

砂の粒度分布の表現法とその比較

The Expression and the Comparison of the Grain Size Distribution of Sand

いた 板 ばし 橋 かず 一 お 雄* た 田 ぐち 口 やす 泰 とし 敏*** いし 石 てつ 哲 ろう 郎**

1. ま え が き

土の力学的特性に対して、構成粒子自体の基本的性質（粒子の形状、粒度組成など）と構成粒子の集合状態（密度、含水比、構造など）が大きく影響することが指摘され¹⁾、種々の研究が進められている。例えば、砂の構成則の研究では、構造異方性や粒子接点数などが考慮されている²⁾が、これらには個々の粒子の形状や粒度組成が関係してくると思われる。しかし、この粒子自体の基本的性質を土質工学的に直接評価しようとした研究はあまり多くはない。

この報告は土粒子の基本的性質である粒度組成の表現法に関する研究である。Terzaghi（テルツァーギ）と Peck（ペック）の本³⁾には、「粒度分布を統計学を用いて表現する試みがあるが、工学的な目的で土質力学に応用するには精密すぎて関心しない」と記されている。しかし、土の構成則などに関して詳細な議論がなされている今日の土質力学にもこの言葉が当てはまるであろうか？ また、現在使用されている有効径や均等係数、曲率係数がその粒度分布を適切に表現しているであろうか？ こうした疑問が本研究の発端である。

そこで始めに、各種の粒度分布の表現法を簡単にまとめ、式の上で各表現法の比較を行う。そして次に、木曾川流域の9地点から採取した川砂と豊浦標準砂の粒度試験結果を用いて、各種表現法における代表値の比較・検討を行う。

2. 粒度分布の表現法

粒度分布の表現法には土質工学で用いられている方法のほかに、堆積学での表現^{4),5)}、数学的なモーメントによる表現、分布関数による表現がある。そこで、これらについてまとめるとともに、式の上での比較を行い、均等係数や曲率係数の意味合いについて示す。

2.1 土質工学的表現

土質工学会の規準では、ふるい分け試験と沈降分析によって粒度分布が示される。ふるい間隔を細かくとれば、その結果は図-1(a)に示す頻度分布によって描くことがで

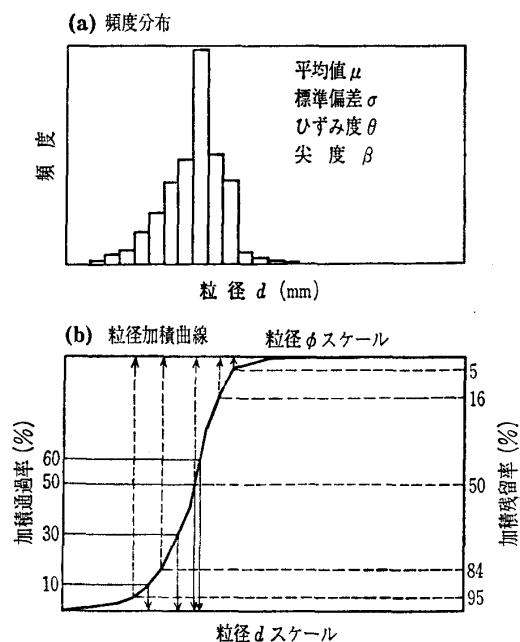


図-1 粒度分布の表現法

きる。この図は JIS 規格ふるいすべてを用いた場合の模式図であるから、対数目盛り上で均等の幅のヒストグラムが描かれるが、学会の規準では対数目盛り上でさえも不等間隔のふるいが用いられているために、各ヒストグラムの幅が異なり、頻度分布の意味合いが曖昧なものとなる。そこで、粒径の小さい方から累積した形の粒径加積曲線（図-1(b)）で示されている。

この粒径加積曲線の代表値として、図-1(b)に示すように、加積通過率が10, 30, 50, 60%に対応する粒径 d_{10} , d_{30} , d_{50} , d_{60} が取り上げられ、有効径 d_{10} 、中央粒径 d_{50} 、均等係数 U_c 、曲率係数 U_c' の四つの数値で表されるのが一般的である。

ここに、

$$\text{均等係数} \quad U_c = \frac{d_{60}}{d_{10}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{曲率係数} \quad U_c' = \frac{d_{30}^2}{d_{10} \times d_{60}} \dots \dots \dots (2)$$

である。

2.2 堆積学的表現

堆積学の分野では、堆積機構や堆積環境の推定のために、堆積物の諸特性が調査されている⁴⁾⁻⁶⁾。この諸特性の一つ

*名城大学講師 理工学部土木工学科

**名城大学教授 理工学部土木工学科

***名城大学大学院生 理工学部土木工学科

表-1 堆積学での粒度分布の表現式

	Inman の提案	Folk & Ward の提案
平均粒径	$M_\phi = \frac{1}{2}(\phi_{84} + \phi_{16})$	$M_\phi = \frac{1}{3}(\phi_{84} + \phi_{50} + \phi_{16})$
分級係数	$\sigma_\phi = \frac{1}{2}(\phi_{84} - \phi_{16})$	$\sigma_\phi = \frac{1}{4}(\phi_{84} - \phi_{16}) + \frac{1}{6.6}(\phi_{95} - \phi_5)$
ひずみ度	$S_k = \frac{\phi_{84} + \phi_{16} - 2\phi_{50}}{\phi_{84} - \phi_{16}}$	$S_k' = \frac{1}{2}\left(S_k + \frac{\phi_{95} + \phi_5 - 2\phi_{50}}{\phi_{95} - \phi_5}\right)$
尖度	$\beta_\phi = \left\{ \frac{1}{2}(\phi_{16} - \phi_5) + \frac{1}{2}(\phi_{95} - \phi_{84}) \right\} / \sigma_\phi$	図的尖度を提案している

に粒度分布特性が挙げられている。この分野でも、粒径加積曲線で表現されるが、その際のふり目の開きは式(3)で示される ϕ スケールで表されている (図-1(b))。

$$\phi = -\log_2 d \quad \text{.....(3)}$$

ここに、 d はミリメートル単位で表した土粒子の粒径である。また、粒度分布は平均粒径 M_ϕ 、分級係数 σ_ϕ 、ひずみ度 S_k 、尖度 β_ϕ で表現される。これらの係数の表示式については種々のものが提案されているが、代表的な Inman (インマン) の提案式と Folk と Ward (フォークとワード) の提案式を表-1 にまとめて示した。

なお、表-1 中の ϕ_i の添字 i は図-1(b) に示すように、加積残留率が $i\%$ であることを示し、 ϕ_i はそれに対応する粒径を ϕ スケールで表したものである。この表から明らかなように、この分野では粒径加積曲線を加積残留率が 5, 16, 50, 84, 95% の点に対応する粒径 ϕ_5 , ϕ_{16} , ϕ_{50} , ϕ_{84} , ϕ_{95} で代表したことになる。土質工学の場合とは異なり、加積残留率が対称となる点の粒径を用い、すべてのパラメーターを評価していることは興味深い。

2.3 数学的モーメントによる表現

粒度試験では、個々の土粒子の直径を直接計るわけではないので、図-1(a) の各ヒストグラムの中の中央の粒径をその柱の代表粒径とすれば、種々の分布特性値が計算できる。

$$\text{平均値 } \mu = \sum d_i \times p(d_i) \quad \text{.....(4)}$$

$$\text{分散 } \sigma^2 = \sum (d_i - \mu)^2 \times p(d_i) \quad \text{.....(5)}$$

ここに、 d_i は各ヒストグラムの代表粒径、 $p(d_i)$ は各ヒストグラムの確率関数である。また、平均値まわりの高次のモーメントも次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_3 &= \sum (d_i - \mu)^3 \times p(d_i) \\ \mu_4 &= \sum (d_i - \mu)^4 \times p(d_i) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(6)}$$

そして、三次と四次のモーメントより、ひずみ度 θ と尖度 β は次式で計算される。

$$\text{ひずみ度 } \theta = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{.....(7)}$$

$$\text{尖度 } \beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad \text{.....(8)}$$

一般に、上述の平均値、分散 (標準偏差)、ひずみ度、尖度が分布特性値として用いられている。ここに、分散は粒径のばらつきの程度、ひずみ度は分布形の非対称性の程

度、尖度は分布形の裾の長さの程度を表す係数である。

2.4 分布関数による表現

前節の幾つかの分布特性値で表現するのではなく、分布形で表す研究は古くから行われており、対数正規分布^{7)~9)} やパスカル分布^{10)~11)} がよく適合するという報告がある。

粒径 d に関する対数正規分布は次式で表

せる。

$$f(d) = \frac{1}{\xi d \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln d - \lambda}{\xi} \right)^2 \right\} \quad \text{.....(9)}$$

ここに、 λ と ξ は粒径の対数値に関する平均値と標準偏差であり、この二つのパラメーターが粒度の頻度分布を決めることになる。

また、パスカル分布については福本が提案しているが、 n 番目のふり目の加積通過率 p_n は次式で表される。

$$p_n = 1 - \sum_{i=1}^n \binom{i+m-2}{i-1} (1-r)^m r^{i-1} \quad \text{.....(10)}$$

ここに、 r は隣接するふり目に留まる残留率の比 (一定と仮定)、 m は地質学的な経過年数である。この r と m が粒径加積曲線の形状を決めることになる。

こうした分布形をあてはめ、データを縮約するとその取扱いが比較的容易になるが、そのためには分布形の適合度検定が必要になる。

2.5 表現法の比較

前述したように、土質工学の分野と堆積学の分野では用いているスケールが異なるので、堆積学でのパラメーターを土質工学の d スケールで表示してみよう。加積残留率 ($i\%$) と加積通過率 ($100-i\%$) の違いがあるので、次式による変換が必要になる。

$$\phi_i = -\log_2(d_{100-i}) \quad \text{.....(11)}$$

表-1 の Inman の平均粒径 M_ϕ は

$$M_\phi = -\frac{1}{2 \log 2} \log(d_{16} \times d_{84}) \quad \text{.....(12)}$$

となる。

また、Inman の分級係数 σ_ϕ は

$$\sigma_\phi = \frac{1}{2 \log 2} \log \left(\frac{d_{84}}{d_{16}} \right) \quad \text{.....(13)}$$

となる。式(13)の右辺の括弧内の粒径の比は代表粒径こそ異なるが、均等係数の形をしており、分級係数が均等係数の対数に比例することをうかがわせる。

同様に、Inman のひずみ度 S_k は

$$S_k \times \log \left(\frac{d_{84}}{d_{16}} \right) = \log \left(\frac{d_{50}^2}{d_{16} \times d_{84}} \right) \quad \text{.....(14)}$$

となる。式(14)の右辺の括弧内は代表粒径こそ異なるが、曲率係数の形に、左辺の括弧内は均等係数の形となっており、ひずみ度は曲率係数の対数と均等係数の対数の比に比例す

ることが想像される。

3. 砂の粒度分析結果

上述した各種の表現法を実際のデータで比較するために、木曾川流域の9地点から採取した川砂と豊浦標準砂の粒度試験を多数回実施した。木曾川から採取した試料 No. 1～9の粒度加積曲線を示したものが図-2である。その際には、学会規準のふるい間隔ではなく、JIS規格ふるいすべてを用いている。そして、各種パラメーター相互の比較を図上で行う。ただし、堆積学での表現はFolkとWardのパラメーターがInmanの値にほぼ対応していることを

確認したので、ここではInmanの場合のみを取り上げることにする。

3.1 平均粒径に関する比較

図-3(a)～(c)に中央粒径 d_{50} 、平均粒径 M_ϕ 、平均値 μ の関係を示した。図(a)には式(12)に対応する次式も併記してある。

$$M_\phi = -\frac{1}{2 \log 2} \log(d_{50}^2) \dots \dots \dots (15)$$

実測値は式(15)のわずかに上側にプロットされるものが多いが、平均粒径 M_ϕ が d_{16} と d_{84} から計算されていること

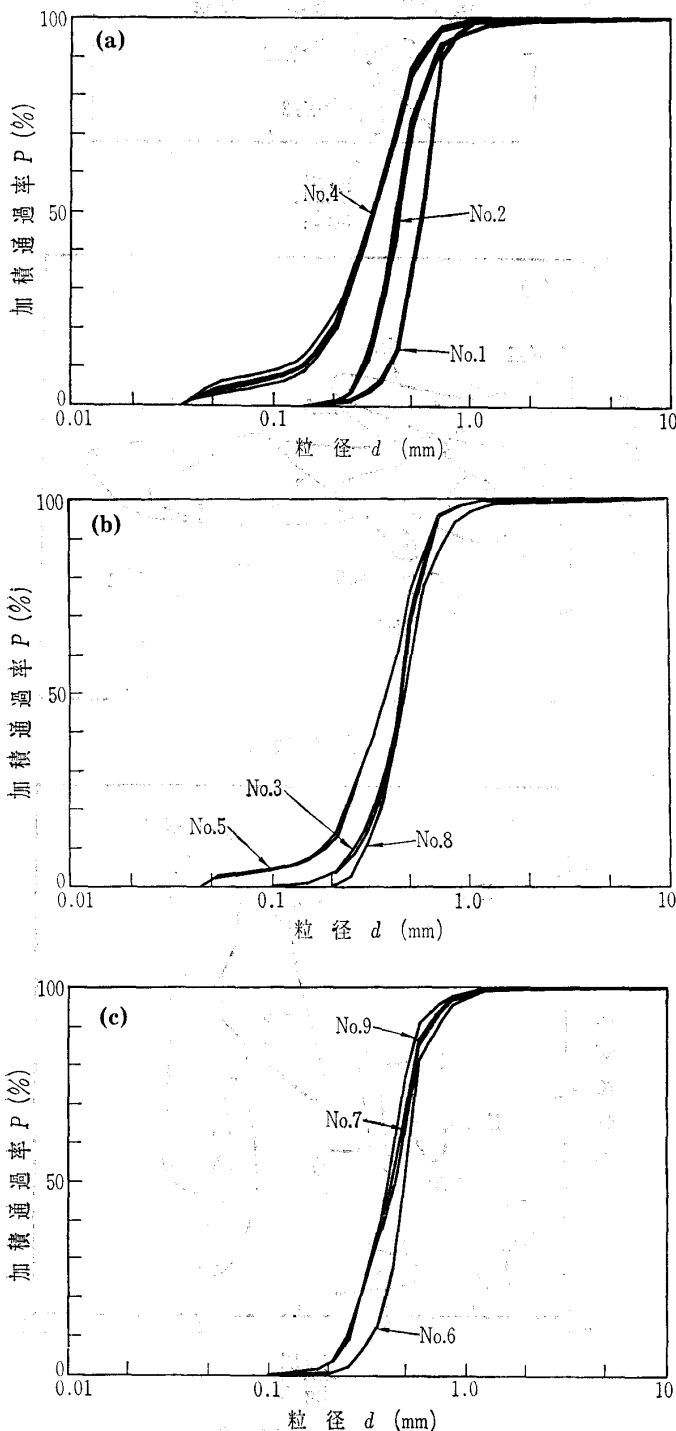


図-2 木曾川砂の粒度加積曲線

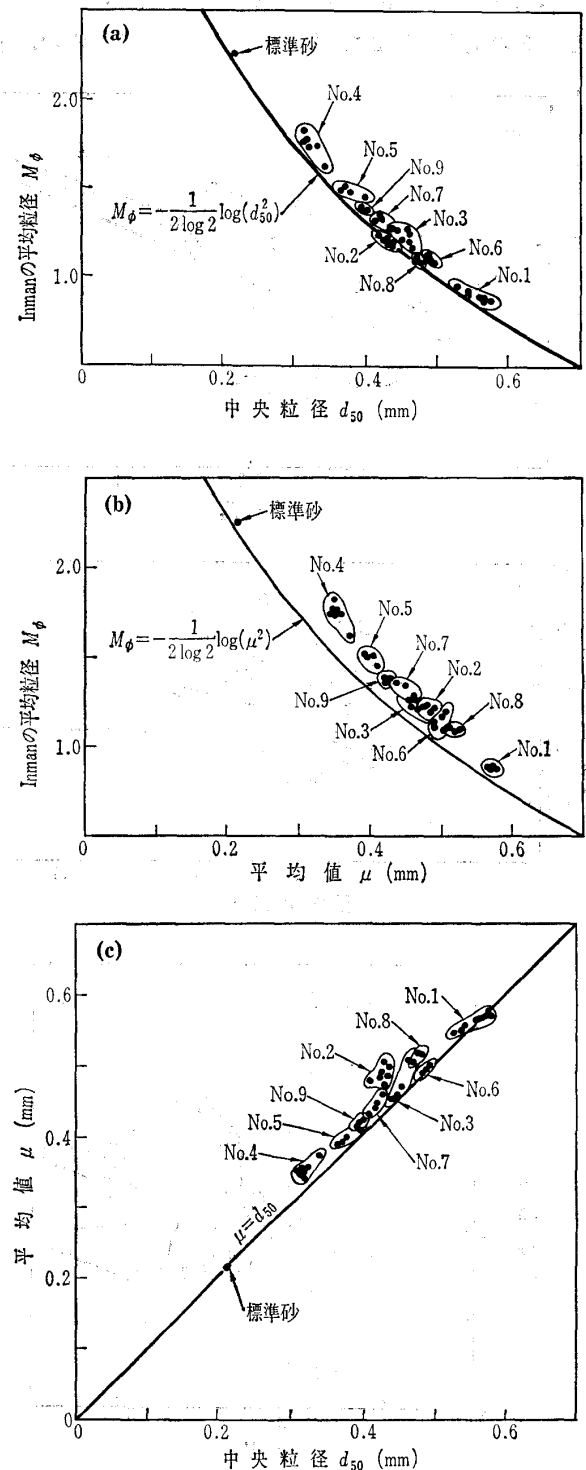


図-3 中央粒径 d_{50} 、平均粒径 M_ϕ 、平均値 μ の関係

No. 1901

を考えると、 M_ϕ は d_{50} と良い相関性が認められると言ってよい。しかし、図(b)に示した数学的な平均値 μ との関係では標準砂を除いて、すべての試料が関係式の上方に位置し、式(4)に対応する式(6)を用いて、Inman の M_ϕ から平均値 μ を推定すると、0.05 mm 程度の過小評価を生ずることになる。

$$M_\phi = -\frac{1}{2 \log 2} \log(\mu^2) \dots\dots\dots (16)$$

図(c)に示した平均値 μ と中央粒径 d_{50} の関係でも、標準砂と一部の川砂を除いて、中央粒径 d_{50} よりも平均値 μ の方が 0.03~0.05 mm 程度大きくなっている。

図-3の全体を通じて傾向的な相違はあるものの、中央

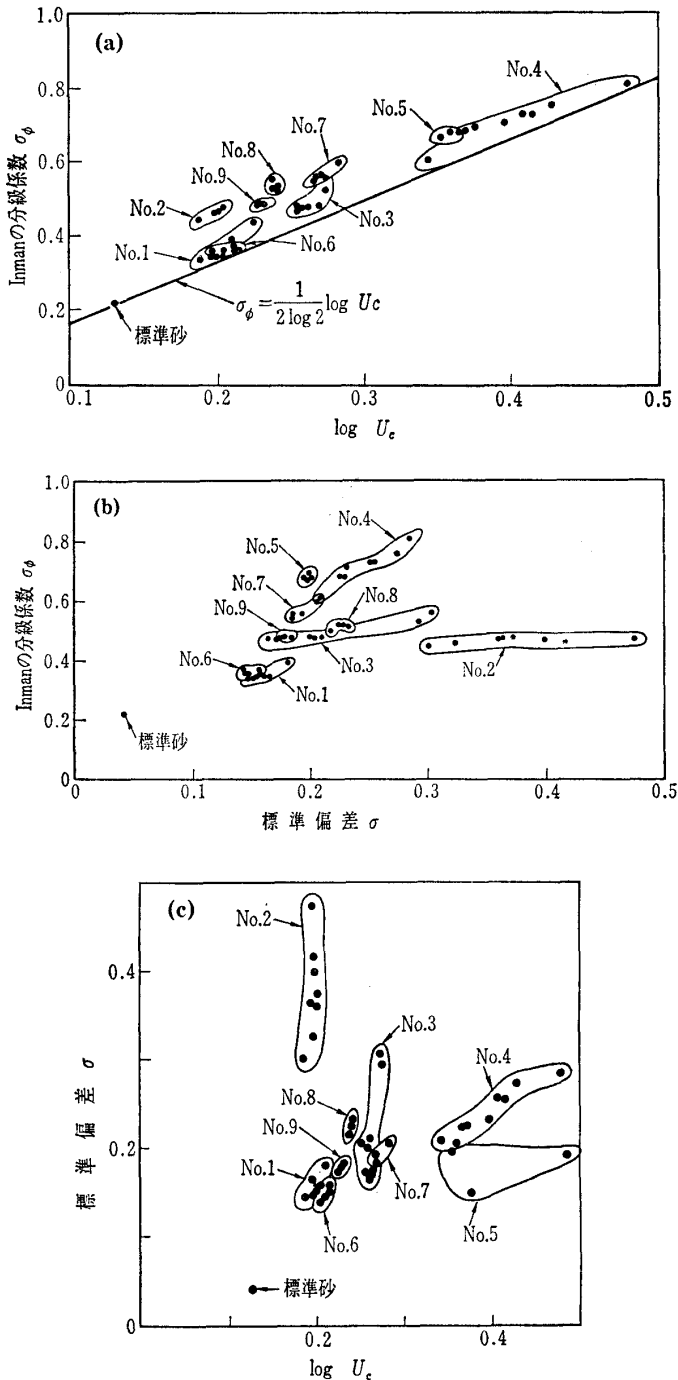


図-4 分級係数 σ_ϕ 、均等係数 U_c と標準偏差 σ の関係

粒径 d_{50} 、平均粒径 M_ϕ 、平均値 μ の対応関係は非常によく、平均粒径についてはどの表現法を用いても大差のないことが分かる。

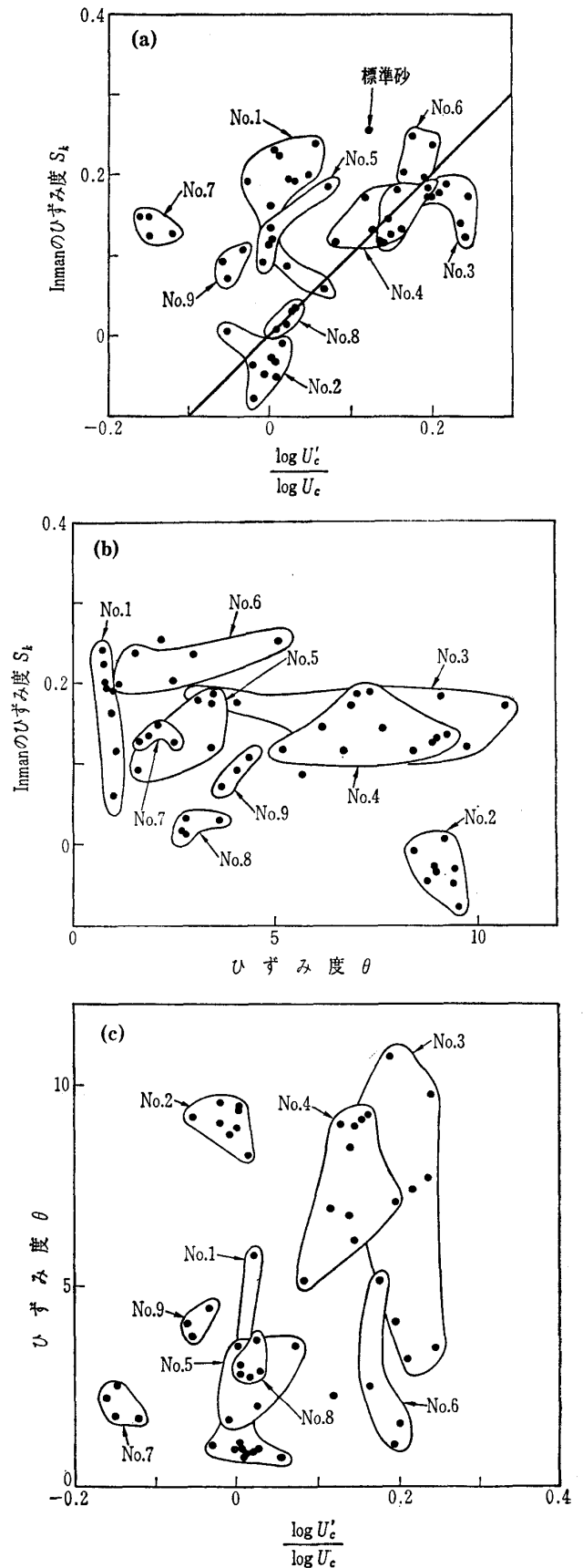


図-5 ひずみ度 S_k 、 θ と曲率係数、均等係数の関係

3.2 分級係数に関する比較

図—4(a)~(c)に Inman の分級係数 σ_ϕ , 均等係数 U_c (対数) と標準偏差 σ の関係を示した。図(a)には式(13)に対応する次式も併記してある。

$$\sigma_\phi = \frac{1}{2 \log 2} \log \left(\frac{d_{60}}{d_{10}} \right) \dots \dots \dots (17)$$

実測値は式(17)の直線の上側にほぼ平行に分布しているが、これは分級係数 σ_ϕ と均等係数 U_c の代表粒径が異なるためである。また、両者の相関関係は非常によく、分級係数と均等係数には式(17)に近い関係が成立すると考えてよさそうである。すなわち、土質工学で用いられている均等係数は d_{10} と d_{60} で算定されるが、堆積学における分級の程度を示す非常に優れたパラメーターであると言える。

しかし、図(b)や(c)に見られるように、数学的な標準偏差 σ との関係では、Inman の分級係数 σ_ϕ , 均等係数 U_c (対数) の両者ともすべての試料で一意的な関係は成立せず、各試料ごとに特異な関係を示していることは興味深い。例えば、図(b)の試料 No. 1 や No. 4 では正の相関性が認められるが、試料 No. 2 や No. 3 では標準偏差 σ の変化に対して分級係数 σ_ϕ の変化が少なく、正の相関関係はあまり認められない。また、試料 No. 5 や No. 6 ではほぼ同じ位置にすべてのデータがプロットされている。

同様の傾向が図(c)でも見られるが、この原因は分級係数 σ_ϕ が2点の粒径 d_{10} , d_{60} のみで評価される一方、標準偏差 σ は粒度の分布形全体を代表するパラメーターであるため、その2点以外の分布性状が影響してくるためであろう。特に、標準偏差は平均値回りの二次のモーメントであるから、分布の裾の影響が大きく現れたのであろう。

3.3 ひずみ度と尖度に関する比較

ひずみ度については、図—5(a)~(c)に、Inman のひずみ度 S_k , 数学的ひずみ度 θ , 曲率係数と均等係数の対数の比の関係を示した。また、尖度については図—6に Inman の尖度 β_ϕ と数学的尖度 β の関係を示した。

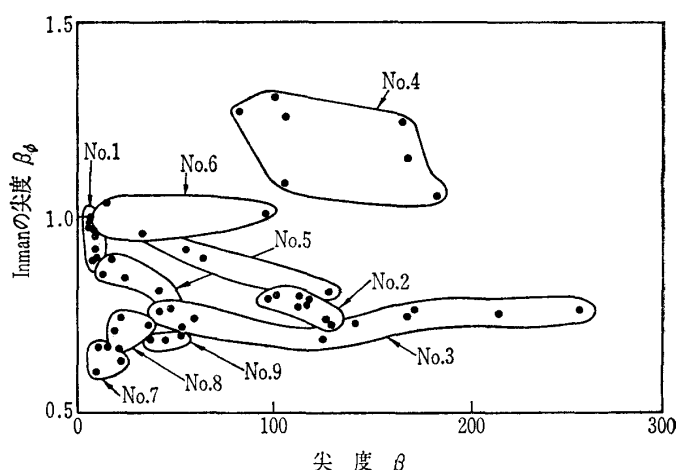
式(14)から、曲率係数の対数と均等係数の対数の比が Inman のひずみ度に対応していることが予想されるので、図—5(a)には次式も記入してある。

$$S_k = \frac{\log U_c'}{\log U_c} \dots \dots \dots (18)$$

この図より、同一試料であれば、ほぼ同じ位置にデータが集中し、試料 No. 2, 3, 4, 6, 8 の各データはばらついてはいるが、式(18)の直線の周囲に位置し、前述の傾向をうかがわせる。しかし、試料 No. 1, 5, 7, 9 と標準砂では式(18)よりかなり離れた位置にデータがかたまり、この関係が認められない。

図(b)や(c)に示した数学的ひずみ度 θ との関係では、各試料が特異な関係を示し、図(a)のような相関関係すら認められない。

図—6の数学的尖度 β の関係も同様で、一意的な関係は



図—6 尖度 β_ϕ と β の関係

認められない。この原因は前節でも述べたようにひずみ度や尖度が高次のモーメントであるために、粒度の分布形のわずかの違いがそれらの係数に大きく影響するためであろう。

4. あとがき

この報告では、土質工学の分野で用いられている均等係数や曲率係数の意味を考えるために、堆積学的な表現法や数学的なモーメントによる表現法との比較を表示式ならびに砂の粒度試験結果に基づき行った。

得られた結論を要約すると次のようになる。

- (1) 中央粒径 d_{50} は、代表粒径が異なるものの、堆積学での平均粒径 M_ϕ にほぼ対応していた。また数学的な平均値 μ ととも良い相関性を示していた。
- (2) 均等係数の対数は堆積学における分級係数に対応しており、両者には直線関係が認められた。しかし、数学的な二次モーメント（標準偏差）との関係は一意的な関係を示さず、各試料により特異な関係が認められた。
- (3) 曲率係数の対数と均等係数の対数の比は堆積学でのひずみ度に対応していることが式の上で確認された。しかしながら実測値の比較では、ひずみ度が高次のモーメントであるためか、大きなばらつきが見られ、一部の試料では相関性が認められたが、傾向的な相関性さえも認められない試料もあった。
- (4) より高次のモーメントである尖度に関しては、相関性は全く認められなかった。

上述のように、均等係数と曲率係数でも粒度分布をある程度適切に評価できることが分かった。しかし、一意的な関係を示さない場合もあった。また、他の土質材料に対して、この報告で示した関係が成立するかが問題として残されている。

さらに、粒度分布の評価のみならず、砂粒子の形状の測

No. 1901

定と評価, 原位置での密度や堆積構造の評価なども考慮し, それらが砂地盤の力学的諸特性とどのような関係を示すかが今後の研究課題である。

最後に, 試料採取に当たっては, 建設省中部地方建設局木曾川上流ならびに下流工事事務所の方々にお世話になった。また, 実験では本学4年の大竹和茂君, 市橋浩之君の協力を得た。記して, 謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 三笠正人: 土の工学的性質の分類表とその意義, 土と基礎, Vol.12, No.4, pp.17~24, 1964.
- 2) 小田匡寛: 講座「粒状体力学の現状と応用」3. 粒状体の基本的性質とその工学的意義, 土と基礎, Vol.26, No.3, pp.63~70, 1978.
- 3) Terzaghi, K. and R. Peck: 土質力学 (星 塾 和ほか共訳),

丸善, 1969.

- 4) 庄司力偉: 堆積学, 朝倉書店, pp.171~259, 1971.
- 5) 高山茂美: 河川地形学, 共立出版, pp.160~175, 1974.
- 6) 上杉 陽: 粒径頻度分布からみた風成砂・海成砂の諸特徴, 第四紀研究, 第11巻, 第2号, pp.49~60, 1972.
- 7) 岩井重久・松尾新一郎: 土の粒度加積曲線に関する統計学的研究, 土木学会誌, 第36巻, 12号, pp.560~563, 1951.
- 8) 箭内寛治: 土の粒度分布に関する一考察, 第10回土質工学研究発表会概要集, pp.51~54, 1975.
- 9) 板橋一雄・立石哲郎・田口泰敏: 砂の粒度分析試験結果の精度とその評価, 土と基礎, Vol.36, No.9, pp.25~30, 1988.
- 10) 福本武明: まさ土の粒度分布に関する一考察, 第22回土質工学研究発表会概要集, pp.165~166, 1987.
- 11) 福本武明: まさ土の粒度式について, 第23回土質工学研究発表会概要集, pp.197~198, 1988.

(原稿受理 1988.8.26)

国際ニュース

国際会議のお知らせ

■プレッショメーターに関する第3回国際シンポジウム

名 称: 3rd International Symposium on Pressuremeters, ISP3

期 日: 1990年4月2日~6日

場 所: 英国, オックスフォード

英国地盤工学会の主催により, 土および岩盤に使用されるプレッショメーターに関する国際シンポジウムがオックスフォード大学で開かれます。会議の公用語は英語です。論文を応募される方は, 300語以内の英文概要を1989年9月30日までに下記宛お送りください。

送付先: Dr. G. T. Houlsby

Secretary, Organizing Committee, ISP3

Dept. of Engineering Science

OX1 3PJ, U.K.

■トンネルと地下掘削に関する国際会議

名 称: International Congress on Tunnel and Underground Works

期 日: 1990年6月3日~7日

場 所: 中国, 成都

標記の会議が国際トンネル協会と中国土木学会の共催で, 英語と中国語を公用語として開催されます。論文を応募される方は, 英文概要を1989年8月1日までに下記宛お送りください。

送付先: Prof. Xu Wenhuan

Southeast Jiaotong University

Jiu Li Di

Chengdu, Sichuan, China

■第6回国際地質工学会議

名 称: 6th International Congress of the International Association of Engineering Geology

期 日: 1990年8月6日~10日

場 所: オランダ, アムステルダム

標記の会議が英語と仏語を公用語として開催されます。論文を応募される方は, 英文または仏文の200語以内の概要を1989年11月までに下記宛お送りください。

送付先: Dr. H. Beijer

Secretary General

Geological Survey of the Netherlands

P.O. Box 157

2000 Haarlem, The Netherlands

■上記の三つの会議に関する詳しい資料を入用の方は, 土質工学会事務局国際係までお申し出ください。