The Japanese Geotechnical Society

不圧地下水流における Dupuit の公式の原典

On the Original Literature of Dupuit's Formula in Unconfined Groundwater Flow

佐藤邦明（さとう くにあき）
埼玉大学助教授 工学部地盤水理実験施設

竹下貞雄（たけした さだお）
立命館大学教授 理工学部土木工学科

1. はじめに

自由水面（自由表面：通気帯を通して大気と接する水面）をもつ不圧地下水流，また密度の異なった地下水の自由界面（例えば，海岸地下水の淡水と塩水の界面）などの挙動を水理学的に取り扱おうとする時，J. Dupuit（デュプイ，1863年，仏）の準一様流近似（あるいは仮定）は極めて有効である。一般に，浸透流の力学や地下水工学において，基本となる三つの力学概念をあげるとすれば，恐らく Darcy（ダルシー）の法則，Dupuit の仮定および不飽和浸透流の毛管力の量的評価尺度を与える毛管ポテンシャルの概念であろうと思う。これほど根幹をなす Dupuit の仮定も今まで当たり前のことのように用いられ，その背景が顧みられることはほとんどなかった。その必要があまり無かったのかも知れないが，Dupuit の論文の原典が古く，入手しにくいことに加えて仏文で書かれている理由もあろう。このような観点よりここで，書物 "Études Théoriques et Pratique sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Découverts et à Travers les Terrains Perméables" par J. Dupuit, Paris, Dunod, Éditeur, 1863[1]，に注目し，Dupuit の近似流の考え方が，どういった背景に立ってどのように誘導されていたのか，当時の雰囲気にひたる気持ちで紹介したい。

2. Dupuit の公式の誘導プロセス

周知のように，Darcy の法則は Dupuit の文献に先立って1857年に出版されている[2]。いわゆる Dupuit の公式が書かれている第8章 Du mouvement de l'eau à travers les terrains perméables（原典 pp. 229～293）の中に Darcy の文献は意識されており，それは活用されている。Dupuit の文献全体は，大別すると，いわゆる流れの抵抗，開水路の流れおよび透水性地層を通る水の運動（上述の仏文に対応），からなっており，293ページの力作である。後述するように，Dupuit の公式は開水路の抵抗則から延長させて導びかれている。以下にそのプロセスに沿って急所となる原文をのせ，その訳を対応させて誤訳を修正し得るよう，また原典のニュアンスがつかめるよう配慮して述べた。

137. Équation générale de ce mouvement. 1° Mouvement à surface libre.—Rappelons d'abord les formules du mouvement ordinaire. Nous avons vu qu'en appelant:

i le sinus de l'angle du fond d'un canal avec l'horizon,
ω sa section mouillée,
χ son périmétre,
u la vitesse moyenne de l'eau,
α et β deux coefficients constants pour lesquels on admet ordinairement dans la pratique les valeurs suivantes:
$\alpha=0.000018$, $\beta=0.000348$,

on a la relation:

$$i=\frac{\chi}{\omega}(\alpha u+\beta u^2)$$

à l'aide de laquelle on détermine une des quantités i, χ, ω, u, quand on connaît les trois autres.

＜訳＞ 137. 運動の一般式。No. 1 自由表面の運動。—通常の運動の公式にまず注目しよう。

i：水平と水路底のなす角の正弦（サイン），
ω：潤れた断面（流水断面），
χ：潤辺，
u：水の平均流速，
α と β：通常，下記の実用値をとる二つの定数，
$\alpha=0.000018$, $\beta=0.000348$,

と記号を定めた。

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

別の三つの量を知って i, χ, ω, u を決めて,

$$i=\frac{\chi}{\omega}(\alpha u+\beta u^2)$$

の関係がある。

De plus, si l'on remarque que dans les phénomènes que nous voulons étudier la vitesse est toujours très-petite, plus petite que 0^m, 001, on pourra remplacer cette formule par la suivante:

$$i=\mu u. \qquad (1)$$

Nous serions arrivé au même résultat en partant de l'équation relative aux tuyaux de conduite

$$\frac{1}{4}Di=\alpha u+\beta u^2$$

qui, lorsqu'on néglige le terme en u^2, devient:

$$i=\frac{4\alpha}{D}$$

et nous en aurions conclu que l'eau se meut dans le terrain perméable comme dans un tuyau dont le diamètre serait:

$$D=\frac{4\alpha}{\mu}u^2$$

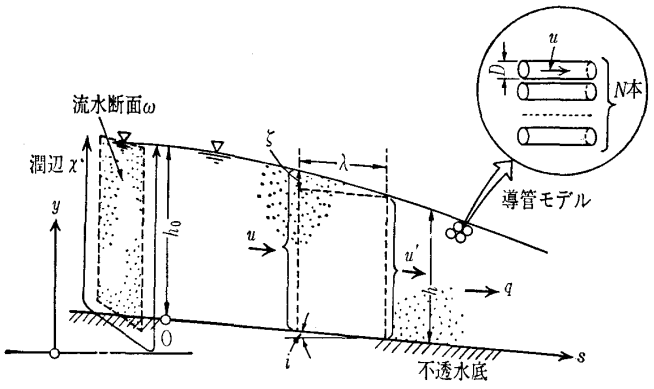
Enfin les faits confirment parfaitement l'exactitude de la formule fondamentale $i=\mu u$ et pourraient au besoin servir à l'établir.

<訳> さらに，研究しようとする現象の範囲において流速は常に非常に小さい，0.001 m より小さいことに着目すると，この式を次のもので置き換え得る：

$$i=\mu u\left(\text{前文において } \mu=\frac{\chi}{\omega}\alpha\right), \qquad (1)$$

対応する導管（今日細管モデルと呼ぶ，図—1 参照，直径D）による式から出発しても同じ結果に達し，

$$\frac{1}{4}Di=\alpha u+\beta u^2$$



図—1 自由水面をもつ不透基盤勾配の変わる帯水層内の流れ

ここに，u^2 の項は無視し得るから

$$i=\frac{4}{D}\alpha u,$$

となる。

もしくは，直径は

$$D=\frac{4}{\mu}\alpha$$

となる導管におけると同じ透水層内を水が動くと結果づけられる。

要するに，この事は，基礎式 $i=\mu u$ の厳密さを完全にとらえており，必要に応用を備えている。

Non-seulement l'équation $i=\mu u$ représente le mouvement uniforme dans un terrain perméable, mais elle convient aussi au mouvement varié. En effet, on sait que dans l'écoulement ordinaire ce mouvement est représenté par l'équation

$$\zeta=\frac{u^2}{2g}-\frac{u'^2}{2g}+\int_0^\lambda(\varphi)ds$$

en appelant

- ζ la chute de la surface de l'eau dans deux sections,
- u et u' les vitesses moyennes des deux sections,
- λ leur distance,
- φ la résistance qu'éprouve le mouvement de l'eau en un point donné.

Pour appliquer cette équation aux terrains perméables, il suffirait d'y remplacer φ par la fonction μu propre à ces terrains; mais de plus on doit remarquer que les vitesses u et u' et surtout la différence des hauteurs dues à ces vitesses $\frac{u^2}{2g}-\frac{u'^2}{2g}$ sont très-petites par rapport à ζ, qui représente la différence de niveau des deux sections, on peut donc écrire:

$$\zeta=\int_0^\lambda \mu u ds,$$

ou en différentiant et en appelant j la pente $\frac{d\zeta}{ds}$ de la surface:

$$j=\mu u.$$

<訳> 式 $i=\mu u$ は透水層内の一様運動を与えるのみならず，変わる運動にも適合する。実際に，通常の流れにおける運動は，

$$\zeta=\frac{u^2}{2g}-\frac{u'^2}{2g}+\int_0^\lambda(\varphi)ds$$

となる。ここに，

ζ：2断面における水面差（図—1 参照），
u と u'：二つの断面の平均流速，
λ：その距離，

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

φ：与えられた点における水の運動により表れる抵抗。

この式を透水層に応用するため，その層に固有の関数 μu によって φ を置き換えばよい；加えて流速 u と u'，および何よりもそれら流速による水位差 $u^2/2g-u'^2/2g$ が2断面の水位差を与える ζ に比べて小さいことに注意しなければならない，それゆえ，

$$\zeta=\int_0^s \mu u ds$$

とかけ，あるいは微分し，水面勾配 $d\zeta/ds$ を j と書いて

$$j=\mu u.$$

上述した内容は，非線型抵抗則（Dupuit・Forchheimer の式ということがある）は流速が小さい浸透流については u^2 の項が無視でき，線型抵抗則（Darcy の法則）に帰着でき，それはまた細管モデル中の層流に置き換えて考え得ることが述べられている。また，不圧流れの水面形を支えるのは浸透抵抗であることを強調している。

以下に，本論ともいうべき Dupuit の公式の導入プロセスを述べる。

138. Équation de ce mouvement dans le cas où la couche aquifère repose sur un terrain imperméable d'inclinaison variable.—A l'aide de cette équation, on peut facilement déterminer la surface de l'eau qui s'écoule à travers un terrain perméable reposant sur un terrain imperméable d'inclinaison variable.

Soient :

- i l'inclinaison de ce terrain comptée positivement lorsqu'il monte et négativement lorsqu'il descend,
- h la hauteur de la surface de l'eau sur le fond,
- y son ordonnée, à partir de l'horizontale,
- s la distance à l'origine,
- q le débit par mètre courant de largeur de la couche perméable,
- m un coefficient indiquant dans le terrain le rapport du vide au plein,
- μ' le rapport $\frac{\mu}{m}$,

on aura $mhu=q$

et $u=\frac{q}{mh}$,

ce qui donne $j=\frac{\mu q}{mh}=\frac{\mu' q}{h}$.

＜訳＞ 138. 帯水層が勾配の変わる不透基盤上にある場合の運動の式—この式によって勾配の変わる不透基盤上の透水層を流れる水面形を容易に決めることが出来る。いま，

i：下る時に負および上る時に正ととる地層の傾き，
h：基盤上の水面の高さ，
y：水平からとった座標，
s：原点からの距離，
q：透水層の流速の大きさをメートルで測った流量，
m：地層の飽和に関する空隙率を表す係数，
μ'：比率 μ/m，

として，

$$mhu=q$$

あるいは，

$$u=\frac{q}{mh},$$

であり，

$$j=\frac{\mu g}{mh}=\frac{\mu' q}{h}$$

を与える。

Lorsque la pente du courant est faible, on a :

$$j=-\frac{dy}{ds}=\frac{\mu' q}{h},$$

on a de plus $h=y-is$

et par conséquent $dh=dy-ids.$

L'équation différentielle de la surface rapportée au fond du lit peut donc se mettre sous la forme

$$-\frac{hdh}{\mu' q+ih}=ds.$$

En intégrant et remarquant que pour $s=0$, on a $h=h_0$, il vient :

$$(2)\quad s=\frac{h_0-h}{i}+\frac{\mu' q}{i^2}\log\left(\frac{\mu' q+ih}{\mu' q+ih_0}\right).$$

En développant le logarithme en série, cette équation devient :

$$(3)\quad s=\frac{1}{2\mu' q}(h^2-h_0^2)-\frac{i}{3\mu'^2 q^2}(h^3-h_0^3)+\frac{i^2}{4\mu'^3 q^3}(h^4-h_0^4).$$

＜訳＞ 流れの勾配が小さい時，

$$j=-\frac{dy}{ds}=\frac{\mu' q}{h},$$

となり，さらに

$$h=y-is$$

よって，

$$dh=dy-ids.$$

それゆえ，基盤に基づく水面の微分方程式は以下のように置ける。

$$-\frac{hdh}{\mu' q+ih}=ds.$$

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

積分して，$s=0$ で $h=h_0$ を用い，それは

$$(2)\quad s=\frac{h_0-h}{i}+\frac{\mu' q}{i^2}\log\left(\frac{\mu' q+ih}{\mu' q+ih_0}\right)\left[=\frac{\mu' q}{i^2}\log\left\{1+\frac{i(h-h_0)}{\mu' q+ih_0}\right\}\right].$$

対数を級数に展開[注1]しこの式は，

$$(3)\quad s=\frac{1}{2\mu' q}(h^2-h_0^2)-\frac{i}{3\mu'^2q^2}(h^3-h_0^3)+\frac{i^2}{4\mu'^3q^3}(h^4-h_0^4).$$

Si i était nul ou très-petit, c'est-à-dire si le fond était horizontal ou avait une faible pente, on aurait:

$$s=\frac{1}{2\mu' q}(h^2-h_0^2),$$

équation d'une parabole dont l'axe est horizontal.

On déduit facilement de cette équation les lois du mouvement de l'eau à travers un massif perméable d'une certaine épaisseur. En appelant z la différence h_0-h ou la charge, l'équation précédente peut se mettre sous la frome:

$$(4)\quad q=\frac{1}{\mu'}\cdot\frac{z}{s}\cdot\frac{h_0+h}{2},$$

et l'on en déduit que le débit est proportionnel à la charge z, à la section moyenne $\frac{h_0+h}{2}$, en raison inverse de l'épaisseur du massif traversé.

<訳>

もし i が0かあるいは非常に小さければ，つまり，基盤が水平かもしくは小さい勾配であるなら，

$$s=\frac{1}{2\mu' q}(h^2-h_0^2),$$

軸が水平な放物線の式である。

この式はある厚さの透水体を通る水の運動則から容易に導びける。z を差 h_0-h，もしくは水位差として上式は次の形における：

$$(4)\quad q=\frac{1}{\mu'}\frac{z}{s}\frac{h_0+h}{2},$$

流量が平均断面 $(h_0+h)/2$ と水位差 z に比例し，透水体の厚さに逆比例するということから導びかれている。

以上の内容における終りの式が Dupuit の式と呼ばれているものである。ここで紹介した文献の一部から今日われわれが不圧地下水の解析に使っている Dupuit の近似の力学的背景をすべて知ることができる。一言でいえば，水平支配の不圧浸透流は鉛直方向流速を無視して取り扱い得る（解析時の空間次元を一つ下げ得る），ということである。鉛直流速がないと仮定すれば，鉛直方向の水圧分布は静水圧的（つまり，水圧が水深に比例する）ということになる。取扱いが簡単になる。今度は紹介できなかったが，Dupuit はこの考え方を不圧帯水層の井戸の流れにも応用している。

今日，地下水の解析はコンピューターによる数値解析が実用上多く用いられ，時間と金をかけて答を得るようになっているとはいえ，まだまだ Dupuit の近似は効力をもっている。

おわりに

Dupuit の文献が出版された当時は我が国では江戸の末期（幕末の動乱期）であり，アメリカではリンカーンが奴隷解放（1863年）を宣言した年である。中国では清王朝の中で西太后が政権をにぎり，旧体制が崩壊を早めつつある時期である。しかし，ヨーロッパでは産業革命が成熟へ向かい，科学・技術上の発明・発見が多くなされつつある時期であった。水理学の分野ではまだ噴水，管水路，砂ろ過，開水路の流れといった古典的対象が扱われていたにもかかわらず，地下水理（井戸理論も含め）は早くから力が注がれていた。この事は今回の原典紹介からも読み取ることができる。

なお，筆者の一人がかつて本誌（Vol. 32, No. 5, 1984）に“Darcy の法則の原典紹介”と題して投稿したところ，予想外に多くの専門家の方々から“大変面白かった”という感想を寄せていただいたので，今回は Dupuit を紹介した。

参考文献

1) J. Dupuit: Études Théoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Découverts et à Travers les Terrains Perméables, Paris, Dunod, Éditeur, 1863.
2) H. Darcy: Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Paris, Victor Dalmont, Éditeur, pp. 590～594, 1856.

(原稿受理 1991. 5. 29)

注 1) 対数関数の級数展開

$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots(-1<x\leq 1)$

log は自然対数である。

NII-Electronic Library Service