応力だ円体で表現されることを思えば理解されよう。今後、ファブリック・テンソルの変化と応力やひずみの関係が明らかにされれば、粒状体力学の構成に寄与するものと期待される。

6.3 粒状体の変形機構と構成式の組立て

6.3.1 ひずみの発生

粒状体の変形は、一般に粒子自身の変形よりも粒子間のすべりによる変形の方が卓越すると考えられる。せん断応力を受けて隣接粒子が相対的に滑動するかどうかは、粒子間の摩擦法則による。ここでいう粒子間の摩擦法則とは粒子接点に作用するせん断力 (接線方向力) と垂直力の比がある一定値 (摩擦係数) に達したときその粒子接点が滑動するというものであるが、粒子接点でのせん断・垂直力比は巨視的には粒状体に作用するせん断・垂直応力比に対応すると考えられる。すなわち、せん断によるひずみが発生するかどうかは、粒状体の場合応力比によって規定される。応力比といっても様々なものが提案されているが、二次元応力状態ではどれをとっても同じことを意味し、三次元応力状態になって初めてどの応力比を採用するかが問題となる。

図—6.3(a) は 3 主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ として各 2 主応力

図—6.3 Mohr の応力円による正八面体面と空間滑動面の関係 (佐武¹⁴⁾による)

間で主応力面と 45° をなす面上の垂直応力、せん断応力 (点 P_1, P_2, P_3) と正八面体面 (Octahedral Plane) 上の垂直応力 σ_{oct} 、せん断応力 τ_{oct} (点 P) の関係を示している。同図 (b) は各 2 主応力間でせん断・垂直応力比が最大になる面 (滑動面; Mobilized Planes¹²⁾) 上の垂直応力、せん断応力 (点 P_1, P_2, P_3) と空間滑動面 (Spatial Mobilized Plane; SMP)¹³⁾ 上の垂直応力 σ_{SMP} 、せん断応力 τ_{SMP} (点 P) の関係を示している¹⁴⁾。これより、二次元で 45° 面上のせん断・垂直応力比 $\tau/\sigma (\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2)$ が三次元では正八面体面上のせん断・垂直応力比

$$\tau_{oct}/\sigma_{oct} (\sigma_{oct} = \sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3,$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}/3)$$

に対応し、二次元で滑動面上のせん断・垂直応力比

$$\tau/\sigma = (\sigma_1 - \sigma_3)/2\sqrt{\sigma_1\sigma_3} = \tan \phi_{m013}$$

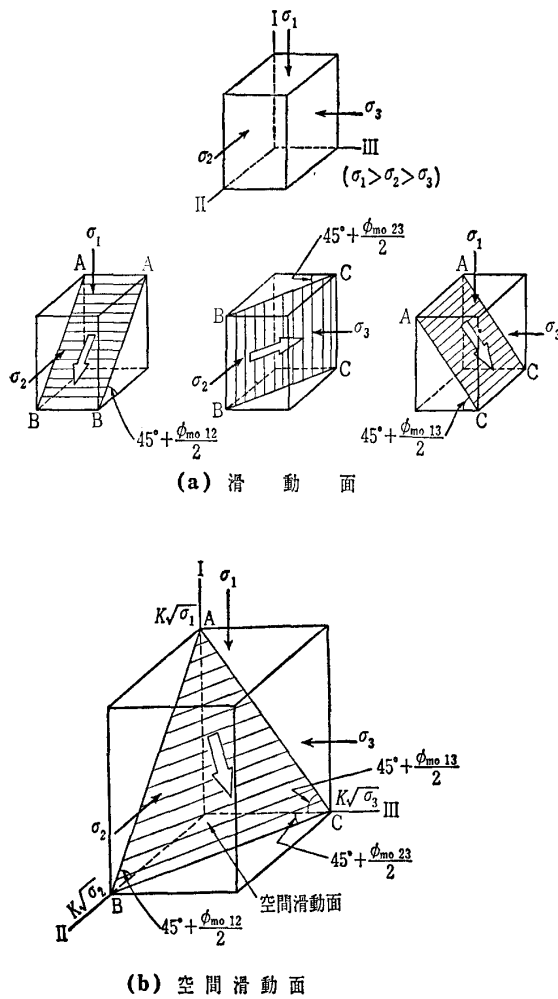
が三次元では空間滑動面上のせん断・垂直応力比

$$\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = (2/3) \cdot$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2/4\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2/4\sigma_2\sigma_3 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2/4\sigma_3\sigma_1} \\ = (2/3) \cdot \sqrt{\tan^2 \phi_{m012} + \tan^2 \phi_{m023} + \tan^2 \phi_{m013}}$$

に対応するのが理解される。なお、図—6.3(a) において P_2O_2 —一定が Tresca の規準、 $P\bar{O}$ —一定が Mises の規準を表しており、図—6.3(b) において $\angle P_2OO_2$ —一定が Mohr-Coulomb の規準、 $\angle PO\bar{O}$ —一定が SMP の規準に対応する。応力比としては、このほかに主応力比 ($\sigma_1/\sigma_2, \sigma_2/\sigma_3, \sigma_1/\sigma_3$) がよく用いられる。

さて、図—6.4(a), (b) は滑動面と空間滑動面を図示したものであるが、この (a), (b) 図で $\phi_{m0ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3; i < j)$ とおけば、それぞれ 45° 面と正八面体面にな



図—6.4 滑動面と空間滑動面の幾何学的な形状

る。粒状体の変形が摩擦法則に支配されるならば、せん断・垂直応力比が最大になる面は意味があるのかもしれない(図—6.4(a)の面 AC 参照)。村山¹⁵⁾は早くより面 AC を最大稼動面と呼び、この面に着目して土のせん断現象を説明した。その後、粒子の滑動によるひずみは σ_1 方向と σ_3 方向だけでなく、一般には σ_2 方向にも生じることから、面 AC のほかに面 AB、面 BC も想定し、3 主ひずみ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ が滑動面 AB, BC, AC の内のそれぞれ関係する二つの滑動面上の粒子の滑動によって生じると仮定して解析が試みられた^{12), 16)}。この場合、 σ_1 方向の主ひずみ ϵ_1 は面 AB と面 AC に沿う滑動によって生じる各主ひずみの和として表される。このとき、ひずみの発生条件は各滑動面上のせん断・垂直応力比 $\tau/\sigma (= \tan \phi_{mo12}, \tan \phi_{mo23}, \tan \phi_{mo13})$ の増加か、各主応力比 $(= \sigma_1/\sigma_2, \sigma_2/\sigma_3, \sigma_1/\sigma_3)$ の増加である。ここでの考え方は、粒状体の三次元的なひずみがそれぞれ二次元的な滑動によるひずみの線形和として表現されることを述べたもので、その後二次元的に考えられた種々の応力・変形モデルの三次元への拡張に利用されている^{17)~19)}。本節で、せん断によるひずみを塑性ひずみと考えれば、ここでの議論は塑性論の降伏関数を決定することに対応している(塑性ひずみが発生するかどうかを決めるのが降伏関

数である)。

6.3.2 ひずみの方向

ひずみの絶対値を求める前に、ひずみの三次元方向の相対的な出方の割合(ひずみ増分方向)を決定する問題を考えよう。これは粒状体を構成する粒子の刻々のすべりの限界つり合い式から出すことができるので、比較的容易に決定できる。すなわち、摩擦のある粒子表面(二次元あるいは三次元)に作用する粒子間力を想定し、刻々のすべりの限界つり合い条件を立てて、粒子表面の接平面の角度(二次元あるいは三次元)の方向に粒子が滑動し、ひずみが生じると考えるものである。このようにして得られた関係式は、巨視的には応力比・ひずみ増分比関係として表示されることが多い。応力比は粒子間の摩擦法則から出てくるもので、ひずみ増分比はひずみ増分方向を表している。応力比・ひずみ増分比関係の典型的な例として、Rowe(ロー)の応力・ダイレイタンス式²⁰⁾を記せば次のようである。

$$\sigma_1/\sigma_3 = 2K \cdot (-d\epsilon_3/d\epsilon_1) \quad (\text{三軸圧縮条件}) \cdots \cdots (6.1)$$

ここに、 $K = \tan^2(45^\circ + \phi_f/2)$ で、 ϕ_f は ϕ_μ (粒子間摩擦角) $\leq \phi_f \leq \phi_{ov}$ (限界間隙比状態での内部摩擦角)で実測値に合致(fit)するように選ばれるものである。また Roscoe(ロスコー)らのエネルギー式²¹⁾から導かれる応力比・ひずみ増分比関係は次のようである。

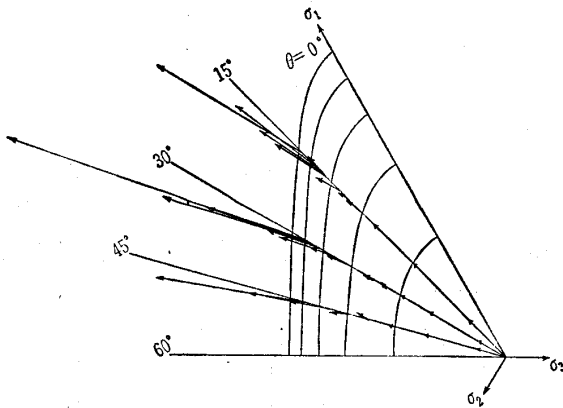
$$q/p = M - dv/d\epsilon \cdots \cdots (6.2)$$

ここに、 q/p は τ_{oct}/σ_{oct} に対応するもので、三軸圧縮条件の場合 $q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$, $dv = d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3$, $d\epsilon = (2/3) \cdot (d\epsilon_1 - d\epsilon_3)$ であり、 $M(\mu$ の大文字)は破壊時の q/p に相当する。式(6.1)、(6.2)はエネルギーの考察から導かれているが、本質的には上記の議論と同じ意味をもつものと思われる。その他、多くの研究者によって種々の形の応力比・ひずみ増分比関係式が提案されているが、空間滑動面(図—6.4(b)参照)上の粒子のすべりの限界つり合い式から得られたものを示せば次のようである²²⁾。

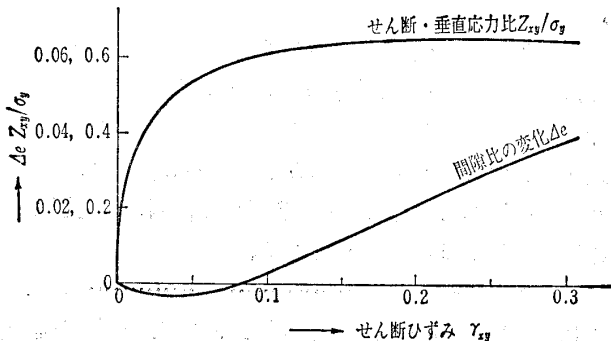
$$\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = \lambda^* (-d\epsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*) + \mu^* \cdots (6.3)$$

ここに、 λ^*, μ^* は土質パラメーターで、 μ^* は粒子間摩擦係数に相当する。 $d\epsilon_{SMP}^*, d\gamma_{SMP}^*$ はそれぞれ主ひずみ増分ベクトルの空間滑動面に垂直な成分、平行な成分を表し、 $(-d\epsilon_{SMP}^*/d\gamma_{SMP}^*)$ は平均的な土粒子の滑動方向を意味する。式(6.3)は式(6.2)と類似の形であるのが認められよう。式(6.1)~(6.3)は、いずれもひずみ増分方向が応力比だけで規定されることを表している。

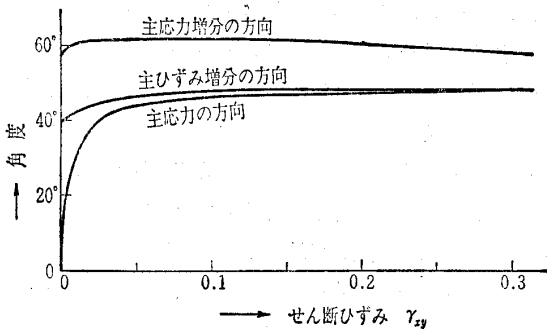
次に、ひずみ増分の三次元的な方向を決定するためには、上述した応力比・ひずみ増分比関係だけでは不十分であり、図—6.5²²⁾に示すような正八面体面上でのひずみ増分方向も検討しなければならない。この図によれば正八面体面上のせん断ひずみ増分 $d\gamma_{oct}$ の方向(矢印の方向)は τ_{oct} の方向($\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の方向)と傾向をもってずれるようである。このずれは、例えば空間滑動面に基づく考え



図—6.5 3主応力制御試験によって実測された正八面体面上のせん断ひずみ増分方向(図中の矢印の方向)とせん断応力の方向($\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の方向)のずれ



(a) 応力比・ひずみ・ダイレイタンス関係



(b) 主応力, 主応力増分, 主ひずみ増分方向の変化

図—6.6 単純せん断試験によって実測された主応力方向と主ひずみ増分方向の関係 (Roscoe ほか²⁴⁾による)

方によれば土粒子の滑動方向 ($d\gamma_{SMP}^*$ の方向) が τ_{SMP} の方向に一致するという条件より説明されるが, 最近 Roscoe らのエネルギー式の再検討より説明しようという試みもなされている²³⁾。

以上の議論では, 主応力の方向が回転しないことを前提としているが, 主応力方向が回転する場合にはどのように考えるのであろうか。この場合には, 通常応力とひずみ増分の主軸の一致を仮定する。これは, 応力と塑性ひずみ増分の主軸の一致を前提とする塑性論の考え方に準じるものである。応力の主軸方向が回転するとひずみやひずみ増分

の主軸方向がどう変わるかという問題は, 砂の単純せん断試験や光弾性材料の丸棒の混合体の単純せん断試験などによって実験的に検討されている。結論的には, 図—6.6 に示すようにひずみがある程度以上大きくなると, 応力とひずみ増分の主軸はほぼ一致するといえそうである²⁴⁾。ただ堆積による異方的な構造をもつ試料の場合には, 上記の仮定が成立しなくなると考えられ, 今後の課題となろう。また主応力の絶対値は変えずにその方向だけを回転させた場合に, 無視できないひずみが生じることが観測されている²⁵⁾が, これも今後の興味深い課題であろう。以上, 本節のひずみ増分の方を決める議論は, 塑性論でいうと塑性ポテンシャル関数を決定することに対応している(塑性ひずみ増分は塑性ポテンシャルに垂直な方向に生じる)。

6.3.3 ひずみの大きさ

ひずみの絶対値を決めることは, 塑性論でいうと硬化関数の決定に対応するが, これは難しい問題である。粒状体理論に基づいたアプローチでは, ほとんどの研究がここで行き止まる。ともかくもここを通り抜けているのは, 偏差応力を受ける粒子の滑動を確率論の導入によって解析した村山の研究¹⁷⁾, マルコフ過程を粒状体の変形の説明に取り入れた北村の研究^{26), 27)}, および松岡・中井らの研究などであろう。詳細はそれぞれの文献を参照していただくとして, ここでは後続の説明とも関連する松岡・中井らの内容^{22), 23)}を紹介する。

彼らは, 粒子の滑動による粒子接点の発生・消滅機構の考察と空間滑動面の概念より, まず式(6.3)と類似した次のような応力比・ひずみ比関係を導いた。

$$\tau_{SMP}/\sigma_{SMP} = \lambda^* \cdot (-\epsilon_{SMP}^*/\gamma_{SMP}^*) + \mu^* \dots (6.4)$$

ここに, μ^* は土質パラメーターである。式(6.3), (6.6)を合わせて微分方程式を解くと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_{SMP}^* &= \{\gamma_0^*/(\mu^* - \mu^*)\} \cdot \exp\{(X - \mu^*)/(\mu^* - \mu^*)\} \cdot dX \equiv G_1^* \cdot dX \\ d\epsilon_{SMP}^* &= \{(\mu^* - X)/\lambda^*\} \cdot d\gamma_{SMP}^* \\ &\equiv E_1^* \cdot dX (X \equiv \tau_{SMP}/\sigma_{SMP}) \end{aligned} \right\} \dots (6.5)$$

ここに, λ^* , μ^* , μ^* は試料が決まればほぼ一定となるパラメーターであるが, γ_0^* は初期の粒子構造や拘束応力の影響を受けるパラメーターである。また, ひずみ増分量 ($d\epsilon_{SMP}^*$, $d\gamma_{SMP}^*$) の3主ひずみ増分 ($d\epsilon_1$, $d\epsilon_2$, $d\epsilon_3$) への変換式は, 空間滑動面の法線方向余弦を (a_1 , a_2 , a_3) とし, τ_{SMP} の方向余弦を (b_1 , b_2 , b_3) とすれば次式で与えられる²²⁾。

$$d\epsilon_i = a_i \cdot d\epsilon_{SMP}^* + b_i \cdot d\gamma_{SMP}^* \quad (i=1, 2, 3) \dots (6.6)$$

ここに, $a_i = \sqrt{J_3}/(\sigma_i J_2)$ ($i=1, 2, 3$), $b_i = \{(\sigma_i - \sigma_{SMP})/\tau_{SMP}\} \cdot a_i = (\sigma_i J_2 - 3 J_3)/\sqrt{\sigma_i J_2 (J_1 J_2 - 9 J_3)}$ ($i=1, 2, 3$) である。なお, J_1 , J_2 , J_3 は応力の一次, 二次, 三次の不変量で, $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$, $J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ と表される。

ひずみの絶対値の決め方は, このほかにも実験式的なも

のも含んでいる提案されている。粒状体理論の概念ではないが、比較的エレガントな方法として、状態量を見いだして規定するやり方がある。状態量とは、いかなる応力径路をたどっても応力の始点と終点と同じであれば同じ値をもつある物理量と定義される。もしある状態量が発見されれば、最も単純な応力径路からその値を定めることにより、ひずみの絶対値を定める有力な条件とすることができる。例えば、ケンブリッジ学派のカム・クレイ モデルでは、Henkel (ヘンケル) のデータ²⁹⁾に基づいて体積ひずみ (間隙比) を状態量と考えひずみの絶対値を定めている。

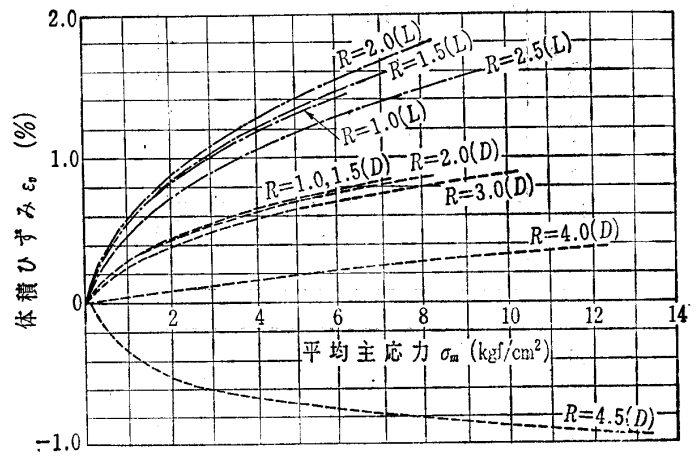
6.4 構成式の定式化

前節で述べている粒状体理論に基づく土の応力・ひずみ関係式はその組立ての過程からも分かるように応力比が変化するとき (せん断時) の土の塑性変形を対象としている。いいかえれば、粒状体理論ではモデル化において土を摩擦法則に従う剛体球の集合体として取り扱うことが多いので、応力比が増加しない限り剛体球間にすべりが起こらず変形が生じないことになる。しかし実際の地盤の土要素の応力径路は必ずしも応力比が増加する径路ばかりではなく、例えば等方圧密時や K_0 圧密時にみられるように応力比が一定のもとで平均主応力が増加する径路になることもある。そしてこれらの応力径路においても粒子間のすべりによると考えられる塑性ひずみが生じることは周知のとおりである。さて、土の構成式が地盤の変形解析に適用されその解析結果が工学的な意味を持つには、三次元空間内の任意の応力径路下の土の応力・ひずみ挙動を統一的に説明する必要があるが、現在微視的な粒状体理論からせん断以外の挙動例えば圧密挙動を定式化したものはみあたらないようである^{法1)}。したがって、本節では微視的観点から誘導されたものではないが異方圧密試験結果とせん断試験結果のダイレイタンシー特性の類似性に着目して定式化された圧密時の応力・ひずみ関係式について述べる。

従来より、圧密によるひずみとは応力比が一定のもとで平均主応力 σ_m が変化する場合に生じるひずみを呼んでいる。そして3主応力が等しい、すなわち主応力比が1の状態では平均主応力が増加する場合を等方圧密、主応力比が1より大きい一定値で平均主応力が増加する場合を異方圧密と名付けているが、ケンブリッジ理論²¹⁾に代表されるように圧密時の体積ひずみ ϵ_v は等方、異方を問わず次式で表されることが多い。

$$\epsilon_v = \frac{C_c}{1+e_0} \log_{10} \frac{\sigma_m}{\sigma_{m0}} \dots \dots \dots (6.7)$$

ここに、 C_c : 圧縮指数、 e_0 : 初期間隙比、 σ_{m0} : 初期平均主応力である。さて、図—6.7 は El-Sohby³⁰⁾ (エル・ソー



図—6.7 三軸圧縮条件下の砂の等方および異方圧密試験結果 (El-Sohby³⁰⁾による)

ビ) がある砂について行った三軸圧縮条件下の等方および異方圧密試験結果を体積ひずみ ϵ_v ~ 平均主応力 σ_m 関係で示している。図中、 R は主応力比を、 (L) , (D) はそれぞれ緩詰めおよび密詰め試料の結果を表す。図—6.7 から判断すると近似的にも式 (6.7) が成立するのは応力比 R が小さい範囲に限られており、応力比が大きい異方圧密 ($R=4.5$) では平均主応力の増加に対し体積膨張の傾向すら示すようである。そこで、もう少し詳細にこの実験結果をみると、主応力比が小さい異方圧密試験では等方圧密試験結果 ($R=1$) よりもわずかながらも圧縮側の体積ひずみが生じているが、応力比が大きくなるに従い急激に $R=1$ の試験結果より膨張側に転じている。つまり $R=1$ の試験結果を基準としてみたときの異方圧密時の体積ひずみ特性がよく知られているせん断時の砂のダイレイタンシー特性と類似しているのに気付くであろう。したがって、異方圧密中に生じる土のひずみが式 (6.7) を満足する等方圧密成分とせん断と同様のメカニズムによるダイレイタンシー成分に分けられると考えれば、圧密時の主ひずみ増分 $d\epsilon_{ic}$ は次式で表されることになる³¹⁾。

$$d\epsilon_{ic} = d\epsilon_{ic(iso)} + d\epsilon_{ic(dil)} \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (6.8)$$

上式において、上添字 c は圧密による成分を表し、下添字 (iso) は等方圧密 (isotropic consolidation) による成分、(dil) はダイレイタンシー成分 (dilatancy) による成分を意味する。さて、右辺第1項つまり等方圧密成分については式 (6.7) より、

$$d\epsilon_{ic(iso)} = \frac{0.434}{3} \cdot \frac{C_c}{1+e_0} \cdot \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (6.9)$$

で表され、第2項のダイレイタンシー成分はせん断時の式 (6.6) 同様 SMP に基づくひずみ増分量 ($d\epsilon_{SMP}^{*c}$, $d\gamma_{SMP}^{*c}$) を用いて次式で与えられる³¹⁾。

$$d\epsilon_{ic(dil)} = a_i \cdot d\epsilon_{SMP}^{*c} + b_i \cdot d\gamma_{SMP}^{*c} \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (6.10)$$

ここに、式 (6.10) の a_i , b_i は σ_{SMP} および τ_{SMP} の方向余弦を表し、 $d\epsilon_{SMP}^{*c}$ および $d\gamma_{SMP}^{*c}$ はせん断時の式 (6.5) を

注 1) 土の弾性ひずみは土粒子自身の変形によって生じると考え、Hertz (ヘルツ) の弾性2球の接触理論を応用して弾性ひずみの定式化を試みたものはある²⁰⁾。

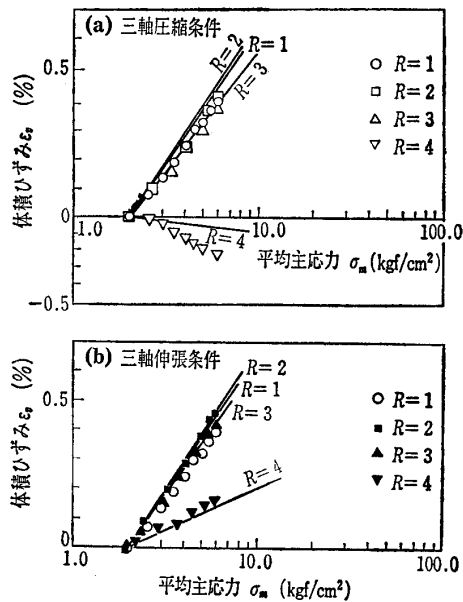


図-6.8 豊浦砂の等方および異方圧密試験結果と解析結果

参考にして次のように決められている。

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_{SMP}^{*c} &= 0.434 \cdot K_c \cdot \left\{ \exp\left(\frac{X' - \mu^*}{\mu^{1*} - \mu^*}\right) - \exp\left(\frac{-\mu^*}{\mu^{1*} - \mu^*}\right) \right\} \cdot \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} = G_2^* \cdot d\sigma_m \\ d\varepsilon_{SMP}^{*c} &= \frac{\mu^* - X}{\lambda^*} \cdot d\gamma_{SMP}^{*c} \\ &\equiv E_2^* \cdot d\sigma_m (X \equiv \tau_{SMP} / \sigma_{SMP}) \end{aligned} \right\} (6.11)$$

図-6.8(a), (b)は三軸圧縮および三軸伸張条件下の豊浦砂の圧密試験結果($R \equiv \sigma_1 / \sigma_3 = 1, 2, 3, 4$)を体積ひずみ $\varepsilon_v \sim \log_{10} \sigma_m$ (σ_m : 平均主応力) 関係でプロットしたものと、上述の圧密時の応力・ひずみ関係式による計算曲線を示している³¹⁾。実線で示された計算曲線は応力比の違いによる体積ひずみの差異や三軸圧縮・三軸伸張という応力条件の違いによるダイレイタンシー特性の差(例えば三軸圧縮条件下の $R=4$ 試験では体積ひずみは膨張側にあるが、伸張条件下の $R=4$ 試験では圧縮側にあること)を説明しているようである。なお、次節の適用例でも紹介するが、土の構成式を地盤の有限要素解析に適用する場合地盤の応力径路によってはこのような異方圧密中の土の変形特性をどこまで評価するかによって、その解析解が大きく変わること述べておこう。

Q: これまで、せん断や圧密時の応力・ひずみ関係について説明がなされてきたが、これらを有限要素解析に適用するために必要なことは?

A: 土の構成式をFEM解析等に適用するためには、一般座標系での応力増分とひずみ増分が $d\sigma = D \cdot d\varepsilon$ (D : 応力・ひずみマトリックス) なる形で関係づける必要がある。このことに関して、弾塑性あるいは弾粘塑性体理論の応力・ひずみ増分関係のマトリックス表示が、第5章で詳しく述

べられている。また粒状体理論での扱いは、文献32)を参照されたい。

6.5 適用例

本節では、粒状体理論を出発点とする弾塑性構成式による浅い基礎の支持力問題、擁壁の主働・受働土圧問題、盛土基礎地盤の変形問題の有限要素解析例を紹介するとともに、6.2でも触れた離散化モデルの適用例を示す。

6.5.1 支持力問題の解析例³³⁾

深さ24m、中心からの距離34mの平面ひずみ条件下の砂地盤に半幅4mの等分布荷重が載荷されたときの解析結果を示す。地盤材料はやや密詰めの豊浦砂(初期間隙比 $e_0 \equiv 0.68$)を想定している。図-6.9は等分布上載圧力 $q = 11466 \text{ kN/m}^2 (1170 \text{ tf/m}^2)$ が載荷されたときの地盤内の安全率分布を示しているが、安全率F.S.の低い領域($F.S. \leq 1.3$)が載荷面下方よりすべり線と考えられる領域に沿って分布している。一方、図-6.10は異方圧密中のダイレイタンシー特性を考慮しない場合(式(6.7)の関係が応力比にかかわらず成り立つ)の解析結果を示すが、図-6.9と比較すると同じ載荷応力であるにもかかわらず図-6.10の場合安全率の低下は下方へ広がりすべり線の形状をなさない。支持力問題のように地盤内の各要素の平均主応力が増

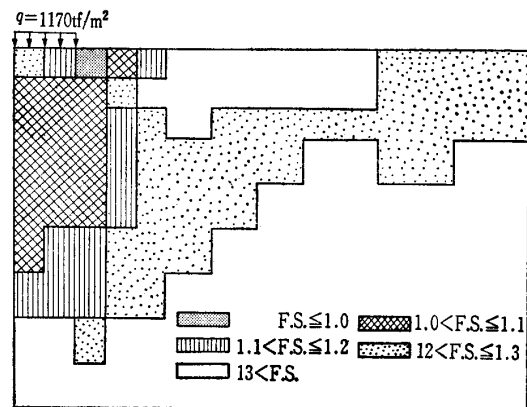


図-6.9 地盤内安全率分布の解析結果

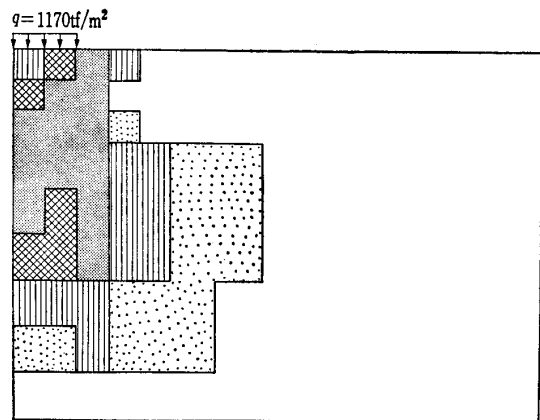


図-6.10 異方圧密中のダイレイタンシーを考慮しないときの地盤内安全率分布の解析結果(安全率F.S.の定義は図-6.9と同じ)

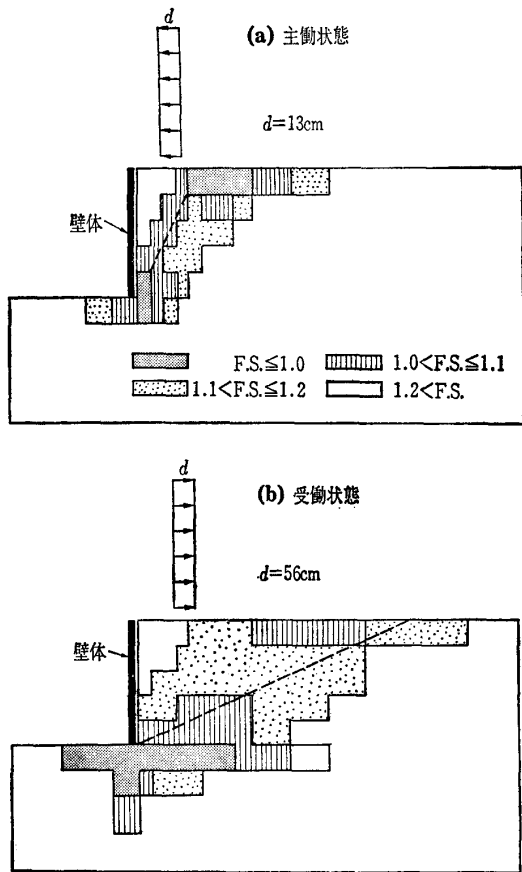


図-6.11 地盤内安全率分布の解析結果

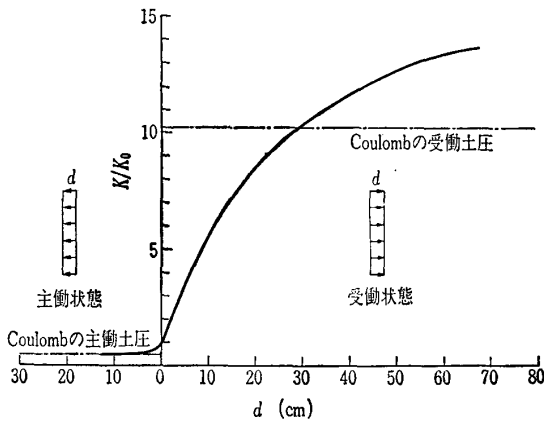


図-6.12 土圧～壁変位関係の解析結果

加するような場合の解析では、この異方圧密時のダイレイタンス特性をどこまで考慮するかによってその解析結果に大きな差がでるようである。このことは、構成式を実際の地盤の変形解析に適用する場合、その構成式が土の力学挙動を適切に表現しうる応力範囲を十分認識しておく必要があることを示唆している。

6.5.2 擁壁の主働・受働土圧問題の解析例³³⁾

砂地盤を対象とした土圧問題の有限要素解析例について示す。地盤材料は先程と同じ豊浦砂を想定し、主働および受働状態は壁体を強制変位させることにより生じさせている。図-6.11(a), (b)は主働および受働状態における地盤内安全率分布の解析結果を示す(図の上方には壁体の変

形様式および壁変位量 d を示している)。土圧問題の解析においても安全率の低い領域がクーロンの土圧論によるすべり線(図中の破線)とよい対応関係にあるのが理解される。また、図-6.12は主働・受働状態における壁変位 d と土圧係数 K 関係の解析結果を示す(縦軸は土圧係数 K と静止土圧係数 K_0 の比を表す)。従来よりよくいわれているように主働状態ではわずかな変位で主働土圧に達するのに対し、受働土圧に達するにはかなりの変位が必要なのがこの解析結果からもみられる。

6.5.3 盛土基礎地盤の変形解析例³⁴⁾

上部砂層、下部シルト層からなる2層地盤で行われた試験盛土³⁵⁾の解析を行い、その解析結果を現場実測値と比較した例を紹介する。解析方針の概略について述べると、上部砂層は透水係数が十分大きい排水条件にあると考え下部シルト層の間隙水圧の消散だけが考慮されて解析されている。また盛土は台形盛土であり、その実際の施工過程は図-6.13の実線で与えられているが、解析では三つの段階荷重に分けて破線のようにシミュレートしている。図-6.14(a), (b)はそれぞれ盛土完成直後(盛土開始後75日)および盛土完成後215日(盛土開始後290日)目における基礎地盤の沈下量と側方変位量を示している。実線が実測

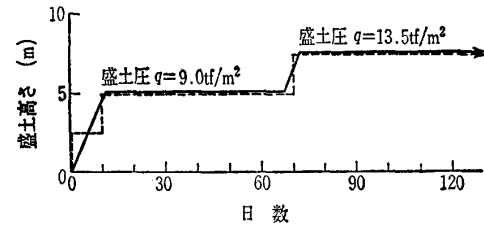
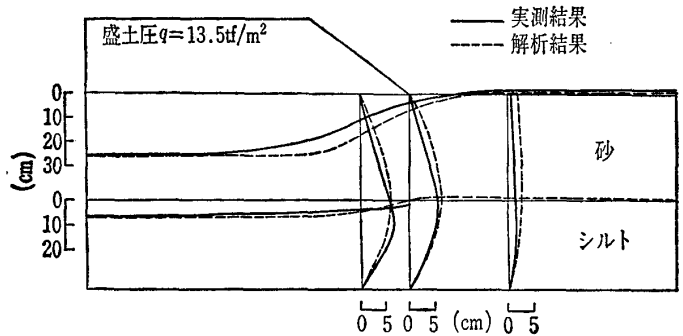
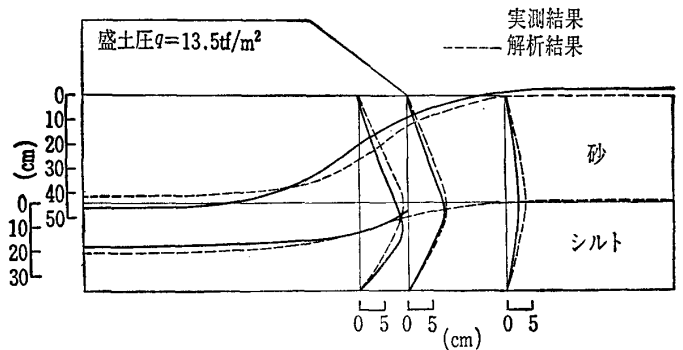


図-6.13 盛土の工程図



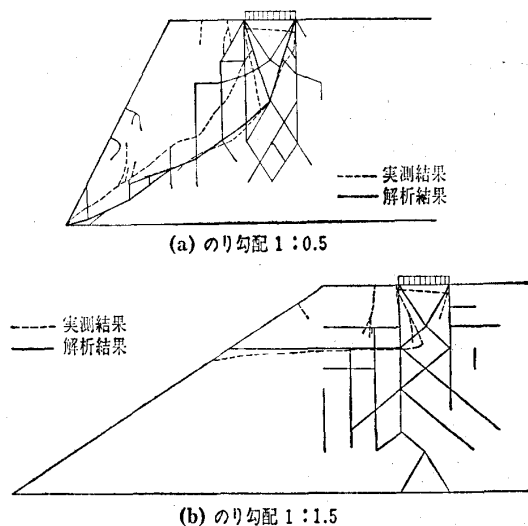
(a) 盛土完成直後(盛土開始後75日)



(b) 盛土完成後215日(盛土開始後290日)

図-6.14 盛土基礎地盤の沈下量と側方変位量

講 座

図-6.15 破壊パターンの実測と解析結果 (波田ほか⁵⁾による)

値を破線が解析結果を表しているが、盛土完成直後ばかりでなくその後215日経過後においても両者はほぼよい対応を示すようである。なお、この解析に必要な砂やシルトの土質パラメーターはすべて原位置からサンプリングされた試料の室内試験（三軸圧縮条件下の平均主応力一定試験および圧密試験）によって決定されている。

6.5.4 離散化モデルによる斜面の極限解析例⁵⁾

土の構成式に基づく解析法ではないが、粒状体のような不連続体を解析する手法として提案されている離散化モデルの地盤工学への適用例として川井モデル²⁾（剛体ばねモデル）による斜面の支持力解析を紹介しよう。剛体ばねモデルでは地盤を有限個の剛体ブロックに分割し地盤の挙動をこの分割された剛体ブロック間の相対すべりによって表そうとするものである。適用にあたっては分割のやり方と剛体接触境界面上の力学特性の考え方が大切となってくる。さて、図-6.15(a), (b)はそれぞれのり勾配が1:0.5および1:1.5の斜面のり肩近くに帯状荷重を載荷する支持力実験でのすべり線（点線）と剛体ばねモデルによる解析から得られるすべり線（実線）を示している。両図から分かるように、解析結果はのり勾配の差によるすべり線発生状況の違いをよく説明している。また極限支持力についても解析結果と実測値の間により対応がみられたと報告されている。このように離散化モデルは、その考え方からも理解されるように地盤の極限解析に特色があるので、連続体理論をベースとする有限要素法が苦手とする地盤の安定性の評価法として有効な手段と考えられる。

参 考 文 献

- 1) 最上武雄編著：土質力学，第8章粒状体の力学，技報堂，pp. 893~895, 1969.
- 2) Kawai, T.: New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集，第141号，pp. 174~180, 1977.
- 3) 大倉吉雅・平野 尚・市川康明・川本脩万：剛体バネモデルによる岩盤斜面の弾塑性解析，第15回土質工学研究発表会講演集，pp. 1433~1436, 1980.

- 4) 加倉井正昭・伴野松次郎・川井忠彦・竹内則雄：新離散化モデルによる2層地盤の支持力解析，第16回土質工学研究発表会講演集，pp. 857~860, 1981.
- 5) 波田光敬・竹内則雄・川井忠彦：新離散化モデルによる斜面の極限解析について，第36回土木学会年次学術講演会概要集，III-164，pp. 326~327, 1981.
- 6) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.: A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies, *Géotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47~65, 1979.
- 7) 藤村 尚・木山英郎・西村 強：Cundallモデルによる地表沈下の解析，第37回土木学会年次学術講演会概要集，III-156，pp. 309~310, 1982.
- 8) Oda, M.: Significance of Fabric in Granular Materials, *Proc. U.S.-Japan Seminar on Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials*, pp. 7~26, 1978.
- 9) 金谷健一：粒状体のファブリックテンソルとその構成式，第16回土質工学研究発表会講演集，pp. 433~436, 1981.
- 10) 小田匡寛・Nemat-Nasser, S.・Mehrabadi, M.M.: 粒状体の構造の数的表現，第16回土質工学研究発表会講演集，pp. 429~432, 1981.
- 11) Satake, M.: Fabric Tensor in Granular Materials, *Proc. IUTAM-Symposium on Deformation and Failure of Granular Materials*, pp. 63~68, 1982.
- 12) Matsuoka, H.: Stress-strain Relationships of Sands Based on the Mobilized Plane, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 2, pp. 47~61, 1974.
- 13) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-deformation and Strength Characteristics of Soil under Three Different Principal Stresses, *Proc. JSCE*, No. 232, pp. 59~70, 1974.
- 14) 佐武正雄：降伏条件の統計論的考察，第29回土木学会年次学術講演会概要集，I-1，pp. 1~3, 1974.
- 15) Murayama, S.: A Theoretical Consideration on a Behavior of Sand, *Proc. IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics*, pp. 146~159, 1964.
- 16) Matsuoka, H.: Constitutive Equation and FE Analysis for Anisotropic Soil, *Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, Vol. 1, pp. 223~233, 1982.
- 17) 村山朔郎：弾性状態にある砂の構成式，土木学会論文報告集，第236号，pp. 125~137, 1975.
- 18) Tatsuoka, F.: Stress-strain Behavior of an Idealized Anisotropic Granular Material, *Soils and Foundations*, Vol. 20, No. 3, pp. 75~90, 1980.
- 19) Yamada, Y. and Ishihara, K.: Modeling of Drained Deformation of Sand under Three-dimensional Stress Conditions, *Proc. IUTAM Symposium on Deformation and Failure of Granular Materials*, pp. 331~342, 1982.
- 20) Rowe, P.W.: Theoretical Meaning and Observed Values of Deformation Parameters of Soils, *Stress-strain Behaviour of Soils*, *Proc. Roscoe Memorial Symposium*, Cambridge Univ., pp. 143~194, 1971.
- 21) Schofield, A.N. and Wroth, C.P.: *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1968.
- 22) 中井照夫・松岡 元：3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的解釈，土木学会論文報告集，第303号，1980.
- 23) 岸野佑次：粒状体における散逸エネルギーと降伏条件について，第37回土木学会年次学術講演会概要集，III-3，pp. 5~6, 1982.
- 24) Roscoe, K.H., Bassett, R.H. and Cole, E.R.L.: Principal Axes Observed during Simple Shear of a Sand, *Proc. Geotech. Conf.*, Oslo, pp. 231~237, 1967.
- 25) Symes, M.J., Hight, D.W. and Gens, A.: Investigating Anisotropy and the Effects of Principal Stress Rotation and of the Intermediate Principal Stress using a Hollow Cylinder Apparatus, *Proc. IUTAM Symposium on Deformation and Failure of Granular Materials*, pp. 441~449, 1982.
- 26) Kitamura, R.: A Mechanical Model of Particulate Material Based on Stochastic Process, *Soils and*

- Foundations, Vol. 21, No. 2, pp. 63~72, 1981.
- 27) Kitamura, R.: Analysis of Deformation Mechanism of Particulate Material at Particle Scale, Soils and Foundations, Vol. 21, No. 2, pp. 85~98, 1981.
- 28) Matsuoka, H. and Geka, H.: A Stress-strain Model for Granular Materials Considering Mechanism of Fabric Change, Soils and Foundations, Vol. 23, No. 2, pp. 83~97, 1983.
- 29) Henkel, D.J.: The Relationships between the Effective Stresses and Water Content in Saturated Clays, Géotechnique, Vol. 10, pp. 41~54, 1960.
- 30) El-Sohby, M.A.: Deformation of Sands under Constant Stress Ratio, Proc. 7th ICSMFE, Vol. 1, pp. 111~119, 1969.
- 31) 中井照夫・松岡 元: 任意応力経路下の土の変形挙動に関する統一的理解, 土木学会論文報告集, 第306号, pp. 23~34, 1981.
- 32) Nakai, T. and Matsuoka, H.: Constitutive Equation for Soils Based on the Extended Concept of "Spatial Mobilized Plane" and Its Application to Finite Element Analysis, Soils and Foundations, Vol. 23, No. 4, pp. 87~105, 1983.
- 33) Nakai, T.: Analyses of Soil-footing and Soil-wall Interaction, Proc. 10th ICSMFE, Vol. 2, pp. 205~208, 1981.
- 34) Nakai, T., Shibata, T. and Matsuoka, H.: Finite Element Analysis of Soil Foundation below an Embankment, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, pp. 707~715, 1982.
- 35) 富永真生・越後勇吉・橋本正治: 載荷盛土による二層系地盤の側方変位測定について(第2報), 第9回土質工学研究発表会講演集, pp. 465~468, 1974.

(原稿受理 1983.11.9)

ニュース

“シンガポールの軟弱地盤に関する国際セミナー” 開催さる

1983年12月1~3日に、シンガポールのセントサ島アポロホテルで“軟弱地盤における建設の諸問題”に関する国際セミナーが開催された。このセミナーは、シンガポールのナンヤン工科大学 (Nanyang Technological Institute) の「セミナーとワークショップ委員会」が企画したもので、コーディネーターは高名な B.B. Broms (ブロムス) 教授 (2年間の予定でスウェーデンから着任中) である。

セミナーは6セッション16講座と多くのディスカッションのプログラムが用意されたが、Broms や S. Hansbo (ハンスボ) 教授ら6か国12名の講師陣を含め、出席者数は13か国約200人に及んだ。私は土質工学会からの依頼で出講したが、セミナーの内容と興味あったいくつかの点を紹介する。

- ・実務者を対象としたセミナーを大学が主催し、開会の挨拶に政府高官である高速交通公団総裁が出られたこと。
- ・3日間の会費が日本円換算約6万円 (シンガポールの大学出初任給が数万円、付近の他国はもっと安い) という高価なものにもかかわらず、シンガポールから約100名、マレーシアから約50名、その他東南アジア各国から多くの出席者を集めたこと。
- ・立派な会議場、ゆったりした座席があったが、離れ小島の不便なところで開催され、しかも講師はすべてホテルに宿泊 (2階建1戸ずつの別荘が与えられた) させられ、全期間中講義を聞かされたこと。
- ・会議場の片隅に食堂が設けられ、毎日2回のコーヒークレークとランチ (無料) を大きなテーブルでとったこと。
- ・各セッションの最後に質疑の時間が設けられたが、この

ほかに質疑だけに答えるセッションが用意されたこと。

- ・2日目の夜に、講師と参加者の中から選ばれた人が3グループに分かれ、三つの例題 (高層建築の基礎、海成粘土中の深い根切り、軟弱地盤上の道路盛土) を解き、その経過、コストなどを翌日1時間ずつ発表したことなど。なおセミナーの講義科目と講師名は次のとおりである。
- ・シンガポールにおける新しい堆積物の起源・性質と範囲 (ピッツ)
- ・原位置試験と計測方法 (マサールシュ)
- ・シンガポール軟弱土の土質工学的性質と室内試験 (タン)
- ・軟弱地盤中のトンネル工事と深い根切りに伴う地下水問題 (ブロムス)
- ・軟弱粘土地盤の沈下計算と設計パラメーター (チョア)
- ・深い根切りと安定 (ハンスボ)
- ・矢板と切ばりを用いた軟弱粘土層の根切り (ウォン)
- ・シンガポール海成粘土層の根切り (デービス)
- ・軟弱地盤でのアースアンカーの利用 (カナン)
- ・土質安定工法 (ハンスボ)
- ・生石灰パイルを用いた軟弱粘土の改良 (ブロムス)
- ・軟弱粘土地盤の杭 (ブロムス)
- ・ネガティブフリクションのケーススタディ (モー・ウー)
- ・軟弱地盤中のトンネル施工 (藤田)
- ・トンネル施工時の地盤工学的問題 (マイア)
- ・軟弱地盤における振動問題 (マサールシュ)

(文責: 藤田圭一 機関組 専務取締役 技術研究所長)

(原稿受理 1984.1.23)