

有限要素法による数値解析入門

4. 地盤の変形解析

いち かわ やす あき
市 川 康 明*かめ むら かつ み
亀 村 勝 美**

ここでは有限要素法による地盤の線形弾性解析について記すが、すでに土質力学に係わる問題に様々な形で携わっている読者諸兄は、地盤が第2章で述べられた様な線形弾性体としては挙動しないことを十分承知のことであろう。したがって、ここで弾性地盤の変形解析について述べることの意義について疑問に思われる向きもあろう。しかしながら、本講座の目的は有限要素法を理解していただくことにある。この目的のためには地盤を線形弾性体と仮定したもっとも簡単な解析法の本質を理解することが重要である。実際の地盤の変形挙動を取り扱った解析では線形弾性解析で示される基本的事項に加えて、

- ・地盤構成材料の非線形応力-ひずみ関係式（構成則）
- ・非線形方程式の解法

が考慮されているにすぎない。この二つの分野における研究には目覚ましいものがあり、数多くの成果が報告されている。実際、洗練された理論に基づく汎用有限要素解析プログラムが作られており、それらを用いれば、数値解析的には地盤に係わるあらゆる問題を解析することが可能のように見える。

しかしながら、このようなプログラムを用いることで地盤工学の本質的な問題を解決することができるのであろうか？ 答えは『否』である。もちろん、問題が複雑化し、技術者に精度の高い判断が求められる現在、数値解析法無くしては問題の解決は不可能と言っても良いが、一連の問題解決のプロセスの中で、数値解析の占める部分はほんの一部でしかないことに十分留意しなければならない。すなわち、数値解析に至るまでと、解析結果が出たあとのプロセスが重要なのであり、ここで地盤工学に携わる技術者の力量が問われる。具体的に言えば、我々が目にする現象をどのように力学的に表現し、どの数値解析法を適用するのか、さらには、得られた結果をどう評価し、実際の現場へ反映させるのか、などの困難な問題を解決して初めて数値解析法が生きてくるのである。数値解析法が高級化、複雑化すればするほど、一見、そのような困難な作業は減るかに見えるが、実際は逆で、ますます技術者の技量に負う所が大となる。数値解析法は一種の道具であり、この道具を上手に使うためには、道具の特性を十分に知ってお

く必要があることは言うまでもない。

4.1 有限要素法による線形弾性体の解析

弾性変形・応力場における力の釣合い問題の解き方も、定常浸透流の問題を解く場合と粗筋は変わらない。ただし、浸透場では場の変数すなわち水頭ポテンシャルがスカラー型であり、したがって各節点に付随する未知数が1つであるのに対して、力の釣合い問題では場の変数すなわち変位はベクトル型であり、このため各節点には次元の数（一次元問題では1個、二次元問題では2個）だけの未知数が現れる。

定常浸透問題と同様に、線形弾性体の釣合い問題を有限要素法によって解くための手順をまとめると以下のとおりである。

- 1) 支配微分方程式（釣合い式）、自然境界条件（荷重境界条件）を組み込んだ弱形式（仮想仕事式）を導く。
- 2) 局所的に定義された近似関数すなわち形状関数を、ひずみを通して弱形式に代入し、離散的な代数方程式を導く。これを解くことによって各節点の変位が求まる。

この手順2)は詳細には

- 2-1) 要素毎の形状関数によって節点変位・ひずみ関係式を導き、要素剛性行列を求める。また、物体力に基づく要素荷重ベクトルは、要素形状関数を代入することにより得られる。
- 2-2) これらを全体剛性行列、全体荷重ベクトルに組み込む。
- 2-3) 外荷重条件を全体荷重ベクトルに組み込む。
- 2-4) 変位境界条件を組み込むことによって全体荷重ベクトルを修正し、全体剛性行列を縮約する。
- 2-5) 代数方程式を解いて各節点の変位を求める。
- 2-6) 求まった節点変位を用いて、各要素のひずみおよび応力を計算する。

となる。

以下、二次元の線形弾性体の釣合い問題に対してこの手順を適用し、解き方の詳細について述べることにする。

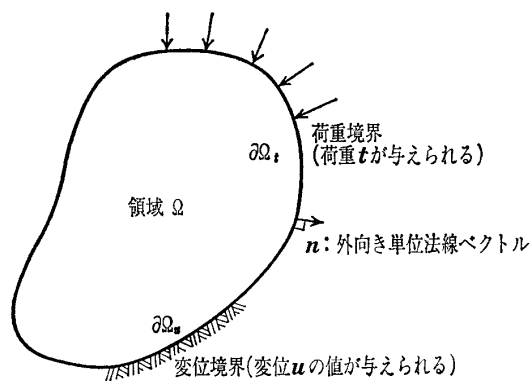
4.1.1 支配方程式と弱形式表現・仮想仕事の原理

二次元弾性体の釣合い式、境界条件については2章2.2.6～2.2.10で既に述べたが、整理の意味から再度記述

*名古屋大学助教授 工学部地盤工学教室

**大成建設技術研究所 主任研究員

講 座



図—4.1 変形問題の領域と境界条件 (式(1), (2), (3)参照)

しておこう。変形する地盤の釣合い方程式と境界条件 (図—4.1 参照) は

(釣合い式)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma_t &= 0 \end{aligned} \right\} \text{領域 } \Omega \text{ 内で} \dots\dots\dots(1)$$

(境界条件)

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}, \quad v = \bar{v} && \text{変位境界 } \partial\Omega_u \text{ 上で} \dots\dots\dots(2) \\ t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{t}_x && \text{荷重 (応力) 境界} \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \bar{t}_y && \partial\Omega_t \text{ 上で} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

である。ここで

$$u = [u \quad v]^T \quad (\bar{u} = [\bar{u}, \bar{v}]^T) \dots\dots\dots(4)$$

は x, y 方向の変位 ($\bar{u}$ は与えられた変位),

$$t = [t_x \quad t_y]^T \quad (\bar{t} = [\bar{t}_x, \bar{t}_y]^T) \dots\dots\dots(5)$$

は x, y 方向の (単位面積当たりの) 力 ($\bar{t}$ は与えられた外力),

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \dots\dots\dots(6)$$

は応力を表す。一方, γ_t はこの地盤材料の単位体積重量であり, $-y$ の方向に重力が働いているとしている。また, ひずみを

$$\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \dots\dots\dots(7)$$

とすると, 変位とひずみの関係が

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots(8)$$

と与えられる。

線形弾性体に対してはフック (Hooke) 則によって応力・ひずみ関係が比例的に

$$\sigma = D\epsilon \dots\dots\dots(9)$$

となる。ここで, 弾性マトリックス D は, 等方材料の平面応力問題 ($\epsilon_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \epsilon_z \neq 0, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) に対しては

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

E : ヤング率, ν : ポアソン比

等方材料の平面ひずみ問題 ($\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \sigma_z \neq 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) に対しては

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

と与えられる。

ここで, 釣合い方程式(1)からはこの方程式系に対する変数が応力 σ であるように見えるが, 実は応力は Hooke 則(9)およびひずみの定義(8)を通して変位の1階微分で与えられるため, 釣合い式(1)は浸透場の方程式3章式(2)(式(3.2)と表す。以下同様)と同じ形の変位 u に関する2階の微分方程式として表される。こうして, 基本境界条件は変位 u 自身を与える変位境界となり, 自然境界条件は変位の1階微分→ひずみ→応力を与える荷重境界と対応することになる。

いま, 関数 η, ζ を変位境界条件(2)に対応して

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0; \quad \partial\Omega_u \text{ 上で} \dots\dots\dots(12)$$

である任意の関数とする。これらを各々, 釣合い式(1)に掛け合わせて積分を施すと

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \eta + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma_t \right) \zeta \right] dV = 0 \dots\dots\dots(13)$$

となる。これにガウス (Gauss) の定理 (C3) を適用して

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} [(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) \eta + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) \zeta] dS \\ & - \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \sigma_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma_t \zeta \right] dV = 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで, 境界 $\partial\Omega$ は変位境界 $\partial\Omega_u$ と荷重境界 $\partial\Omega_t$ のみからなり, 変位境界上では条件(12)が満たされ, 荷重境界上では条件(3)によって外荷重が与えられることを考慮すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \sigma_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] dV \\ & = \int_{\partial\Omega_t} [\bar{t}_x \eta + \bar{t}_y \zeta] dS - \int_{\Omega} \gamma_t \zeta dV \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

と書き直せる。これが釣合い条件式(1), 境界条件(2), (3)から導かれる弱形式である。逆に, 弱形式(14)から微分方程式系(1), (2), (3)が導かれるロジックは浸透問題と同じである。

ここで仮想変位を

$$\delta u = \eta, \quad \delta v = \zeta \dots\dots\dots(15)$$

と置くと, 条件(12)を考慮に入れて変位境界上で

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0; \quad \partial\Omega_u \text{ 上で} \dots\dots\dots(16)$$

である。また, 仮想ひずみは

$$\delta \epsilon = [\delta \epsilon_x \quad \delta \epsilon_y \quad \delta \gamma_{xy}]^T \dots\dots\dots(17)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), & \delta \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) \\ \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

であるから、弱形式(14)は

$$\int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_y \delta \varepsilon_y] dV \\ = \int_{\partial \Omega_t} [\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v] dS - \int_{\Omega} \gamma_i \delta v dV \quad \dots\dots\dots (19)$$

と書かれる。こうして弱形式(14)は仮想仕事の原理(9)に相当することがよく理解されよう。

変形場の問題では通常、弱形式(14)の代わりに仮想仕事式表現(9)を用いる。ここでも、これ以後は慣例に従って仮想仕事式を適用することにする。ただし、この仮想仕事式は微分方程式系(1), (2), (3)の弱形式表現であることを忘れないでお願いしたい。

仮想仕事式(9)はまた、ベクトル表現(4), (5), (6), (7), (17)を用いると

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\partial \Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV \quad \dots\dots\dots (20)$$

あるいは内積を用いて

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{e} dV = \int_{\partial \Omega_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad \dots\dots\dots (20')$$

と書ける。ここで

$$\mathbf{g} = [0 \quad -\gamma_i]^T \quad \dots\dots\dots (21)$$

は重力ベクトルであり、内積は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$ を意味する。

仮想仕事式(20)に Hooke 則(9)を代入すると

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} dV = \int_{\partial \Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。

4.1.2 形状関数と有限要素法

三角形定ひずみ要素を用いた近似 ポテンシャル問題と同様、まず三角形定ひずみ要素(図-3.12参照)を考える。式(3.104)と同じく、変位 u, v に対して三角形要素 Ω^e 内で線形近似

$$\left. \begin{aligned} u &\simeq u_h = a_1^e + b_1^e x + c_1^e y \\ v &\simeq v_h = a_2^e + b_2^e x + c_2^e y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

を与える。 u_h にかかわる係数 a_1^e, b_1^e, c_1^e は節点 i, j, k における条件

$$\begin{aligned} u_i &= a_1^e + b_1^e x_i + c_1^e y_i \\ u_j &= a_1^e + b_1^e x_j + c_1^e y_j \\ u_k &= a_1^e + b_1^e x_k + c_1^e y_k \end{aligned}$$

を解いて、

$$\begin{aligned} a_1^e &= \alpha_i^e u_i + \alpha_j^e u_j + \alpha_k^e u_k \\ b_1^e &= \beta_i^e u_i + \beta_j^e u_j + \beta_k^e u_k \\ c_1^e &= \gamma_i^e u_i + \gamma_j^e u_j + \gamma_k^e u_k \end{aligned}$$

を得る。この $\alpha_i^e, \alpha_j^e, \alpha_k^e; \beta_i^e, \beta_j^e, \beta_k^e; \gamma_i^e, \gamma_j^e, \gamma_k^e$ は式(3.105)で求めた値と同一である。同様に、 v_h にかかわる係数 a_2^e, b_2^e, c_2^e も

$$\begin{aligned} a_2^e &= \alpha_i^e v_i + \alpha_j^e v_j + \alpha_k^e v_k \\ b_2^e &= \beta_i^e v_i + \beta_j^e v_j + \beta_k^e v_k \\ c_2^e &= \gamma_i^e v_i + \gamma_j^e v_j + \gamma_k^e v_k \end{aligned}$$

と求まる。これをまとめると、変位 u, v の近似が要素 Ω^e に対しては

$$\begin{aligned} u_h &= N_i^e(x, y) u_i + N_j^e(x, y) u_j + N_k^e(x, y) u_k \\ &= \sum_{\alpha=i,j,k} u_{\alpha} N_{\alpha}^e(x, y) \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_h &= N_i^e(x, y) v_i + N_j^e(x, y) v_j + N_k^e(x, y) v_k \\ &= \sum_{\alpha=i,j,k} v_{\alpha} N_{\alpha}^e(x, y) \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

と与えられることが分かる。ここで、添字 α は i, j, k という値を取り、また

$$\left. \begin{aligned} N_i^e(x, y) &= \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y \\ N_j^e(x, y) &= \alpha_j^e + \beta_j^e x + \gamma_j^e y \\ N_k^e(x, y) &= \alpha_k^e + \beta_k^e x + \gamma_k^e y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

は要素形状関数と呼ばれる。なお、式(24), (25)はまとめて

$$\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_h = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{U}^e \quad \dots\dots\dots (27)$$

と表せる。ここで

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_i^e & 0 & N_j^e & 0 & N_k^e & 0 \\ 0 & N_i^e & 0 & N_j^e & 0 & N_k^e \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

は要素形状関数マトリックス、

$$\mathbf{U}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k]^T \quad \dots\dots\dots (29)$$

は(要素の)節点変位ベクトルである。

要素 Ω^e 内のひずみ(7)は近似(24), (25)を用いて

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &\simeq \varepsilon_{hx} = \frac{\partial u_h}{\partial x} = \sum_{\alpha=i,j,k} u_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} \\ &= \beta_i^e u_i + \beta_j^e u_j + \beta_k^e u_k \\ \varepsilon_y &\simeq \varepsilon_{hy} = \frac{\partial v_h}{\partial y} = \sum_{\alpha=i,j,k} v_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} \\ &= \gamma_i^e v_i + \gamma_j^e v_j + \gamma_k^e v_k \\ \gamma_{xy} &\simeq \gamma_{hxy} = \frac{\partial u_h}{\partial y} + \frac{\partial v_h}{\partial x} \\ &= \sum_{\alpha=i,j,k} \left(u_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} + v_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} \right) \\ &= \gamma_i^e u_i + \beta_i^e v_i + \gamma_j^e u_j + \beta_j^e v_j \\ &\quad + \gamma_k^e u_k + \beta_k^e v_k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

と計算される。マトリックス表示するとこれは

$$\boldsymbol{\varepsilon} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \quad \dots\dots\dots (31)$$

と書ける。ここで

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \beta_i^e & 0 & \beta_j^e & 0 & \beta_k^e & 0 \\ 0 & \gamma_i^e & 0 & \gamma_j^e & 0 & \gamma_k^e \\ \gamma_i^e & \beta_i^e & \gamma_j^e & \beta_j^e & \gamma_k^e & \beta_k^e \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32)$$

は(要素の)節点変位ひずみマトリックスである。マトリックス $\mathbf{B}^e$ は各節点に対応する

講 座

$$B_{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} & \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \alpha = i, j, k \dots \dots \dots (33)$$

を組み合わせで成立していること、すなわち

$$B^e = [B_i^e \ B_j^e \ B_k^e]$$

であることに注意されたい。

全領域への拡張と全体剛性行列 つぎに、これら要素毎に定義された関係を領域全部に対して拡張することを試みよう。要素形状関数 N_{α} は該当節点では1、その他の節点では0となることを思い出していただきたい。

$$N_i^e(x_i, y_i) = 1, \quad N_i^e(x_j, y_j) = 0, \quad \text{etc.}$$

したがってこれを領域 Ω の全域に拡張すると、該当節点では1、その他では0という全域的な形状関数 $N_{\alpha}(x, y)$; $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (N は全節点数) が導かれる。ただし、

$$N_{\alpha}(x_{\beta}, y_{\beta}) = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \text{ に対して} \\ 0 & \alpha \neq \beta \text{ に対して} \end{cases}$$

であり、また、 $N_{\alpha}(x, y)$ は節点 α を構成する隣接要素からの寄与があることに注意されたい(一次元の図-3.7を参照のこと)。これを用いると変位 u, v の全域的な近似は

$$\left. \begin{aligned} u &\simeq u_h = \sum_{\alpha=1}^N u_{\alpha} N_{\alpha}(x, y) \\ v &\simeq v_h = \sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha} N_{\alpha}(x, y) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

と書ける。式(33)と同様、これもまとめて

$$u \simeq u_h = N(x, y)U \dots \dots \dots (35)$$

と表される。ここで

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_N & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_N \end{bmatrix} \dots \dots \dots (36)$$

は形状関数のマトリックスであり、

$$U = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_N \ v_N]^T \dots \dots \dots (37)$$

は節点変位ベクトルである。

節点変位ひずみ関係(31)も同様に、

$$\epsilon \simeq \epsilon_h = BU \dots \dots \dots (38)$$

と拡張される。ここで

$$B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_N] \dots \dots \dots (39)$$

$$B_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} & \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (40)$$

であることは、式(33)から明らかであろう。

有限要素法では通常、仮想変位 δu および仮想ひずみ $\delta \epsilon$ に式(35), (38)と同じ近似が導入されて(Galerkin法),

$$\delta u \simeq \delta u_h = N(x, y)\delta U \dots \dots \dots (41)$$

$$\delta \epsilon \simeq \delta \epsilon_h = B\delta U \dots \dots \dots (42)$$

と書かれる。ここで

$$\delta U = [\delta u_1 \ \delta v_1 \ \delta u_2 \ \delta v_2 \ \dots \ \delta u_N \ \delta v_N]^T \dots \dots \dots (43)$$

は節点仮想変位ベクトルである。

近似(38), (41), (42)を仮想仕事式(22)に代入すると

$$\begin{aligned} (\delta U)^T \left[\left(\int_{\Omega} B^T DB dV \right) U - \int_{\partial\Omega_t} N^T t dS \right. \\ \left. - \int_{\Omega} N^T g dV \right] = 0 \end{aligned}$$

となるが、これは変位境界上を除いた任意の δU に対して成立するので

$$KU = F \dots \dots \dots (44)$$

を得る。ここで

$$K = \int_{\Omega} B^T DB dV \dots \dots \dots (45)$$

は全体剛性行列、

$$F = \int_{\partial\Omega_t} N^T t dS + \int_{\Omega} N^T g dV \dots \dots \dots (46)$$

は全体荷重ベクトルと呼ばれる。

剛性行列(45)、荷重ベクトル(46)の積分は要素 Ω^e ごとに実行される。したがって

$$K = \int_{\Omega} B^T DB dV = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} (B^e)^T DB^e dV = \sum_{e=1}^M K^e \dots \dots \dots (47)$$

$$K^e = \int_{\Omega^e} (B^e)^T DB^e dV \dots \dots \dots (48)$$

$$\begin{aligned} F &= \int_{\partial\Omega_t} N^T t dS + \int_{\Omega} N^T g dV \\ &= \sum_{e=1}^{M'} \int_{\partial\Omega_t^e} (N^e)^T t dS + \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} (N^e)^T g dV \\ &= \sum_{e=1}^{M'} T^e + \sum_{e=1}^M G^e \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

$$T^e = \int_{\partial\Omega_t^e} (N^e)^T t dS \dots \dots \dots (50)$$

$$G^e = \int_{\Omega^e} (N^e)^T g dV \dots \dots \dots (51)$$

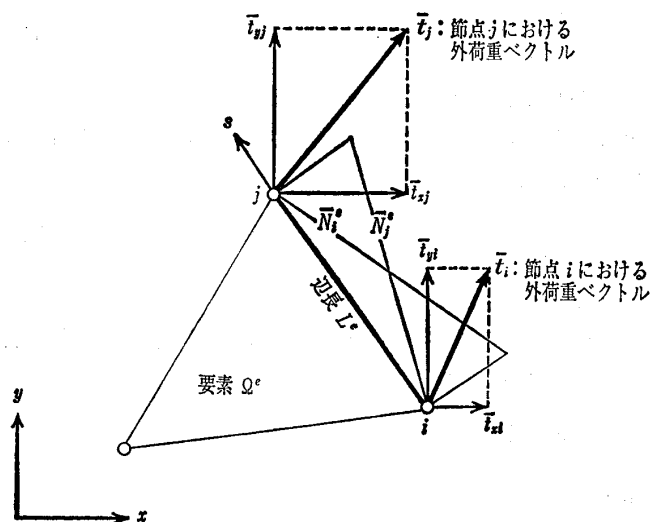
である。ここで、 M は要素数、 M' は荷重境界 $\partial\Omega_t$ 上にある要素の辺の数である。また、 K^e は要素剛性行列、 T^e は外荷重による要素荷重ベクトル、 G^e は自重による荷重ベクトルである。

定ひずみ三角形要素に対する要素剛性行列は、式(32)よりマトリックス B が定数であるため

$$K^e = (B^e)^T DB \Delta^e \dots \dots \dots (52)$$

となる。ここに Δ^e は三角形要素の面積である。この K^e は(6×6)の正方マトリックスである。全体剛性行列 K は、 $K_{\alpha\beta}^e(\alpha, \beta = 2 \cdot i - 1, 2 \cdot i, 2 \cdot j - 1, 2 \cdot j, 2 \cdot k - 1, 2 \cdot k)$ を該当する α 行 β 列に加え合わせることによって組み立てられる。

荷重ベクトルの算定 要素 Ω^e の節点 i, j 間に分布荷

図—4.2 荷重境界 $\partial\Omega_i$ の処理

重が作用している場合 (図—4.2) の荷重ベクトル T^e を求めよう。局所座標系は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

で表され、この辺上に制約された形状関数は式(3.121)と同じく

$$\bar{N}_i^e(s) = 1 - \frac{s}{L^e}, \quad \bar{N}_j^e = \frac{s}{L^e} \quad \dots\dots\dots (53)$$

と書かれる (図—3.13参照)。ただし、

$$L^e = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

は辺 $\bar{ij}$ の長さである。いま、節点 i および j に働く x 方向荷重の大きさをそれぞれ $\bar{t}_x^i$, $\bar{t}_x^j$ とするとこの分布荷重は

$$\bar{t}_x = (\bar{t}_x^j - \bar{t}_x^i) \frac{s}{L^e} + \bar{t}_x^i$$

で与えられる。同様に、 y 方向荷重は

$$\bar{t}_y = (\bar{t}_y^j - \bar{t}_y^i) \frac{s}{L^e} + \bar{t}_y^i$$

となる。また、式(50)の中の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^{L^e} \bar{N}_i^e(s) \bar{t}_x ds &= \int_0^{L^e} \left(1 - \frac{s}{L^e}\right) \left[(\bar{t}_x^j - \bar{t}_x^i) \frac{s}{L^e} + \bar{t}_x^i \right] ds \\ &= \frac{1}{6} L^e (2\bar{t}_x^i + \bar{t}_x^j) \end{aligned}$$

$$\int_0^{L^e} \bar{N}_j^e(s) \bar{t}_x ds = \frac{1}{6} L^e (\bar{t}_x^i + 2\bar{t}_x^j)$$

等と計算できるので、結局

$$T^e = \frac{L^e}{6} \begin{bmatrix} 2\bar{t}_x^i + \bar{t}_x^j \\ 2\bar{t}_y^i + \bar{t}_y^j \\ \bar{t}_x^i + 2\bar{t}_x^j \\ \bar{t}_y^i + 2\bar{t}_y^j \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (54)$$

を得る。

一方、自重による荷重ベクトルは、 γ_i が一定であるので簡単に計算できて

$$G^e = -\frac{1}{3} \gamma_i d^e [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \quad \dots\dots\dots (55)$$

となる。

集中荷重が作用している場合には当該節点にその荷重を加え込めばよいことは、浸透流計算におけるウェルポイントの扱いと同様である。

変位境界の取扱い いま、節点変位ベクトル U の内、 u_α (x -方向でも y -方向でもよい) が既知変位 $\bar{u}_\alpha$ であったとする。この時、全体剛性行列 K_{ij} の α -行、 α -列は取り去られて縮退され、荷重ベクトルは

$$F_i \rightarrow F_i - K_{i\alpha} \bar{u}_\alpha, \quad i=1, 2, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, 2 \cdot N$$

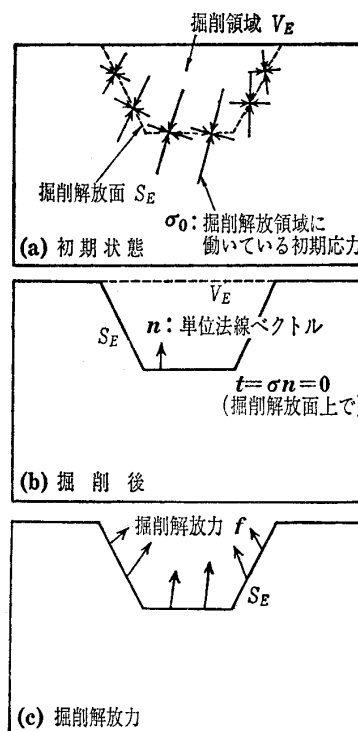
と修正される。ただし、固定境界の場合は全体剛性行列および荷重ベクトルを縮退するのみでよいことは、上式から明らかである。

こうして得られた連立一次方程式を解いて節点変位ベクトル U が求まる。この節点変位を用いて、各要素のひずみが式(3)から、さらに応力が式(9)から求められる。

4.1.3 二次元掘削問題の解析

斜面やトンネル、開削などの工事中において、従来は剛塑性釣合い論からその安定性が論じられてきた。しかしながら、今日では合理性、経済性、安全性の追求あるいは周辺環境への影響の防止などの観点から、安定性の検討だけではなく周辺地盤を含めた地盤構造物全体の变形挙動の把握が求められる場合が多い。このような問題に対応するため、ここでは二次元掘削問題の解析手法について述べる。

いま、図—4.3 に示すような掘削問題を考える。この場合の掘削とは、設定した位置に新たな自由表面 (掘削解放面 S_E と呼ぶ) を作ることであり、解析上、掘削解放面に掘削荷重 f (この算定については後述) を作用させて、この面に作用していた応力ベクトル $t = \sigma_0 n$ (σ_0 は初期応力、



図—4.3 掘削の概念

講 座

n は単位法線ベクトル) が、掘削後に 0 となるようにすることである。なお、 i 段目の掘削による応力の増加を $\Delta\sigma_i$ とすると、 n 段の掘削終了後の地盤の応力 σ_n は、次式により表される。

$$\sigma_n = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \quad (56)$$

掘削の問題を有限要素法によって解析するには、 σ_0 をどう設定するかということと、 $\Delta\sigma_i$ をどう求めるかについての2つの問題がある。

初期応力の設定 地盤の初期応力は、地盤の堆積作用や浸食による除荷あるいは造山運動などの地史的荷重履歴に依存して決定されている。造山帯、活断層などの周辺では、水平方向応力が鉛直方向のそれを上回っている事例も見られ、初期応力の設定に当たっては、地質学的にも十分な検討を行う必要がある。

地下発電所や石油地下備蓄などの岩盤内大空洞の施工では、その重要性にかんがみオーバーコアリングによる応力解放法や、AE (Acoustic Emission) 法により初期応力の推定が行われる。また、土質地盤においては K_0 圧密試験等により地盤の応力状態を推定することが出来る。

初期地圧の設定手法としては、このような測定に基づくもののほか、自重応力計算によるものがある。これは、掘削前の形状、地質条件を考慮した解析モデルを作成し、地盤の自重 γ_i を作用させて式(4)により初期応力の状態を計算するものである。このとき、当然ながら外荷重ベクトル $\bar{f}$ は作用していない。この解析においては、地盤構成材料の単位体積重量、変形係数、ポアソン比が入力物性値として用いられる。ただし、初期応力の算定に用いられるポアソン比は鉛直応力と水平応力の比＝側圧係数 K に対応するものであり、この後の解析に用いられる値とは必ずしも一致する必要はない。岩盤等の初期応力を求めるための解析においては、ポアソン比は 0.5 に近い値が用いられる。また、水平な弾性地盤の側圧係数は、ポアソン比 ν を用いて

$$K = \frac{\nu}{1-\nu}$$

と表されるが、沖積地盤や埋立地盤では $K_0 = 0.5$ となるようにポアソン比を定めて解析に導入されることが多い。また、変形係数についても、重要なのは地盤構成材料間の大小関係であり、数値そのものに固執することはない。もち論、初期応力の設定時に算出された変位は、掘削による変形とは無関係であり、掘削による地盤の変形解析に入る前にゼロクリアされねばならない。

掘削解放力の算定 図-4.3(b)において、いま、表面には外力は作用していないとし、掘削領域 V_E と掘削解放面 S_E を考えると、仮想仕事の原理(9)により S_E 上での応力ベクトル t_0 は、掘削領域中の応力 σ_0 と物体力 $g = [0, -\gamma_i]^T$ により

$$\int_{S_E} \delta u^T t_0 dS = \int_{V_E} (\delta \epsilon^T \sigma_0 - \delta u^T g) dV \quad (57)$$

と書かれる。掘削後に掘削解放面上で応力ベクトルがゼロとなるためには、この t_0 と逆向きの力を加えてやればよいので、掘削解放力 f は

$$\int_{S_E} \delta u^T f dS = \int_{V_E} (\delta u^T g - \delta \epsilon^T \sigma_0) dV \quad (58)$$

である。

有限要素離散化(5), (8)を導入すると、掘削力に等価な節点荷重ベクトルは結局

$$F_E = \int_{V_E} (N^T g - B^T \sigma_0) dV \quad (59)$$

となり、掘削解放力は掘削要素の応力 σ_0 と、物体力 g により表されることが分かる。式(59)の解放力は掘削解放面 S_E に関与するすべての要素について重ね合わせて求められることは言うまでもない。

4.1.4 アイソパラメトリック要素

浸透問題で取り扱ったと同様に、アイソパラメトリック要素を導入すると局所座標系 ξ, η ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$) を用いて、各要素中の変位が

$$\left. \begin{aligned} u \approx u_h &= \sum_{a=1}^n u_a N_a^e(\xi, \eta) \\ v \approx v_h &= \sum_{a=1}^n v_a N_a^e(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

と近似されると同時に、全体座標 x, y も

$$x = \sum_{a=1}^n x_a N_a^e(\xi, \eta), \quad y = \sum_{a=1}^n y_a N_a^e(\xi, \eta) \quad (61)$$

と座標変換される。ここで、 n は要素の節点数、 u_a, v_a は節点変位のベクトル、 x_a, y_a は各節点の座標値である。また、形状関数 $N_a^e(\xi, \eta)$ は、図-3.15(a)の4節点要素に対しては式(3.131)で示したように

$$\left. \begin{aligned} N_1^e(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ N_2^e(\xi, \eta) &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ N_3^e(\xi, \eta) &= (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ N_4^e(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

と書ける。9節点の形状関数については式(3.132)を参照されたい。

全体座標系 (x, y) と局所座標系 (ξ, η) の微分は

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (63)$$

と結びつけられ、この

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (64)$$

はヤコビアンマトリックスと呼ばれること、この逆は

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (65)$$

と書かれること、ヤコビアン（行列式）が

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \dots\dots\dots (66)$$

となることは2.2節で述べたとおりである。

また、アイソパラメトリック変換(6)を用いると、ヤコビアンマトリックス(64)は

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67)$$

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \xi}, \quad J_{12} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \eta}$$

$$J_{21} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \xi}, \quad J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \eta}$$

となり（ n は要素 Ω^e の節点数），この $\partial N_{\alpha}^e / \partial \xi$ ， $\partial N_{\alpha}^e / \partial \eta$ は例えば4節点要素(62)に対しては

$$\left. \begin{aligned} \partial N_1^e / \partial \xi &= -(1-\eta)/4, & \partial N_1^e / \partial \eta &= -(1-\xi)/4 \\ \partial N_2^e / \partial \xi &= (1-\eta)/4, & \partial N_2^e / \partial \eta &= -(1+\xi)/4 \\ \partial N_3^e / \partial \xi &= (1+\eta)/4, & \partial N_3^e / \partial \eta &= (1+\xi)/4 \\ \partial N_4^e / \partial \xi &= -(1+\eta)/4, & \partial N_4^e / \partial \eta &= (1-\xi)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

と計算される。9節点要素の微分は式(3.141)である。また、 $\mathbf{J}$ の逆は

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (69) \end{aligned}$$

と計算される。

式(3)で示した要素の節点変位ひずみマトリックス $\mathbf{B}^e$ は、 n 個の節点を有するアイソパラメトリックスに対しては

$$\mathbf{B}^e = [\mathbf{B}_1^e \quad \mathbf{B}_2^e \dots \mathbf{B}_{\alpha}^e \dots \mathbf{B}_n^e] \dots\dots\dots (70)$$

$$\mathbf{B}_{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} & \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (71)$$

と書けるが、各微分は式(69)の成分を用いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \eta} \\ &= J_{11}^{-1} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \xi} + J_{21}^{-1} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \eta} \\ &= J_{12}^{-1} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_{\alpha}^e}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (72)$$

となる。こうして、各要素のひずみが

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \dots\dots\dots (73)$$

と計算される。ここで、

$$\mathbf{U}^e = [u_1 \quad v_1 \dots u_{\alpha} \quad v_{\alpha} \dots u_n \quad v_n]^T \dots\dots\dots (74)$$

は要素の節点変位ベクトルであることは言うまでもない。

これらの近似を用いると要素剛性行列(48)は

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^e(\xi, \eta))^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e(\xi, \eta) J d\xi d\eta \dots\dots\dots (75)$$

と計算される。

また、要素の荷重ベクトル(50, 51)はつぎのように計算される。まず、外荷重分布($\bar{t}_x$, $\bar{t}_y$)が与えられている場合の要素荷重ベクトル $\mathbf{T}^e$ を計算するために、図-3.16と同様、節点1, 2, ..., p より形成される荷重境界 $\partial\Omega^e$ に局所座標系 s を導入すると

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots\dots\dots (76)$$

である。この境界上に制限された形状関数は、 $p=2$ に対しては

$$\bar{N}_1^e(\xi) = (1-\xi)/2, \quad \bar{N}_2^e(\xi) = (1+\xi)/2 \dots\dots\dots (77)$$

$p=3$ に対しては

$$\begin{aligned} \bar{N}_1^e(\xi) &= -\xi(1-\xi)/2, & \bar{N}_2^e(\xi) &= 1-\xi^2, \\ \bar{N}_3^e(\xi) &= \xi(1+\xi)/2 \end{aligned} \dots\dots\dots (3.152) \text{ 再掲}$$

である。ベクトル $\mathbf{T}^e$ を

$$\mathbf{T}^e = [T_{x1}^e \quad T_{y1}^e \dots T_{x\alpha}^e \quad T_{y\alpha}^e \dots T_{xp}^e \quad T_{yp}^e]^T \dots\dots\dots (78)$$

と書くと、 α 節点に対応する項は以上より

$$T_{x\alpha}^e = \int_{-1}^1 \bar{t}_x \bar{N}_{\alpha}^e(\xi) \frac{ds}{d\xi} d\xi, \quad T_{y\alpha}^e = \int_{-1}^1 \bar{t}_y \bar{N}_{\alpha}^e(\xi) \frac{ds}{d\xi} d\xi \dots\dots\dots (79)$$

と計算される。ただし、式(76)より

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\xi} &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\left(\sum_{\alpha=1}^p x_{\alpha} \frac{\partial \bar{N}_{\alpha}^e}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^p y_{\alpha} \frac{\partial \bar{N}_{\alpha}^e}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (80) \end{aligned}$$

と求められる。また、分布荷重($\bar{t}_x$, $\bar{t}_y$)は通常各要素の節点の値として

$$\begin{aligned} \bar{t}_{x1}^e, \bar{t}_{x2}^e, \dots, \bar{t}_{xp}^e \\ \bar{t}_{y1}^e, \bar{t}_{y2}^e, \dots, \bar{t}_{yp}^e \end{aligned}$$

と与えられるので、その分布は ξ の関数として

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_x(\xi) &= \sum_{\alpha=1}^p \bar{t}_{x\alpha}^e \bar{N}_{\alpha}^e(\xi) \\ \bar{t}_y(\xi) &= \sum_{\alpha=1}^p \bar{t}_{y\alpha}^e \bar{N}_{\alpha}^e(\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

講 座

と計算される。

自重 γ_t による荷重ベクトル G^e は明らかに

$$G^e = [0g_1 \ 0g_2 \cdots 0g_n \cdots 0g_n]^T \cdots \cdots \cdots (82)$$

と求まる。ここで

$$g_\alpha = -\gamma_t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_\alpha^e(\xi, \eta) J d\xi d\eta \cdots \cdots \cdots (83)$$

である。

式(7), (79), (83)中の積分は Gauss の数値積分によって求められることは言うまでもない。

4.1.5 三角形要素

解析領域が不規則な場合、多節点の三角形要素 (図-3.18参照) を用いなければならないことも多い。ここでは、この三角形要素を応力問題に適用することを考える。

面積座標 (図-3.19) は式 (3.157) と同じく

$$L_1 = A_1/A, \quad L_2 = A_2/A, \quad L_3 = A_3/A \cdots \cdots \cdots (84)$$

と定義される。ただし

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \cdots \cdots \cdots (85)$$

であり、面積座標 (L_1, L_2, L_3) と全体座標 (x, y) との関係は

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha L_\alpha \\ y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 = \sum_{\alpha=1}^3 y_\alpha L_\alpha \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (86)$$

で与えられる。

変位 (u, v) はこの面積座標を用いて

$$\left. \begin{aligned} u &\simeq u_h = \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha N_\alpha^e(L_1, L_2, L_3) \\ v &\simeq v_h = \sum_{\alpha=1}^n v_\alpha N_\alpha^e(L_1, L_2, L_3) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (87)$$

と近似される。ここで、 n は要素の節点数である。形状関数 N_α^e は、3 節点要素に対しては

$$N_1^e = L_1, \quad N_2^e = L_2, \quad N_3^e = L_3 \cdots \cdots \cdots (88)$$

で与えられる (6 節点要素は式(3.164)参照)。

式(88)および(87)よりヤコビアンマトリックスおよびその逆行列、ヤコビアンは

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial x}{\partial L_2} \\ \frac{\partial y}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (89)$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (90)$$

$$J = \det J = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$$

$$-(x_2 - x_3)(y_1 - y_3) = 2A \cdots \cdots \cdots (91)$$

と計算される。また、 L_3 に関する微分は式(88)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial x} &= -\frac{\partial L_1}{\partial x} - \frac{\partial L_2}{\partial x} = -(J_{11}^{-1} + J_{21}^{-1}) \\ \frac{\partial L_3}{\partial y} &= -\frac{\partial L_1}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial y} = -(J_{12}^{-1} + J_{22}^{-1}) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (92)$$

となる。

n 節点三角形要素の節点変位 ひずみマトリックス B^e はアイソパラメトリック要素と同様 (式(70), (71))

となるが、各項は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} &= \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_3} \\ &= J_{11}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_1} + J_{21}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_2} - (J_{11}^{-1} + J_{21}^{-1}) \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_3} \\ \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} &= \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_3} \\ &= J_{12}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_1} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_2} - (J_{12}^{-1} + J_{22}^{-1}) \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial L_3} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (93)$$

と計算される。ここで、形状関数の微分は、3 節点要素(88)に対しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1^e}{\partial L_1} &= \frac{\partial N_2^e}{\partial L_2} = \frac{\partial N_3^e}{\partial L_3} = 1, \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial L_2} &= \frac{\partial N_1^e}{\partial L_3} = \frac{\partial N_2^e}{\partial L_1} = \frac{\partial N_2^e}{\partial L_3} = \frac{\partial N_3^e}{\partial L_1} = \frac{\partial N_3^e}{\partial L_2} = 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (94)$$

と与えられる (6 節点要素は式(3.173)である)。また、

$$dV = dx dy = J dL_1 dL_2 \cdots \cdots \cdots (95)$$

である。

要素剛性行列(48)はこれらより

$$K^e = \int_{\Omega^e} (B^e(L_1, L_2, L_3))^T D B^e(L_1, L_2, L_3) J dL_1 dL_2 \cdots \cdots \cdots (96)$$

と求められる。これに 3.2.4 項の数値積分 (3.177) を適用して

$$K^e \simeq J \sum_{i=1}^m \omega_i (B^e(L_1^i, L_2^i, L_3^i))^T D B^e(L_1^i, L_2^i, L_3^i) \cdots \cdots \cdots (97)$$

である。ここで m は積分点の数である。

外荷重による要素荷重ベクトル T^e の求め方は、アイソパラメトリック要素と全く同じである。また自重 γ_t による要素荷重ベクトル G^e は式(82)で定義され

$$\begin{aligned} g_\alpha &= -\gamma_t \int_{\Omega^e} N_\alpha^e(L_1, L_2, L_3) J dL_1 dL_2 \\ &\simeq -J \gamma_t \sum_{i=1}^m \omega_i N_\alpha^e(L_1^i, L_2^i, L_3^i) \cdots \cdots \cdots (98) \end{aligned}$$

と計算されよう。