

有限要素法による数値解析入門

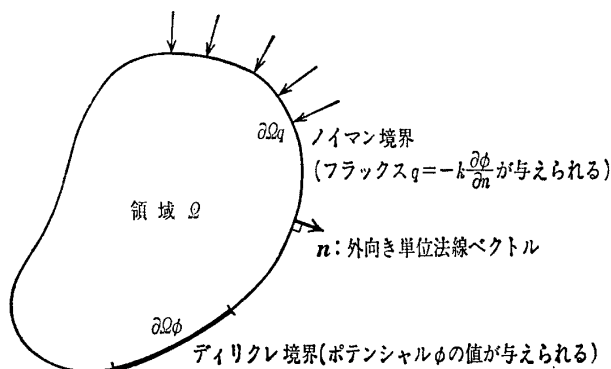
3. 有限要素法による微分方程式の近似解法

—浸透問題を中心として—

いち
市かわ
川やす
康あき
明*あさ
浅おか
岡あきら
顕*

有限要素法が微分方程式で与えられた問題を近似的に解くための手法であることは前に述べたとおりであり、また、地盤力学において現れる微分方程式についても説明した。ここでは、等方性を有する地盤の浸透問題を取り上げ、その有限要素法による解き方について考えてみたい。

水が非圧縮であると仮定すると、変形する飽和多孔質体に対する連続の方程式は第2章③式のように導かれるが、水が完全に非圧縮と仮定できなかつたり（高压の被圧水帯など）、あるいは多少なりとも気体を含んで不飽和である場合には連続の式は



図—3.1 二次元問題の領域と境界条件
(式(1), (3), (4) 参照)

$$c \frac{\partial \phi}{\partial t} + S_w \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \phi) - f = 0$$

と書かれる^{1), 2)}。ここで、 ϕ は水頭ポテンシャル（全水頭）、 θ は体積変形、 S_w は飽和度、 $c = n \partial S_w / \partial t$ は比水分容量あるいは貯留係数（ n は間隙率）、 k はダルシー（Darcy）則

$$v = -k \nabla \phi$$

における透水係数（ v は流速ベクトル）、 f は湧き出し（例えば揚水量に相当）である^{注1)}。

なお、水頭ポテンシャル ϕ は

$$\phi = p/\gamma_w + \zeta$$

と書ける。ここで p/γ_w は圧力水頭（ γ_w は水の単位体積重量）、 ζ は位置水頭であり、鉛直上向きを $+y$ 方向と取ると

$$\zeta = y - y_0 \quad (y_0: \text{基準位置, 例えば地表面の} y \text{座標})$$

となろう。

いま、二次元領域 Ω を考え（図—3.1）、また、体積変化が無視できるとすると連続の式は

$$c \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \phi) - f = 0 \dots \dots (1)$$

$$= c \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - f = 0 \dots \dots (1)$$

と書け、これは放物型の偏微分方程式である。また、時間に依存しない定常問題では

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + f = 0 \dots \dots (2)$$

と書け、これはだ円型の偏微分方程式となる。

微分方程式(1)の境界条件は2種類あり、それぞれ

$$\phi(x, y; t) = \bar{\phi}(t), \quad \partial\Omega_\phi \text{ 上で} \dots \dots (3)$$

$$-k \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y; t) = \bar{q}(t), \quad \partial\Omega_q \text{ 上で} \dots \dots (4)$$

と書ける。定常問題(2)の境界条件は同じ形を取るが、時間に依存しない。ここで、 $\partial\Omega$ は領域 Ω の境界であり、 $\partial\Omega_\phi$ と $\partial\Omega_q$ からなる。なお、 $\partial/\partial n$ は境界上における垂直方向の微分を表す。したがって、外向き単位法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T; \quad n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta$$

$$\theta: \mathbf{n} \text{ と } x \text{ 軸とのなす角}$$

とすると（記号 T は転置を表す）

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y$$

である。式(3)を基本境界条件あるいはディリクレ（Dirichlet）境界条件、式(4)を自然境界条件あるいはノイマン（Neumann）境界条件と呼ぶ。

これに対して時間依存の非定常方程式(1)では初期条件

$$\phi(x, y; t=t_0) = \phi_0(x, y)$$

$$t=t_0 \text{ における領域 } \Omega \text{ に対して} \dots \dots (5)$$

を必ず与えなければならない。なお、時間 t_0 における境界条件(3)、(4)と、領域 Ω の境界 $\partial\Omega_\phi$ および $\partial\Omega_q$ における初期条件は矛盾なく定められていなければならない。

フィルダムや堤体の自由水面の時間変動を求めるような問題では、地盤が飽和しており、かつ水が非圧縮であるとする、支配方程式は時間に依存しない(2)式となり、自由水面の変動は専ら境界条件の時間変化に依存するという面白い問題となる。ただし、この問題では境界条件(3)、(4)のほかに自由水面の境界条件が必要であり、また必要に応じて浸出面の境界条件を追加する（本講座3.2節を参照）。

ポテンシャル ϕ は空間座標 x, y および非定常問題(1)で

注1) 第2章では全水頭を h 、湧き出しを q と書いたが、この章では多くの記号を混同せずに用いる都合上、それぞれ ϕ と f と書き換えた。

*名古屋大学助教授 工学部地盤工学教室

講 座

は時間 t の関数である。有限要素法は基本的に空間座標 x , y に対してポテンシャル ϕ を離散化し、微分方程式を代数方程式に落として解く方法の一種である。時間方向に関しては通常、差分法やモード解析が行われる。以下に、この過程について述べることにする。

3.1 有限要素法とは—次元問題への適用—

この節では、まず一次元定常浸透問題に対する支配方程式とその境界条件について簡単に説明する。次に、その積分形表現の一種、弱形式 (weak form) と境界条件の処理について述べる。この弱形式表現に各種の離散近似を適用して重み付き残差法が導かれる。古典的な重み付き残差法と有限要素近似を用いた近代的なそれとの相違は、近似関数の形に起因する。この節では具体的な問題に適用してその違いを示す。さらに、有限要素近似の精度を上げるために高次の要素を用いるのであるが、そのためのアイソパラメトリック要素について述べる。

3.1.1 支配方程式と境界条件

一次元の定常浸透問題はポアソン (Poisson) 方程式

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\phi}{dx}\right)=f(x), \text{ 領域 } \Omega=(x_1, x_2) \text{ 中で} \cdots(6)$$

と、その境界条件

$$\phi=\bar{\phi}, \quad \text{境界 } x=x_\phi \text{ で (基本境界条件)} \cdots(7)$$

$$-k\frac{d\phi}{dn}=\bar{q}, \quad \text{境界 } x=x_q \text{ で (自然境界条件)} \cdots(8)$$

によって書き表される。ただし、式(8)の $d\phi/dn$ は関数 ϕ の法線方向の微分を意味し、座標 x の基底ベクトルを i とした場合、“左端” $x=x_1$ では外向き単位法線ベクトル n は $-i$ であり(図—3.2参照)、したがって自然境界条件(8)は

$$-k\frac{d\phi}{dn}=k\frac{d\phi}{dx}=\bar{q}$$

となり、“右端” $x=x_2$ では $n=i$ であるので

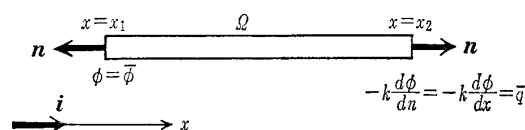
$$-k\frac{d\phi}{dn}=-k\frac{d\phi}{dx}=\bar{q}$$

となることに注意する。この節では簡単のために $x_1=x_\phi$ (基本境界), $x_2=x_q$ (自然境界) と考えて議論を進めることとする。

3.1.2 弱形式

次に、微分方程式系(6)–(8)を近似的に解くことを最終目標に、弱形式と呼ばれる積分形式の表現を考えてみる。この弱形式表現は、後に述べるように一定の条件の下で元の微分方程式系と等価になる。

いま、関数 η を基本境界 $\partial\Omega_\phi(x=x_1)$ 上ではゼロとなる



図—3.2 一次元問題と境界条件
(式 (6), (7), (8)参照)

“任意”の関数とする：

$$\eta=0 \quad x=x_1 \text{ 上で} \cdots(9)$$

この条件は決して本質的なものでなく、Lagrange (ラグランジェ)乗数やペナルティー (penalty: 罰金と訳されている) を使って弱めることもできる (例えばジェンキエヴィッチ (Zienkiewicz) とモーガン (Morgan)³⁾第6章参照) が、後の式展開がこの条件によって極めて美しくなるのでここでは式(9)を導入しておくことにする。ここで本質的なことは関数 η は ($\partial\Omega_\phi$ 上を除いて)「任意」の関数であるということである。

微分方程式(6)に任意関数 η を乗じて積分を施すと

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + f \right] \eta dx = 0 \cdots(10)$$

と書くことができる。この式の第1項に部分積分を施すと

$$k \frac{d\phi}{dx} \eta \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(k \frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} - f\eta \right) dx = 0$$

であるが、自然境界条件(8)を代入し、また、式(9)の条件 (基本境界 x_1 上で $\eta=0$) より

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(k \frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} - f\eta \right) dx + q\eta(x_2) = 0 \cdots(11)$$

を得る。条件(9)を課すことにより、微分方程式(6)と境界条件(7), (8)は1本の積分形の方程式(11)となったわけである。これは、微分方程式系(6)–(8)の弱形式表現と呼ばれる。

微分方程式系(6)–(8)から弱形式(11)が導かれることは以上に示したとおりであるが、逆に弱形式(11)から出発した場合、条件(9) $\eta(x_1)=0$ が付与されているので

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + f \right] \eta dx + \left(-k \frac{d\phi}{dx}(x_2) - \bar{q} \right) \eta(x_2) = 0 \quad (12)$$

を得る。ここで、関数 η が連続かつ十分に滑らかであるとすると、この $\eta(x)$ および $\eta(x_2)$ は任意に選べるので、これは結局

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + f = 0; \quad -k \frac{d\phi}{dx} - \bar{q} = 0, \quad x=x_2 \text{ で} \cdots(13)$$

を意味し、初めに考えた微分方程式系(6)–(8)と弱形式(11)が等価であることが分かる。積分式(12)から方程式(13)が導かれる過程は、変分学の基本補題として知られている(加藤⁴⁾第2章、水本と原⁵⁾)。しかしながら、この過程は関数 ϕ および η の微分可能性・連続性に関連して精密な議論を必要とするので、数学に興味のある読者は柴垣⁶⁾や Raviart (ラビア) と Thomas (トマ)⁷⁾と格闘して頂きたい。なお、変分原理については付録Dを参照されたい。

基本境界 $x=x_1$ 上で $\eta=0$ という条件(9)は、部分積分によって現れた境界項の内、基本境界の部分を取り除く役割を負っている。弱形式(11)は微分方程式系(6)–(8)の仮想仕事式と考えてよいが、この時条件(9)は $\eta=\delta\phi$ ($\delta\phi$ は関数 ϕ の変分の意)として

$$\delta\phi=0, \quad x=x_1 \text{ 上で}$$

に相当する。この場合、弱形式(11)はつぎのように書直せる：

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(k \frac{d\phi}{dx} \frac{d(\delta\phi)}{dx} - f\delta\phi \right) dx + \bar{q}\delta\phi(x_2) = 0$$

式(10), (11), (12)は共に弱形式表現であるが, 式(10)では自然境界条件(8)が陰に仮定されている(当然ながら基本境界条件も)。これに対して, 式(11), (12)では自然境界条件が陽に組み込まれている。このことは重み付き残差法(後述)で近似を導入するに際して差異を生ずる。また, 弱形式(11)では関数 ϕ に対する微分の次数が元の方程式(6)から1階下になっていること, $d\phi/dx$ と $d\eta/dx$ の項が同じ形式 $d(\)/dx$ を有していること(対称性)に注目いただきたい。

3.1.3 重み付き残差法

弱形式(10), (11)または(12)は微分方程式の近似解法としての重み付き残差法(weighted residual method)と密接に結びついている。重み付き残差法は一言で述べると, 関数 ϕ と任意関数 η (この関数 η を重みと考えている)に適当な近似を導入し, 領域全体に渡る平均的な残差をゼロとする方法である。この近似の導入の方法により, 選点法やモーメント法, ガラーキン(Galerkin)法など, 各種の方法が存在するが, ここではまず, 近似関数が領域全体で定義される古典的な重み付き残差法について触れてみる。

いま, 微分方程式(6)に対して境界条件が具体的に

$$\phi(0)=\phi(1)=0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

と与えられた場合を考える(領域 $\Omega=(0,1)$ とする)。この境界条件を満たす最小次数の多項式は $x(1-x)$ であるので, 関数 ϕ の多項式近似としては

$$\phi \approx \phi_h = x(1-x)(\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \dots\dots) \quad \dots\dots\dots(15)$$

を採用し, 何らかの方法でこの係数の列 $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\dots$ を定めればよい。ただし, 関数 ϕ の近似として多項式を採用する必然性はなく, $\sin$ 関数, $\cos$ 関数も良く用いられる。例えば, $\sin$ 関数

$$\sin n\pi x; n=1, 2, 3, \dots\dots \quad \dots\dots\dots(16)$$

は境界条件(14)を満たすので, ϕ の近似関数列は

$$\phi \approx \phi_h = \phi_1 \sin \pi x + \phi_2 \sin 2\pi x + \phi_3 \sin 3\pi x + \dots\dots \quad \dots\dots\dots(17)$$

としても良い。

近似式(15)および(17)を見比べて, 関数 ϕ の近似は一般的に

$$\phi \approx \phi_h = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} N_{\alpha}(x) \quad \dots\dots\dots(18)$$

と書けることが理解されよう。ここで, ϕ_{α} は未知係数, $N_{\alpha}(x)$ は関数 ϕ を近似するためにあらかじめ用意した関数列(試験関数と呼ぶ)である。例えば, 近似(15)に対しては

$$N_1 = x(1-x), N_2 = x^2(1-x), N_3 = x^3(1-x) \quad \dots\dots\dots(19)$$

近似(17)に対しては

$$N_1 = \sin \pi x, N_2 = \sin 2\pi x, N_3 = \sin 3\pi x, \dots\dots \quad \dots\dots\dots(20)$$

である。この試験関数は境界条件(14)を満たしているものを選んでいて, また, 領域 $\Omega=(0,1)$ 上の全域で定義された関数であることに注意されたい。

このように領域全体で定義された試験関数を導入する方法が“古典的”な重み付き残差法の特長であり, これに対して“近代的”な重み付き残差法, すなわち有限要素法では領域を分割した要素ごとに局所的に試験関数が定義され

ることを付記しておく。なお, 試験関数としては通常, 境界条件を満たした多項式や正弦・余弦関数が選ばれるが, 試験関数の選び方についての数学的議論への入門としては三好と藤井^{9),9)}や Strang(ストラング)と Fix(フィックス)¹⁰⁾ およびそれらで紹介してある文献を参照していただきたい。

次に, 係数 ϕ_{α} の決め方について考える。ここで導入した試験関数 N_{α} は既に境界条件を満たしているのだから, あとは支配方程式(6)を満足することを考えればよい。しかしながら, 近似式(15)を直接代入しただけでは誤差

$$\epsilon(x) = -\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi_h}{dx} \right) - f \neq 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

が生ずる。重み付き残差法はこの誤差 ϵ に適当な重み w_{β} ($\beta=1, 2, \dots\dots, N$)を掛け合わせた後に領域全体に対する残差がゼロとなるように係数 ϕ_{α} を定める方法である。すなわち, 各 $\beta=1, 2, \dots\dots, N$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \epsilon w_{\beta} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi_h}{dx} \right) + f \right] w_{\beta} dx \\ &= - \sum_{\alpha} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dN_{\alpha}}{dx} \right) w_{\beta} dx \right] \phi_{\alpha} - \int_{x_1}^{x_2} f w_{\beta} dx = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(22)$$

を解いて ϕ_{α} を定めるわけである。ここで w_{β} はあらかじめ与えられた重み関数であることに注意する。なお, 積分表現を簡略化して

$$\langle \epsilon, w_{\beta} \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \epsilon w_{\beta} dx$$

と書くことがあるのでここに記しておく。

重み付き残差式と弱形式(10)を比べると, 弱形式は微分方程式の積分形の表現であり, 仮想仕事の原理に対応するのに対して, 重み付き残差法はこの弱形式を離散的に解く手法であると言えよう。なお, 弱形式(12)から出発して離散近似を導入する重み付き残差法も当然考えられる。この場合, 仮定する近似関数列は基本境界条件のみを満足していればよく, 自然境界条件は式(12)の左辺最後の項によって近似的に評価される。これらの方法の詳細については Zienkiewicz と Morgan³⁾, Connor(コナー)と Brebbia(プレビア)¹¹⁾を参照されたい。

重み付き残差法は, 重み w_{β} の取り方によって各種の手法が開発されている。以下では古典的な重み付き残差法のうち, いくつかの方法について具体的に述べるとともに, 次に示す例題を解いてみることにする。

例-3.1: 2階の常微分方程式

$$\phi'' + \phi + x = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

を境界条件

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

のもとで考える。ただし, $\phi'' = d^2\phi/dx^2$ とした。この方程式の解は明らかにつぎのように求まる。

$$\phi = \sin x / \sin 1 - x \quad \dots\dots\dots(25)$$

である。

境界条件(24)を満たす近似関数は, 前述のように, 多項式では

講 座

$$\phi_h^P = (1-x)(\phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \dots) \quad (26)$$

また, $\sin$ 関数では

$$\phi_h^P = \phi_1 \sin \pi x + \phi_2 \sin 2\pi x + \phi_3 \sin 3\pi x + \dots \quad (27)$$

と書けるが, 以下では簡単に2項までの近似

$$\phi_h^P = x(1-x)(\phi_0 + \phi_1 x) \quad (28)$$

$$\phi_h^P = \phi_1 \sin \pi x + \phi_2 \sin 2\pi x \quad (29)$$

を用いることとする。

この近似を採用して方程式(2)に代入すると, 誤差がそれぞれ

$$\varepsilon^P = x + (-2 + x - x^2)\phi_0 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\phi_1 \quad (30)$$

$$\varepsilon^F = x + (1 - \pi^2)\sin \pi x \phi_1 + (1 - 4\pi^2)\sin 2\pi x \phi_2 \quad (31)$$

と計算される。

例—3.2: 支配方程式は例—3.1と同じく式(2)とし, 境界条件を

$$\phi(0) = \phi'(1) = 0 \quad (32)$$

とする。この方程式の解は

$$\phi = \sin x / \cos 1 - x \quad (33)$$

である。

ここでは近似として

$$\phi_h^P = \phi_1 \sin \frac{1}{2}\pi x + \phi_2 \sin \frac{3}{2}\pi x + \phi_3 \sin \frac{5}{2}\pi x + \dots \quad (34)$$

を用い, その2項を用いて誤差を計算すると

$$\varepsilon^F = x + \left(1 - \frac{1}{4}\pi^2\right) \sin \frac{1}{2}\pi x \phi_1 + \left(1 - \frac{9}{4}\pi^2\right) \sin \frac{3}{2}\pi x \phi_2 \quad (35)$$

である。

例—3.3: 同様に方程式(2)を用い, 境界条件を

$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0 \quad (36)$$

とすると, その解は

$$\phi = \frac{\cos 1 - 1}{\sin 1} \cos x + \sin x - x \quad (37)$$

である。

近似式は

$$\phi_h^P = \phi_0 + \phi_1 \cos \pi x + \phi_2 \cos 2\pi x + \phi_3 \cos 3\pi x + \dots \quad (38)$$

とする。ここで, ϕ_0 は定数であり, 任意に定められるが, 後に示す作図の都合上, $\phi_0 = -0.5$ としておく。この近似式の ϕ_1 と ϕ_2 に関する2項を用いて, 誤差が

$$\varepsilon^F = x + \phi_0 + (1 - \pi^2)\cos \pi x \phi_1 + (1 - 4\pi^2)\cos 2\pi x \phi_2 \quad (39)$$

と計算される。

(選点法) 任意に選ばれた点で残差がゼロとなるようにパラメータを決定する方法である。これは重み付き残差式(2)で重み w_β として Dirac(ディラック)の δ 関数を用いることに相当する。 δ 関数は定義により

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i) \quad (40)$$

と書かれるので, 残差式(2)は

$$\langle \varepsilon, \delta(x - x_\beta) \rangle = \varepsilon(x_\beta)$$

$$= -\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi_h(x_\beta)}{dx} \right) - f(x_\beta) = 0 \quad (41)$$

を意味する。

選点として $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$ を採り, 各例題を解いてみよう。

例—3.1について: 多項式近似(28)を用いると誤差は式(30)であり,

$$\varepsilon^P \left(x = \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{29}{16}\phi_0 + \frac{35}{64}\phi_1 = 0$$

$$\varepsilon^P \left(x = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\phi_0 - \frac{7}{8}\phi_1 = 0$$

を得る。これはマトリックス形で

$$\begin{bmatrix} 29/16 & -35/64 \\ 7/4 & 7/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

と書ける。これを解くと

$$\phi_0 = 6/31, \quad \phi_1 = 40/217$$

を得るので, 近似式が

$$\phi_h^P = x(1-x)(42 + 40x)/217 \quad (43)$$

と定まる。

一方, 近似(29)を用いると誤差式(31)より同様に

$$\begin{bmatrix} (\pi^2 - 1)/\sqrt{2} & (4\pi^2 - 1) \\ (\pi^2 - 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

が得られ, これを解くと

$$\phi_1 = 1/2(\pi^2 - 1), \quad \phi_2 = (1 - \sqrt{2})/4(4\pi^2 - 1)$$

と求まり, 近似式は

$$\phi_h^P = \frac{1}{2(\pi^2 - 1)} \sin \pi x - \frac{\sqrt{2} - 1}{4(4\pi^2 - 1)} \sin 2\pi x \quad (44)$$

となる。

例—3.2について: 誤差式(31)より, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$ において

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) \sqrt{1 - \alpha^2} & \left(1 - \frac{9}{4}\pi^2\right) \alpha \\ \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) / \sqrt{2} & \left(1 - \frac{9}{4}\pi^2\right) / \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

が求まり ($\alpha = \sin 3\pi/8$), これより

$$\phi_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha - \frac{1}{4} \right) / \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \right) (\sqrt{1 - \alpha^2} - \alpha)$$

$$\phi_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \right) / \left(1 - \frac{9}{4}\pi^2 \right) (\sqrt{1 - \alpha^2} - \alpha)$$

となる。近似式はそのまま

$$\phi_h^P = \phi_1 \sin \frac{1}{2}\pi x + \phi_2 \sin \frac{3}{2}\pi x \quad (45)$$

と書いておく。

例—3.3について: 誤差式(39)より, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$ とおくと

$$\begin{bmatrix} (\pi^2 - 1)/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - 4\pi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 + 1/4 \\ \phi_0 + 1/2 \end{bmatrix}$$

となり, これより

$$\phi_1 = \left(\phi_0 + \frac{1}{4} \right) \sqrt{2} / (\pi^2 - 1), \quad \phi_2 = \left(\phi_0 + \frac{1}{2} \right) / (1 - 4\pi^2)$$

と求まる。近似式は

$$\phi_h^P = \phi_0 + \phi_1 \cos \pi x + \phi_2 \cos 2\pi x \quad (46)$$

である。

各例題の正解と近似解を, 図—3.3, 図—3.4, 図—3.5 にそれぞれ示す。

(“古典” Galerkin 法) 重み付き残差式(2)の w_β として近似(1)の試験関数 $N_\alpha(x)$ を選ぶ場合をガラーキン法と呼ぶ。ただし, 後述する有限要素近似を用いたガラーキン法と異なって, ここでは $N_\alpha(x)$ は領域 Ω の全域で定義された関数である。残差式は当然

$$\langle \varepsilon, N_\alpha(x) \rangle = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (47)$$

である。選点法と同様にガラーキン法を適用して各例題を解いてみよう。

例—3.1について: 多項式近似(28)を用いて, 誤差式(30)と上記の残差式(47)より

$$\langle \varepsilon^P, N_1(x) \rangle = \int_0^1 \varepsilon^P x(1-x) dx = 1/12 - 3\phi_0/10 - 3\phi_1/20 = 0$$

$$\langle \varepsilon^P, N_2(x) \rangle = \int_0^1 \varepsilon^P x^2(1-x) dx = 1/20 - 3\phi_0/20 - 13\phi_1/105 = 0$$

であるから, マトリックス形で

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{bmatrix} \quad (48)$$

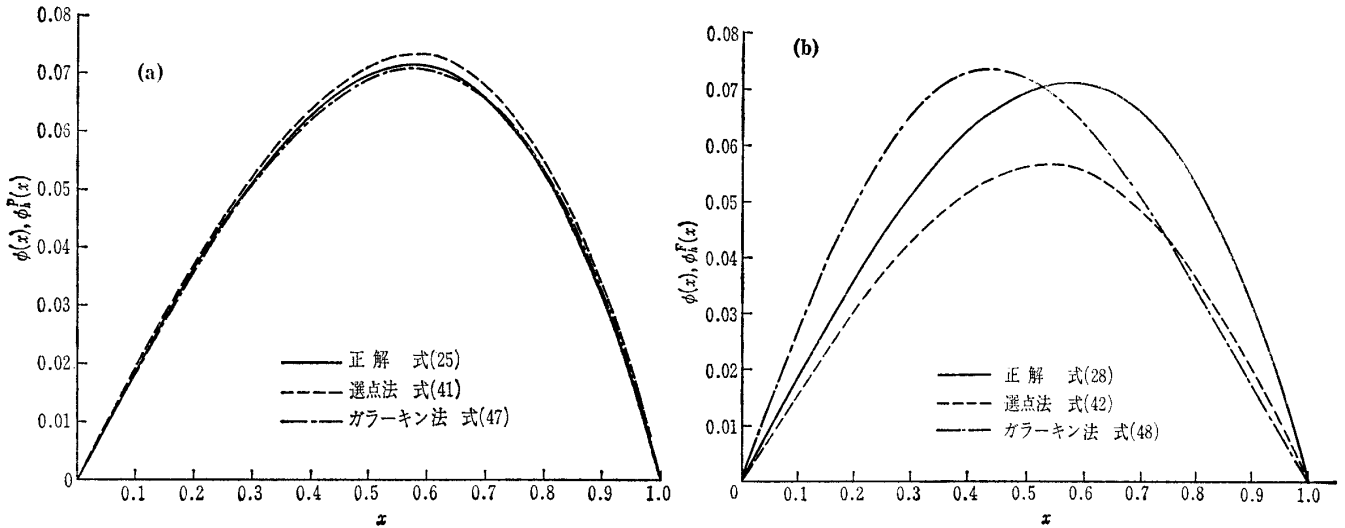
と書ける。これを解くと

$$\phi_0 = 71/369, \quad \phi_1 = 7/41$$

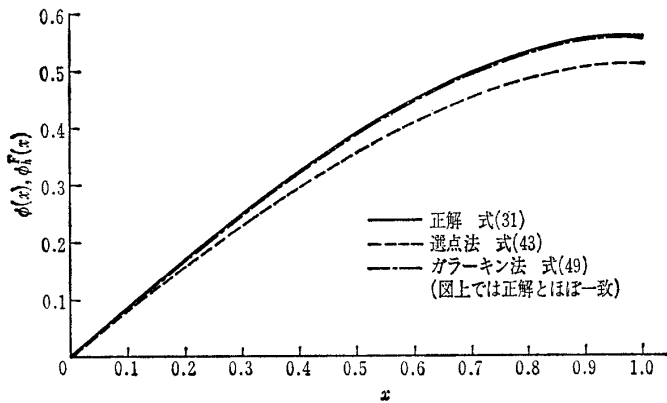
であるので近似式は

$$\phi_h^P = x(1-x)(71/369 + 7x/41) \quad (49)$$

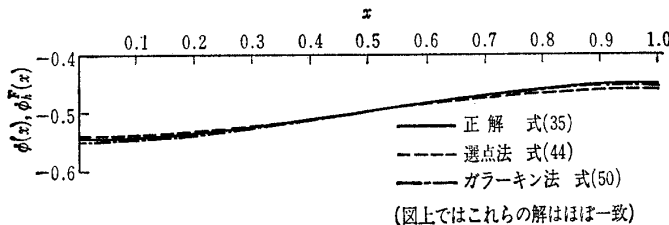
となる。なお, 式(48)における選点法のマトリックスは非対称なので



図—3.3 例題1の解と多項式試験関数による近似



図—3.4 例題2の解と正弦試験関数による近似



図—3.5 例題3の解と余弦試験関数による近似

に、式40中のガラーキン法のマトリックスは対称であるのに注意されたい。

一方、近似式47を用いると、誤差式49と残差式48より

$$\langle \varepsilon^F, N_1(x) \rangle = \int_0^1 \varepsilon^F \sin \pi x dx = 1/\pi + (1-\pi^2)\phi_1/2 = 0$$

$$\langle \varepsilon^F, N_2(x) \rangle = \int_0^1 \varepsilon^F \sin 2\pi x dx = 1/2\pi + (1-4\pi^2)\phi_2/2 = 0$$

であるから、マトリックス形で

$$\begin{bmatrix} (1-\pi^2)/2 & 0 \\ 0 & (1-4\pi^2)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\pi \\ -1/2\pi \end{bmatrix}$$

と書ける。これを解いて

$$\phi_1 = 2/\pi(\pi^2-1), \quad \phi_2 = 1/\pi(4\pi^2-1)$$

であるから、近似式は

$$\phi_h^F = 2 \sin \pi x / \pi(\pi^2-1) + \sin 2\pi x / \pi(4\pi^2-1) \quad \dots\dots\dots 49$$

と書ける。

例—3.2 について：近似48を用いると、誤差式48と残差式48より

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^F, \sin \pi x/2 \rangle &= \int_0^1 [x + \phi_1(1-\pi^2/4) \sin \pi x/2 + \phi_2(1-9\pi^2/4) \sin 3\pi x/2] \\ &\quad \times \sin \pi x/2 dx = (2/\pi)^2 + (1-\pi^2/4)\phi_1/2 = 0 \\ \langle \varepsilon^F, \sin 3\pi x/2 \rangle &= \int_0^1 [x + \phi_1(1-\pi^2/4) \sin \pi x/2 + \phi_2(1-9\pi^2/4) \sin 3\pi x/2] \\ &\quad \times \sin 3\pi x/2 dx = -(2/3\pi)^2 + (1-9\pi^2/4)\phi_2/2 = 0 \end{aligned}$$

であるから、マトリックス形で

$$\begin{bmatrix} (\pi^2/4-1)/2 & 0 \\ 0 & (9\pi^2/4-1)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/\pi^2 \\ -4/9\pi^2 \end{bmatrix}$$

と書ける。これを解くと

$$\phi_1 = 8/\pi^2(\pi^2/4-1), \quad \phi_2 = -8/9\pi^2(9\pi^2/4-1)$$

であり、したがって近似式は

$$\phi_h^F = 8 \sin(\pi x/2) / \pi(\pi^2/4-1) - 8 \sin(3\pi x/2) / 9\pi^2(9\pi^2/4-1) \quad \dots\dots\dots 49$$

と書ける。

例—3.3 について：近似48を用いると、誤差式48と残差式48より

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^F, \cos \pi x \rangle &= \int_0^1 [x + \phi_0 + \phi_1(1-\pi^2) \cos \pi x + \phi_2(1-4\pi^2) \cos 2\pi x] \\ &\quad \times \cos \pi x dx = -2/\pi^2 + (1-\pi^2)\phi_1/2 = 0 \\ \langle \varepsilon^F, \cos 2\pi x \rangle &= \int_0^1 [x + \phi_0 + \phi_1(1-\pi^2) \cos \pi x + \phi_2(1-4\pi^2) \cos 2\pi x] \\ &\quad \times \cos 2\pi x dx = -1/2\pi^2 + (1-4\pi^2)\phi_2/2 = 0 \end{aligned}$$

マトリックス形で

$$\begin{bmatrix} (1-\pi^2)/2 & 0 \\ 0 & (1-4\pi^2)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi^2 \\ 1/2\pi^2 \end{bmatrix}$$

であるから、これを解いて

$$\phi_1 = 4/\pi^2(1-\pi^2), \quad \phi_2 = 1/\pi^2(1-4\pi^2)$$

を得る。近似式は

$$\phi_h^F = \phi_0 + 4 \cos \pi x / \pi^2(1-\pi^2) + \cos 2\pi x / \pi^2(1-4\pi^2) \quad \dots\dots\dots 50$$

と書ける。

ガラーキン法で求めた近似解が前と同様図—3.3、図—3.4、図—3.5 に示してある。

付録D (変分法について)

定常浸透問題が二次元では方程式系(2)–(4)、一次元では方程式

講 座

系(6)―(8)で表され、これから弱形式表現が導かれることを既に述べた。この問題ではさらに、エネルギー汎関数を導入することができ、その停留条件(この問題では極値条件でもある)によって微分方程式系が導かれる。この体系は極めて美しいが、また煩雑でもある。したがって、初めての読者はこの項を飛ばして読んでいただいても結構である。なお、詳しくは Kikuchi¹²⁾ や Zienkiewicz と Morgan³⁾ を参照されたい。

問題(6)―(8)に対して、いま(天下りの的に)エネルギー汎関数

$$\Pi(\Psi) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - f\Psi \right] dx + \bar{q}\Psi(x_2) \cdots \cdots (D1)$$

を考える($k>0$ である)。この時、問題(6)―(8)は、 $\phi(x_1)=\bar{\phi}$ の条件の下にすべての Ψ (ただし $\Psi(x_1)=\bar{\phi}$) の内から

$$\Pi(\Psi) \geq \Pi(\phi) \cdots \cdots (D2)$$

となる関数 ϕ を探す問題と等価になる。このことは、次のようにして証明できる。まず、任意関数 Ψ を

$$\Psi = \phi \pm \varepsilon \eta \quad (\varepsilon > 0: \text{正定数}) \cdots \cdots (D3)$$

と置く。この η は

$$\eta(x_1) = 0$$

を満たす任意の関数である。式(D3)を式(D2)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(\phi \pm \varepsilon \eta)}{dx} \right)^2 &= \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \pm \varepsilon \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \\ &= \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \pm 2\varepsilon \frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \cdots \cdots (D4) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\pm \varepsilon \left[\int_{x_1}^{x_2} k \frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} - f\eta \right] dx + \bar{q}\eta(x_2) \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} k \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \cdots \cdots (D5) \end{aligned}$$

を得る。この式を $\varepsilon > 0$ で割って $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ると

$$\pm \left[\int_{x_1}^{x_2} k \frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} - f\eta \right] dx + \bar{q}\eta(x_2) \geq 0$$

を得るが、この不等号が正負両符号に対して成立するのは等号が成立する

$$\int_{x_1}^{x_2} k \frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} - f\eta \, dx + \bar{q}\eta(x_2) = 0 \cdots \cdots (D6)$$

の時に限る。この式は $\eta(x_1)=0$ の条件と共にちょうど弱形式(1)に相当し、微分方程式系(6)―(8)と等しくなることが分かる。結局、

- 微分方程式系(6)―(8)
- 弱形式(1)
- 汎関数 $\Pi(\Psi)$ の最小化問題 (D2)

は等価である。

この過程を詳細に調べると、式(D4)で

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dx} \frac{d\phi}{dx}$$

であることが鍵となっていることが分かる。したがって、一般に奇数階の微分を含む、例えば

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} + f = 0$$

のような問題に対しては、式(D1)のような汎関数を定めることができない。このことは

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} \Psi &= \frac{d(\phi \pm \varepsilon \eta)}{dx} (\phi \pm \varepsilon \eta) = \frac{d\phi}{dx} \phi \pm \varepsilon \left(\frac{d\phi}{dx} \eta + \frac{d\eta}{dx} \phi \right) + \varepsilon^2 \frac{d\eta}{dx} \eta \\ &\neq \frac{d\phi}{dx} \phi \pm 2\varepsilon \frac{d\phi}{dx} \eta + \varepsilon^2 \frac{d\eta}{dx} \eta \end{aligned}$$

であることから確認されよう。他方、問題

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi + f = 0, \quad x = (x_1, x_2) \text{ に対して}$$

$$\phi(x_1) = \bar{\phi}, \quad x = x_1 \text{ で}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = q, \quad x = x_2 \text{ で}$$

に対しては、汎関数

$$\Pi(\Psi) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 - \Psi^2 - f\Psi \right] dx - q\Psi(x_2)$$

が定義でき、この最小化問題も(D2)に帰結される。

エネルギー汎関数(D1)から弱形式(D6)が導かれる過程は、変分法の言葉に従えば、汎関数(D1)に変分を施してその Euler 方程式を導くことに相当する。すなわち、 $\delta(d\phi/dx) = d(\delta\phi)/dx$ であることに注意して

$$\delta\Pi(\phi) = \int_{x_1}^{x_2} \left[k \frac{d\phi}{dx} \frac{d(\delta\phi)}{dx} - f\delta\phi \right] dx + q\delta\phi(x_2) = 0 \cdots \cdots (D7)$$

を得る。式(D2)から(D6)を導く過程と、この式(D7)を対応させると、汎関数 Π の(η 方向の)“微分”を $\langle d\Pi(\phi), \eta \rangle$ と書いて

$$\langle d\Pi(\phi), \eta \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\Pi(\phi + \varepsilon \eta) - \Pi(\phi)] \cdots \cdots (D8)$$

と定義すればよく、これはまた

$$\delta\Pi(\phi) = \langle d\Pi(\phi), \delta\phi \rangle \quad (\delta\phi = \eta \text{ として}) \cdots \cdots (D9)$$

であることも示している。

参 考 文 献

- 1) Barden, L.: Consolidation of Compacted and Unsaturated Clays, *Géotechnique*, Vol. 15, pp. 267~286, 1965.
- 2) Neuman, S. P.: Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements, *Proc. ASCE*, HY 12, pp. 2233~2250, 1973.
- 3) Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K.: *Finite Elements and Approximation*, John Wiley, 1983(伊理正夫・伊理由美訳「有限要素法と近似」, ワiley・ジャパン).
- 4) 加藤敏夫: 変分法, 寺沢寛一編「自然科学者のための数学概論一応用編」C, 岩波書店, pp. 353~489, 1960.
- 5) 水本久夫・原平八郎: 「有限要素法一理論編」, 森北出版, 1983.
- 6) 柴垣和三雄: 「関数解析と数値解析の基礎」, 森北出版, 1985.
- 7) Raviart, P. A. et Thomas, J. M.: *Introduction à l'analyse numérique des équation aux dérivées partielles*, Masson, 1983.
- 8) 三好哲彦・藤井 宏: 差分法, *Rayleigh-Ritz-Galerkin 法, 有限要素法*, bit, Vol. 5, No. 3, pp. 239~245, 1973.
- 9) 三好哲彦・藤井 宏: 有限要素法の収束性と安定性, bit, Vol. 5, No. 4, pp. 361~365, 1973.
- 10) Strang, G. and Fix, G. J.: *An Analysis of the Finite Element Method*, Printice-Hall, 1973 (三好哲彦・藤井宏訳「有限要素法の理論」, 培風館).
- 11) Connor, J. J. and Brebbia, C. A.: *Finite Element Technique for Fluid Flow*, Butterworth, 1976 (坂井藤一・岩本卓也訳「流体解析への有限要素法の応用」, サイエンス社).
- 12) Kikuchi, N.: *Finite Element Methods in Mechanics*, Cambridge Univ. Pr., 1986.