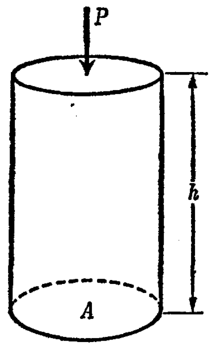
上解，下解，正解

田　村　　　武（たむら　たけし）
京都大学助教授　工学部土木工学科

1. はじめに

土構造物の限界状態とは，一定の外荷重のもとでつりあいを保ちながら塑性変形を持続する状態のことである。この限界状態の外荷重の大きさ（正解）を解析する際にしばしば利用されるのが上・下解定理である。ここでは，一軸試験の強度と帯基礎の支持力を例にあげながら二つの定理の内容と意義について説明する。



図―1　一軸試験の供試体と荷重

2. 一軸試験の場合における上解定理と下解定理

図―1 に示すような粘土の供試体を考える。この粘土の断面積を A，高さを h，そして一軸圧縮強度を $q_u(=2\,c_u)$ とする。いま，この供試体に P なる圧縮荷重を与えるとき，破壊するかどうか検討する。いうまでもなく $P_{cr}=2\,c_uA$ なる荷重が解であることはあきらかであるが，ここではあえて別の解法を考えてみよう。

2.1 下解定理と下解法

上記の P_{cr} 以下の荷重 P を作用させたとき，供試体のいたるところの（鉛直）応力は一定であり，その値は $2\,c_u$（降伏応力）以下である。このときの応力状態について，次の二つの条件が成立している。

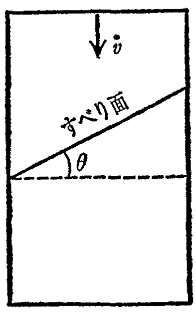
静的条件Ｉ　全体はつりあっている。

静的条件Ⅱ　降伏条件（いまの場合，主応力差 $=2\,c_u$）を越えるような応力は発生していない。

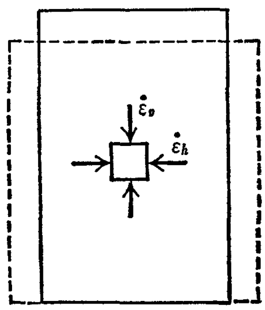
この二つの条件を満たすような荷重と応力状態の組合わせを静的可容（statically admissible）という。じつは逆に，「任意の静的可容な状態に対応する荷重 P は正解 P_{cr} より小さいか，あるいはせいぜい等しい」ということが証明される。これが下解定理である。したがって，「こうして求めた荷重 P を最大化すれば，正解 P_{cr} が求まる。なぜなら，真の限界状態も一つの静的可容な場を作るからである」。これが下解法である。

2.2 上解定理と上解法

つりあい状態を基本とする下解法と比べて上解法はやや誤解されやすい。その理由は，これが変形速度場を基本とするからである。いま，供試体が図―2 のようなすべりを生じているとしよう。上端の荷重の沈下速度を $\dot{v}$ とすると，すべり面上の相対速度は $\dot{v}/\sin\theta$ である。このように全体として矛盾のない速度場を運動学的可容（kinematically admissible: 以下，動的可容と略）という。いわば実際に図にすることができるような速度場のことである。もう少し別の動的可容な速度場を作ってみよう。図―3 のように鉛直方向に一様な圧縮ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_v(=\dot{v}/h)$



図―2　上端の沈下速度とすべり面



図―3　供試体内のひずみ速度

と水平方向に一様なひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_h$ をもつような変形速度場を考える。これは確かに図にすることができるが，一般には動的可容でない。それは，非排水状態を考える場合には，体積が一定でなければならないからである。

したがって $\dot{\varepsilon}_v+2\dot{\varepsilon}_h=0$ なら動的可容となる。もしも内部摩擦角 ϕ のある場合には，ϕ により定まる一定の膨張が生じなければならない（図—2 の場合にもすべり面において膨張が生じることになる)。つまり動的可容性にはどのような降伏条件を仮定しているかが関係してくる。まとめると以下の二つの条件が動的可容の定義である。

動的条件 I　全体の変形速度場は図にすることができる。

動的条件 II　仮定する降伏条件から定まるひずみ速度間の関係を満たす。

さて「任意の動的可容な速度場に対して，

外部仕事速度＝内部塑性仕事速度

とおいて得られる外荷重 P の大きさは正解 P_{cr} より大きいか，あるいはせいぜい等しい」ということが証明される。これが上解定理である。したがって，「あらゆる動的可容な速度場を考えながら，対応する荷重 P を最小化すれば，正解 P_{cr} が求まる。なぜなら，真の限界状態も一つの動的可容な場であるからである」。これが上解法である。ここで注意すべきは，降伏条件と速度場を仮定したとき内部塑性仕事速度が一意的に定まることである。

上解法の例を説明しよう。図—2 において，すべり面の面積が $A/\cos\theta$，せん断強さが c_u であることに注意すれば，上解定理より

$$P\dot{v}=\frac{Ac_u}{\cos\theta}\times\frac{\dot{v}}{\sin\theta}\cdots\cdots(1)$$

とおいて一つの荷重 $P=2c_uA/\sin 2\theta$ が求まる。これは $\theta=45°$ のとき，最小値 $2c_uA$ をとる。これは正解である。一方，図—3 の場合，供試体の単位体積の各部分で一軸強度 $2c_u\times\dot{\varepsilon}_v$ の内部仕事が生じるので，上解定理より

$$P\dot{v}=2c_u\times\frac{\dot{v}}{h}\times Ah\cdots\cdots(2)$$

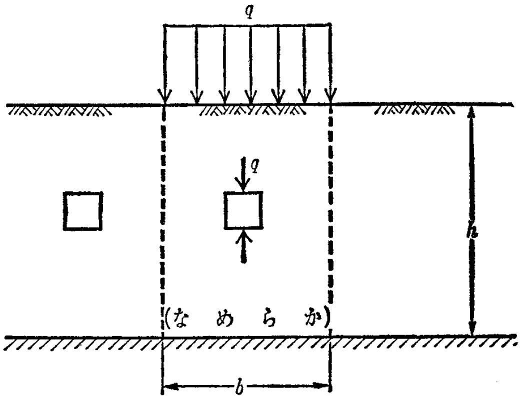
をえる。これからも正解がでてくる。いきなり正解が得られたのはつまり，図—3 の速度場が真の速度場（の一つ）だからである。なお，図—2, 3 において側圧 σ_h が作用する場合には，限界荷重が $(2c_u+\sigma_h)A$ となることがわかる（側圧のする仕事速度を考慮すればよい)。

3. 帯基礎の支持力への応用

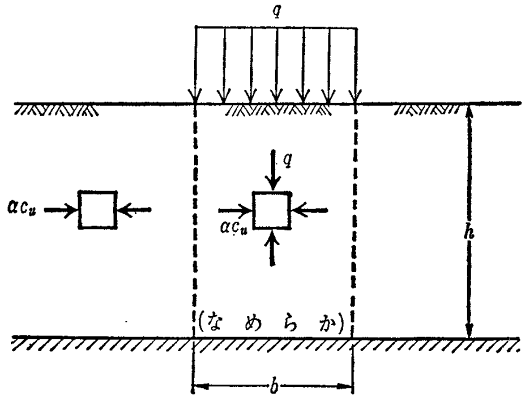
2. の場合と同じ粘土からなる図—4 のような水平地盤の帯状荷重に対する極度支持力 q_{cr}（二次元平面ひずみ問題）を考える。簡単のため，地盤の下端はなめらかであり，せん断抵抗（摩擦）はないとしておく。

3.1 下解値

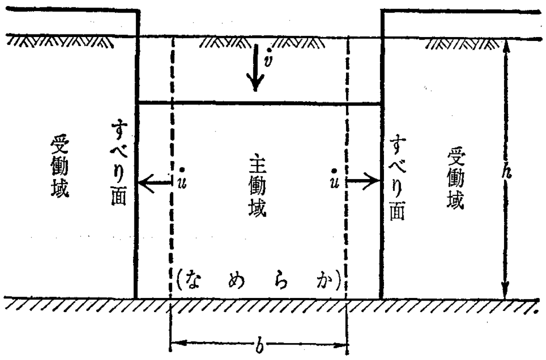
いま載荷部分直下の垂直応力が荷重強度 q に等しく，ほかの部分の応力は 0 とする。これは明らかにつりあっているが，現実には存在しないような応力状態かもしれない。重要なことはつりあっているかどうかということであって，その応力状態が実際のものかどうかということではない。いま，ここで $q=2c_u$ とすると，一つの静的可容な状態となる。したがって，下解定理より $q_{cr}\geqq 2c_u$ となる。もう少し努力してみよう。図—5 のように全領域の水平応力を αc_u（α は未知定数）とする。この場合も応力はつりあい条件を満たしている。そうしたうえで，



図—4　静的許容な応力場と外力（その 1）



図—5　静的許容な応力場と外力（その 2）



図―6　動的許容な速度場

降伏条件を破らない範囲で荷重を増加させてみよう。主応力差（垂直応力q－水平応力αc_u）が$2c_u$を越えなければ，荷重直下の部分では大丈夫である。したがって，$q=2c_u+\alpha c_u$となる。ところが,「応力状態の静的可容性は全領域で満たされねばならない」という条件よりαの最大値が定まる。荷重直下以外の部分の主応力差（水平応力αc_u）が$2c_u$を越えないためには，$\alpha=2$が限界である。このことより，一つの下解値$q=4c_u$を得る。静的可容でありながら，さらに複雑な応力分布を考えれば，より大きなqを求めることができるかもしれない。

3.2　上解値

図―6のような速度場を仮定する。すなわち，荷重縁に沿ってすべり面が生じ，その内側の部分は主働的に，また外側の部分は受働的にせん断されるとする。等体積条件を満たすために主働域は水平に，また受働域は鉛直に膨張しなければならない。このとき荷重の沈下速度を$\dot{v}$とすると，外部仕事速度は$qb\dot{v}$である。一方，主働域および受働域の塑性仕事速度はともに$2c_u b\dot{v}$，また二つのすべり面での塑性仕事速度は$c_u h\dot{v}$(中央深さの沈下速度$\dot{v}/2$を平均速度と思えばよい）となることがわかる。したがって上解定理より，一つの上解値$4c_u(1+h/4b)$を得る。

以上，上解値，下解値をまとめて，

$$4c_u \leqq q_{cr} \leqq 4c_u(1+h/4b) \quad \cdots\cdots(3)$$

のように正解を上下から評価することができる。

4.　まとめ

古典的な塑性論の上・下解定理とその応用について説明した。土質工学の主要な課題である土構造物の安定解析に対して，これらは一つの有力な道具となる。また，二つの方法で求めた近似解が正解を挟むというのは興味のある理屈でもある。定理の詳しい証明や力学的な構造（相補性）あるいはその数値解析への応用については省略したが，これらについては例えば下記の参考文献を参照されたい。

参考文献

1）土質工学会関西支部：地盤力学数値解析―“限界状態”の予測手法を中心として―，地盤力学数値解析講習会テキスト，1986.9.