

海洋構造物の支持力特性

講座

5. 組合せ荷重下の重力式構造物の支持力解析 (その2)



関口 秀雄 (せきぐち ひでお) 小林 俊一 (こばやし しゅんいち)
 京都大学助教授 工学部土木工学科 京都大学助手 工学部土木工学科

- 5.1 まえがき
- 5.2 ケーソン式混成堤の設計における現行の安定性の評価法
- 5.3 組合せ荷重を受ける浅い基礎の静的支持力解析 (途中まで)
 以上, 前号掲載

5.3.3 実験による支持力曲面の同定 (つづき)

Butterfield (バターフィールド) らは, 密な乾燥砂上の浅い基礎の支持力実験により, モーメント荷重の正負 (定義は図-5.16参照) と V = 一定面で切った支持力曲面の断面形状の関係を詳しく調べた¹⁵⁾。その結果, 図-5.17に示すように H 軸, M/B 軸を主軸とする支持力曲面 (表-5.1のカテゴリー I および II) よりも, 主軸を H 軸から角度 ρ だけ回転させた楕円形の方が実験結果をよりよくフィットすることがわかった。彼らはこの効果を取り入れた支持力曲面式として, 表-5.1のカテゴリー III の式 (21) なる関係式を提案している。同式の左辺第 3 項の係数 C は楕円の主軸の回転量を表す係数で, 具体的には次のようになる。

$$C = \frac{1}{2} \frac{(\mu - \psi)(\mu + \psi)}{\mu\psi} \cdot \tan(2\rho) \dots\dots\dots (22)$$

この主軸の回転の効果は, カテゴリー I と II の提案式のみならず, 偏心および傾斜の効果と積の形で表した前出の式 (15) でも表現できないことに注意する必要がある。これは, 傾斜偏心荷重を受ける基礎の支持力を極限解析で評価する場合, 厳密には傾斜による効果と偏心による効果を個別に評価するのではなく, 傾斜偏心荷重そのものに対する許容応力場や可容速度場を用いた解析が必要

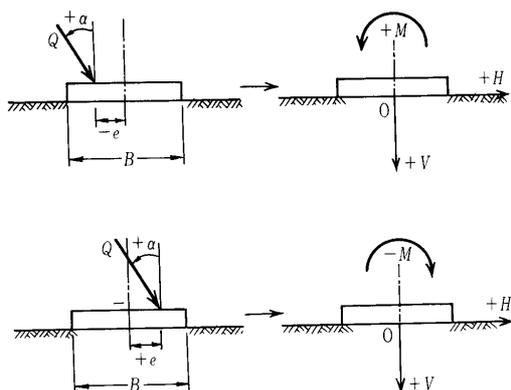


図-5.16 モーメントの正負の定義¹⁵⁾

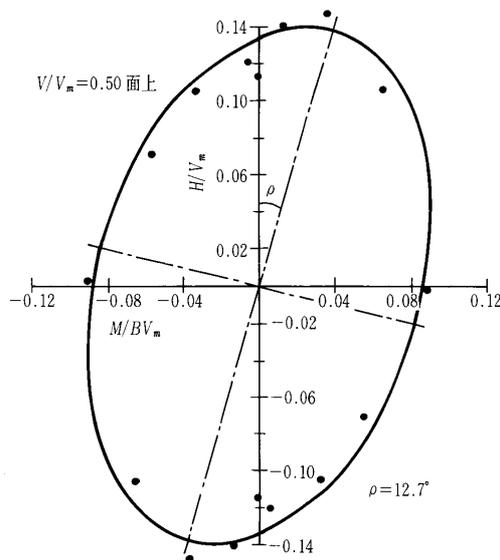


図-5.17 モーメントの正負による支持力特性の違い¹⁵⁾

になることを示唆している。

5.3.4 弾塑性有限要素法による支持力曲面の同定

砂質材料などのように非関連流れ則に従う地盤材料を取り扱う場合や, 複雑な境界条件を有する場合には, 極限解析法により解析的に解くことは一般に困難であるので, 数値塑性力学的手法により支持力曲面を評価する方法が有力になる。ここでは数値塑性力学的手法を適用した一例として, 波力を受ける砂質地盤上のケーソン構造物の支持力特性に関する筆者らの有限要素解析結果を紹介する。

解析に際しては構造物に負荷する荷重を制御して支持力を求める方法と, 構造物に変位を与えたときに得られる地盤反力から支持力を求める方法の2とおりの方法を採用した。対象としたケーソン構造物は自重がゼロで地盤剛性に対して十分に大きな剛性を有する弾性体とした。また完全に粗い基礎としたため底面と地盤は固着しており, 相対変位はゼロである。ケーソンの幅 B の値を 3.0m に固定し, 高さ h を 1.0, 1.5, 2.5, 5.0m の4とおりとした。地盤は非関連流れ則に従う弾完全塑性 Mohr-Coulomb (モール・クーロン) 材料とした。解析に使用したメッシュを図-5.18に示す。使用した要素は9節点のアイソパラメトリック二次要素である。解析に使用したパラメーターを表-5.2に示す。なお, これらの値は特に実際のマウンドなどの物性値と対応させたわけではない。計算スキームは Newton-Raphson (ニ

講 座

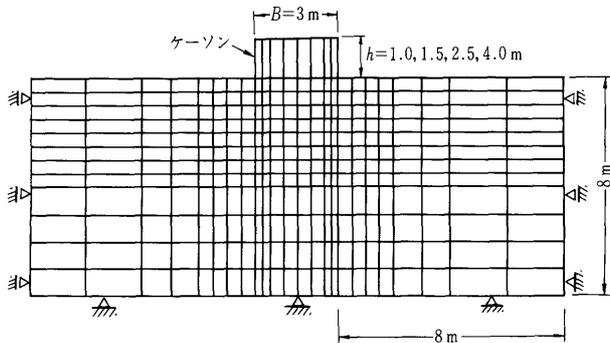


図-5.18 使用した有限要素メッシュ

表-5.2 有限要素解析で使用したパラメータ

		地 盤	ケーソン
ヤング率	(kN/m ²)	2.5×10 ⁹	2.5×10 ¹⁰
ポアソン比		0.3	0.3
内部摩擦角		30.0°	—
ダイレイタンシー角		0.0°	—
粘着力	(kN/m ²)	5.0	—
単位体積重量	(kN/m ³)	18.0	0.0

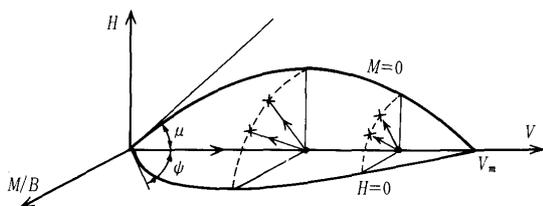


図-5.19 荷重制御解析における荷重経路

ニュートン・ラフソン) 法による非線形計算で所定の収束条件 (ここでは反力ベクトルの誤差が0.5% 以下) を満足するまで反復計算を行う¹⁶⁾。計算上, 解の収束性が満足されなくなった荷重を最大支持力と判定しているが, 増分のステップ幅が大きすぎるにより解が収束しない場合もあるため, 補助的に荷重-変位曲線を用いて解の妥当性を検討している。予備解析として, 鉛直荷重のみを受ける場合の解析を行い, 支持力係数として $N_s = 16.2$ を得た。この値は Davis (デイビス) らの特性曲線法による解¹⁷⁾: $N_s = 14.96$ に比べて 8% 大きい。

1) 荷重制御による解析 これは組合せ荷重を受ける場合の解析である。①水平荷重の作用高さ l_H の違いによる支持力特性の変化を把握すること, および②支持力曲面のうち原点側の形状を把握することに主眼を置き, $l_H = 1.0, 1.5, 2.5, 5.0$ m の計 4 ケースについて解析を行った。荷重経路は実際の構造物が受ける荷重経路を考慮して以下のようにした。①静水時にケーソンを設置する過程を念頭におき, ケーソン上部に表面力として等分布の鉛直荷重を所定の値まで載荷する。この過程では偏心のない鉛直荷重だけが增加していき, 水平荷重およびモーメント荷重はともにゼロである。②その後, 波浪による水平荷重を受けるので, ケーソン上部に表面力として等分布の水平荷重を単調に載荷し, 最大支持力

に達するまで水平荷重を増加させる。この過程では鉛直荷重は一定, 偏心量はゼロで, 水平荷重およびそれに起因するモーメント荷重が増加していく。この荷重経路を荷重空間内に図示したのが図-5.19である。解析結果を鉛直荷重 V -水平荷重 H 面上に示したのが図-5.20である。同一の鉛直荷重が作用している場合, 水平荷重の載荷位置が高くなるほど水平支持力が低下することがわかる。同じ解析結果を鉛直荷重 V -モーメント荷重 M/B 面上に示したのが図-5.21, また水平荷重 H -モーメント荷重 M/B 面上に示したのが図-5.22である。図中の各実線は鉛直荷重 V =一定で水平力載荷高さが異なるケースを結んだもので, 支持力曲面を V =一定面で切った断面の形状を表している。

2) 変位制御による解析 変位制御による解析として, 支持力曲面を sideswipe (サイドスワイプ) 法により評

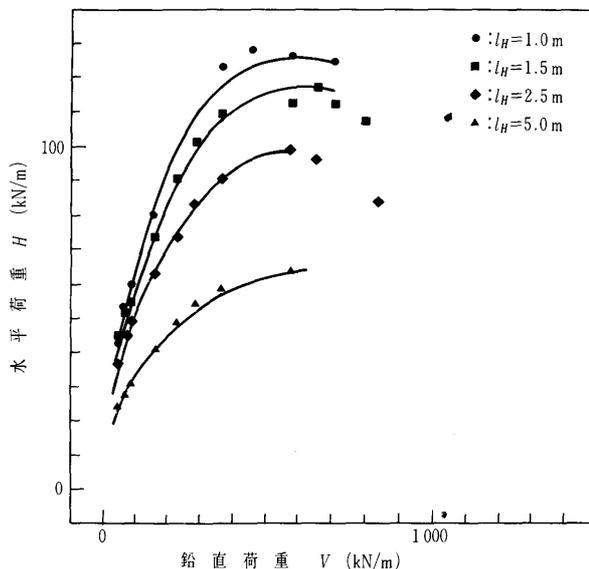


図-5.20 鉛直荷重 V -水平荷重 H 面上の支持力曲線

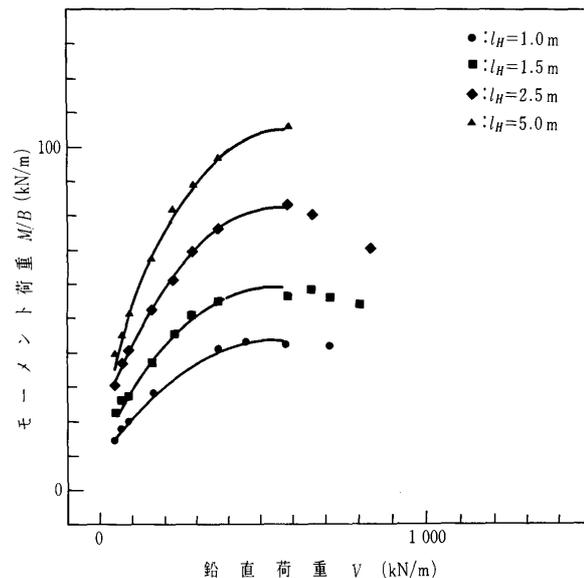
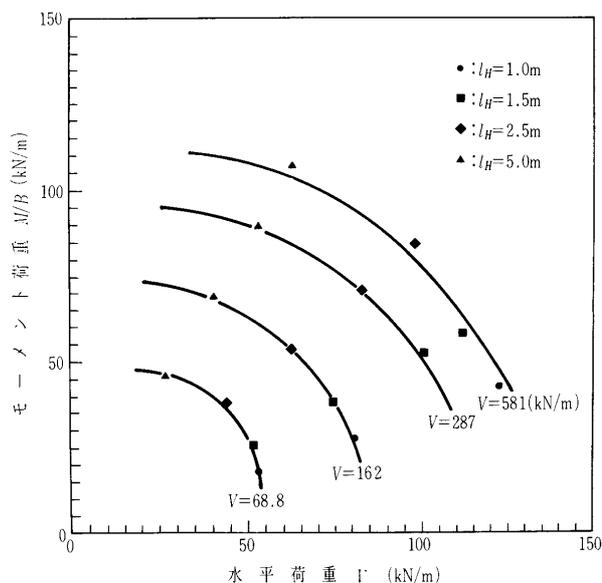
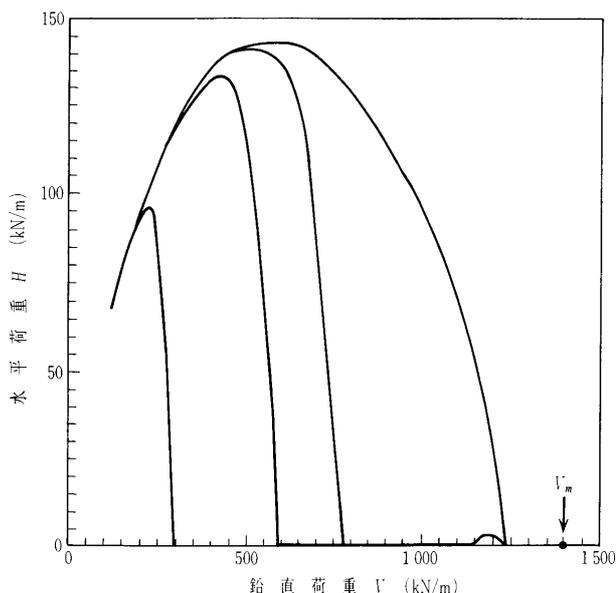


図-5.21 鉛直荷重 V -モーメント荷重 M/B 面上の支持力曲線



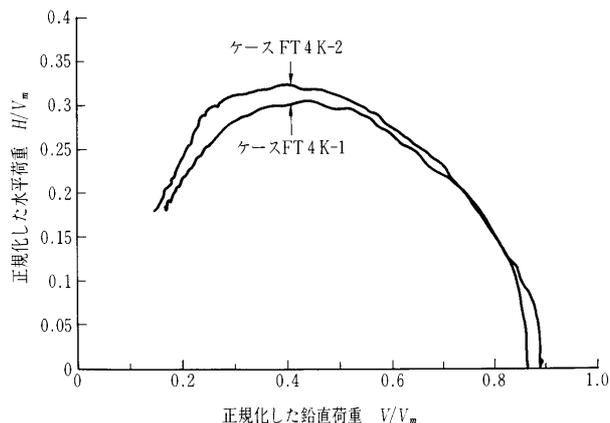
図—5.22 水平荷重 H -モーメント荷重 M/B 面上に投影した支持力曲線



図—5.24 Sideswipe 法による解析結果

価した例をとりあげる。この sideswipe 法はもともと遠心力場におけるさまざまな模型基礎の組合せ支持力特性を求める際に用いられた方法¹⁸⁾である。その具体的な手法は次のようである。①基礎を所定の位置まで鉛直方向に貫入させる。この過程では基礎は地盤から鉛直方向のみの反力を受ける。②次に基礎の鉛直変位を一定にし、回転運動を拘束したまま、基礎を水平方向に変位させる。この過程では、水平方向変位が増加するにつれて基礎が地盤から受ける鉛直方向の反力は減少し、水平方向の反力が現れる。この手順で得られた鉛直方向反力と水平方向反力を $V-H$ 面に描くと、上に凸な曲線が得られる。この曲線は近似的に $V-H$ 面上の支持力曲線となっていることが実験的に確かめられている。実験結果の一例として、Tan (タン) が遠心力場で行った剛な帯基礎の sideswipe 実験結果¹⁸⁾を図—5.23に示しておく。

幅 $B=3\text{m}$ の剛な帯基礎の支持力解析に、この sideswipe 法を忠実に適用した結果が図—5.24である。さまざまな鉛直荷重から sideswipe を行っているが、いずれの場合も反力の経路は水平反力がピークを示した後、ほぼ一定の曲線に沿って原点に向かっている。この付近



図—5.23 遠心力場における剛な帯基礎の sideswipe 実験¹⁸⁾

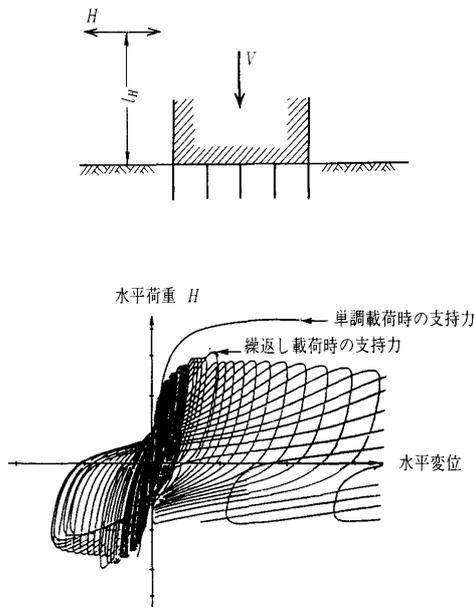
になると、塑性域の進展に伴い地盤剛性がかなり小さくなり、計算上は安定していたが、計算を途中で打ち切っている。そのため、反力の経路が最終的にどのくらいまで原点に近づくのかは不明である。sideswipe 法の結果と荷重制御による解析結果 (図—5.20) を比較すると、良い対応を示しており、支持力曲面の近似的な評価法としては有用であると考えられる。

ただし、sideswipe 法では水平変位を与える過程で、基礎が地盤から受ける鉛直反力の分布が変化し、基礎底面中心点まわりのモーメント反力が発生している。換言すると、sideswipe 法は変形機構を拘束する上界的手法である。したがって、得られた支持力特性は上界法的な解として位置づけるべきである。

5.4 繰返し組合せ荷重を受ける浅い基礎の支持力解析

一般に重力式海洋構造物は極めて多い回数の繰返し負荷を受ける。この繰返し荷重に伴い構造物が沈下したり、支持力が低下することはよく知られている。その理由としては、①繰返しにより地盤材料そのものが劣化すること、②系が変形硬化 (shakedown) を起こすこと (5.4.2 で説明)、③流体との相互作用により局所洗掘や揺動侵食が発生することなどが考えられる。繰返し荷重と単調荷重における支持力特性の違いを端的に示した実験例として Dyvik (ディヴィク) らの模型実験結果¹⁹⁾を図—5.25に示しておく。鉛直荷重の値は繰返し荷重、単調荷重のいずれの場合においても同一であるが、発揮される水平方向支持力の値は繰返し荷重の方が小さくなること

がわかる。このような繰返しの効果を評価する方法として、連成有限要素解析を適用し、時間領域について時々刻々追いかけて計算する方法は有力であるが、解析の労力とコストの問題から未だ一般的ではない。一方、実設計に繰返しの効果を取り込んだ方法としては、NGI (ノル



図—5.25 単調載荷と繰返し載荷時の支持力特性の相違¹⁹⁾

ウェー地盤工学研究所) が提案する極限釣合い法²⁰⁾がある。この方法の詳細は本講座 6章“大型重力式構造物のスカート基礎”の中で紹介される予定であるが、要点だけを指摘すると次のようになる。潜在破壊面を仮定し、その破壊面に沿って動員される強度を三つのモード(単純せん断, 平面ひずみ圧縮, 平面ひずみ伸張)に対応させることにより、全体系の支持力を評価する手法である。一見すると上界的な方法であるが、変形の適合条件を完全には満足していないので、結果の解釈にあたっては注意が必要である。

以下では繰返し荷重を受ける基礎の支持力問題について、比較的解析が手軽に行える弾塑性マクロエレメント法の適用, および shakedown (シェークダウン) 解析の適用について述べる。

5.4.1 弾塑性マクロエレメント法の適用

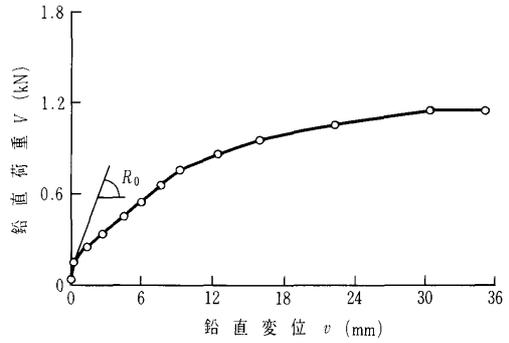
弾塑性体の降伏曲面および塑性ポテンシャルの考え方を地盤-構造物系の支持力問題に適用し、応力の代わりに荷重 (V, H, M/B) を, 塑性ひずみ増分の代わりに構造物の塑性変位増分 ($\delta v, \delta u, \delta \theta \cdot B$) を用いて系の挙動を表現する試みが Nova (ノヴァ) ら²¹⁾, Georgiadis (ゲオルギアディス) ら²²⁾, および Tan¹⁸⁾ によって報告されている。これらの手法をまとめて弾塑性マクロエレメント法と呼ぶことにする。

1) 単調載荷の場合 Nova らは組合せ荷重を受ける砂質地盤上の剛な帯基礎の支持力解析に本手法を採り入れている。その要点を以下に述べる。まず、弾塑性体の応力とひずみに相当する一般応力 \underline{Q} と一般ひずみ \underline{q} をそれぞれ以下のように定義する。

$$\underline{Q} = (\xi, h, m) = \left(\frac{V}{V_m}, \frac{H}{\mu V_m}, \frac{M}{\psi B V_m} \right) \dots\dots (23)$$

$$\underline{q} = (\eta, \varepsilon, \xi) = (v \cdot V_m, \mu u \cdot V_m, \psi \theta B \cdot V_m)$$

ここに v, u, θ はそれぞれ基礎の鉛直変位, 水平変位, 回転を表す。降伏曲面 f としては, 支持力曲面式



図—5.26 鉛直荷重載荷実験における荷重変位曲線²¹⁾

(20) とのアナロジーから次式の表現を仮定する。

$$f(\underline{Q}, \rho_c) = h^2 + m^2 - \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho_c} \right)^{2\beta} = 0 \dots\dots (24)$$

ここに ρ_c は系の履歴を表すパラメーター, $\xi = V V_m$, $h = H / (\mu V_m)$, $m = M / (\psi B V_m)$ である。この履歴パラメーター ρ_c は次のようにして定めることができる。まず, 図—5.26 に示すように鉛直荷重のみを載荷した支持力実験における荷重 $V \sim$ 変位 v 曲線が次のように表せることに注目する。

$$\frac{V}{V_m} = 1 - \exp\left(-\frac{R_0 v}{V_m}\right) \dots\dots (25)$$

ここに R_0 は同曲線の初期接線の傾きである。この考え方をさらに拡張し, 水平変位や回転変位による効果を考慮できるようにすると, 次のようになる。

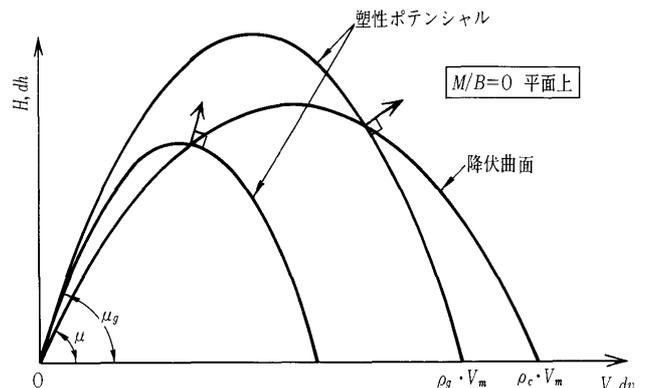
$$p_c = 1 - \exp\left\{-\frac{R_0}{V_m} \left[\eta^2 + \left(\frac{\alpha|\varepsilon|}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\gamma|\xi|}{\psi}\right)^2 \right]^{1/2}\right\} \dots (26)$$

ここに α と γ は実験定数, また, 式(23)の第2式に定義したように, $\eta = v \cdot V_m$, $\varepsilon = \mu u \cdot V_m$, $\xi = \psi \theta B \cdot V_m$ である。式 (26) の表現はいわゆるひずみ硬化則に相当する。

一方, 塑性ポテンシャル g としては次の表現を仮定している。

$$g(\underline{Q}) = \lambda^2 h^2 + \chi^2 m^2 - \xi^2 [1 - (\xi/\rho_g)]^{2\beta} = 0 \dots (27)$$

ここにパラメーター μ_g および ψ_g は塑性ポテンシャル曲面の形状を決めるパラメーター, ρ_g はスケールを合わせるパラメーターである。塑性ポテンシャルの概形を図—5.27 に示す。また式 (27) 中のパラメーター λ と χ



図—5.27 弾塑性マクロエレメント法における塑性ポテンシャル

はそれぞれ $\lambda \equiv \mu/\mu_0$, $\chi \equiv \psi/\psi_0$ と定義される。塑性ポテンシャルを規定するパラメーターが $\lambda = \chi = 1$ となる場合は関連流れ則となる。ただし、従来までの実験事実によると、 $0 < \lambda$, $\chi \leq 1$ となっている。以上に述べた式(27)中の諸パラメーターを実験的に求め、増分形式で弾塑性解析を行うことによって、さまざまな単調荷重を受ける系の挙動を評価することが可能となる。

2) 繰返し荷重の場合 Tan は遠心力場におけるスパッドカンの支持力実験から、荷重空間内のマクロな降伏曲面や塑性ポテンシャルを導入したモデルでは、以下のような実験結果が表現できないことを指摘している。① 荷重過程では、荷重レベルの上昇に伴い地盤剛性が徐々に低下し降伏に至ること、② 降伏曲面内の弾性域とみなされる領域で繰返し荷重を行うと、ヒステリシスを示し、塑性鉛直変形を発生すること、③ 実際に弾性的な挙動が見られる領域は、マクロな降伏曲面に比べて小さいこと。

これらの考察をふまえて、Tan¹⁸⁾ は降伏曲面内部における塑性ひずみの発生を記述できる境界曲面モデル²³⁾ を弾塑性マクロエレメントに適用することを試みた。この境界曲面モデルは、図-5.28に示すように、古典的な降伏曲面を境界曲面とし、その内部に真に弾性的な挙動を示す内部曲面(弾性核)を導入したモデルである。境界曲面内部の塑性ひずみの発生は、内部曲面の移動則と硬化則によって支配される。Tan は簡単のために以下のモデル化を行っている。① 境界曲面は関連流れ則に従う楕円形である。② 内部曲面も関連流れ則に従い、形状は境界曲面と相似形で、相似比は常に一定とする。③ 内部曲面の移動則は、境界曲面と内部曲面が交差しないことを保証するように選ぶ。具体的には、内部曲面上の荷重点と境界曲面上の共役点を結ぶ方向に内部曲面を移動させる。ここに共役点とは内部曲面上の荷重点と相似となるような境界曲面上の点を意味している。④ 内部曲面の硬化則は、荷重点から境界曲面までの距離の関数として表される。

この境界曲面モデルの適用性を示す1例を紹介しておく。排水条件下で一定の鉛直荷重 $V = 0.59 V_m$ を受ける砂質地盤上の幅 $B = 70 \text{ mm}$ のスパッドカン基礎に、繰返し水平荷重を荷重した遠心力場の実験結果と境界曲面モデルによる解析結果の比較を図-5.29に示す(モーメント荷重は常にゼロ)。同図によると、繰返し荷重に伴う塑性変形の蓄積状況を定性的ではあるが、弾塑性マク

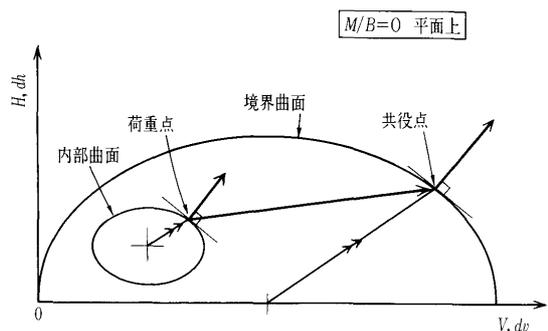


図-5.28 荷重空間における境界曲面と内部曲面

ロエレメント法によってよく表現できていることがわかる。

3) 弾塑性マクロエレメント法の応用 従来、構造物と地盤の相互作用を表現するために、構造物と地盤の間に鉛直、水平、回転に関する独立した三つのばねを導入する方法はよく知られている。しかし、実際に構造物と地盤の相互作用を取り扱う上では、地盤の塑性変形は無

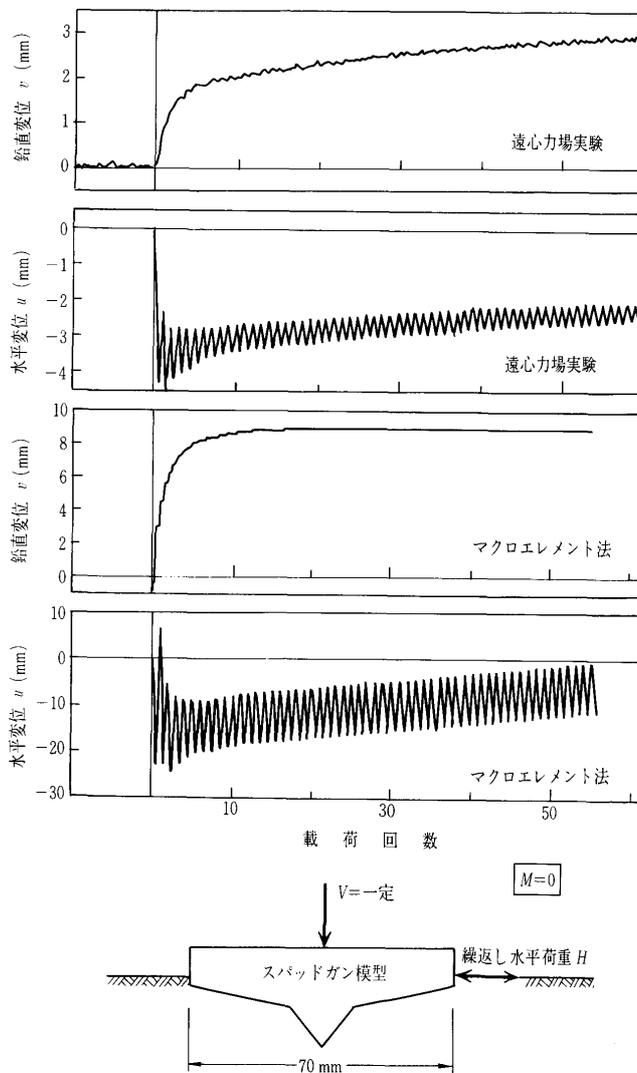


図-5.29 繰返し水平荷重荷重を受けるスパッドカンの実験挙動とマクロエレメント法による解析の比較¹⁸⁾

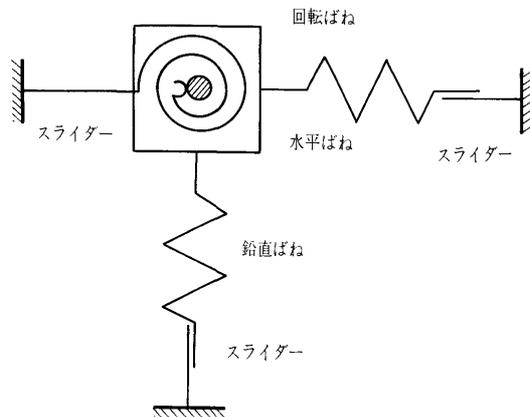


図-5.30 マクロエレメント法に対応する地盤のばね-スライダモデル

講 座

視できない。そこで図—5.30に示すように、地盤の塑性変形を記述できるように鉛直、水平、回転に関するばねにスライダを導入したモデルを考える。これらのばね-スライダが独立ではなく、ある降伏条件に従うようなモデルを弾塑性マクロエレメントであるとみることができる。

組合せ荷重を受ける多脚式の構造物の支持力解析に際して、それぞれの脚柱基礎に弾塑性マクロエレメント法を適用した Murff (マーフ) の試論²⁴⁾はその意味からも注目してよい。

5.4.2 Shakedown 解析の応用

Shakedown とは弾塑性力学の分野における術語である。ある系が繰返し荷重を受けるとき、最初は塑性変形が生じるものの、ある荷回数を超えると全く弾性的な挙動に落ち着くような現象を指す。したがって、shakedown が起こることは系の安定性にとっては好ましいことである。shakedown 解析とは、このような shakedown 限界荷重を求める解析である。もともとは構造工学、特にトラスやラーメンの弾塑性挙動を評価するために用いられていた手法である。

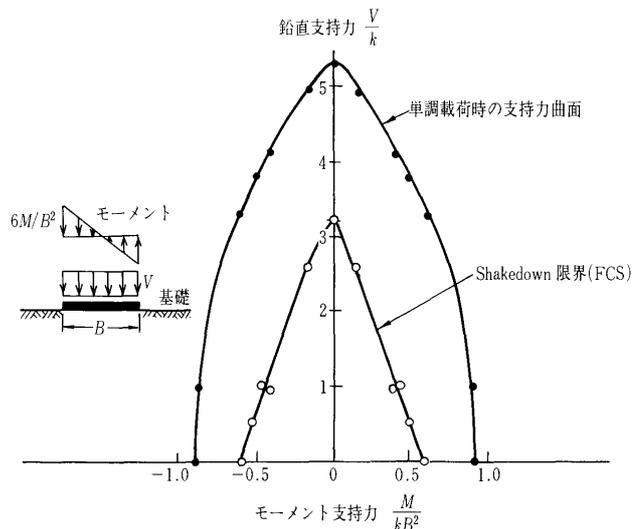
shakedown 解析には基本となる二つの定理が知られている。すなわち、運動学定理である Koiter (コイター) の定理²⁵⁾と、静力学定理である Melan (メラン) の定理^{26),27)}である。これらの定理は、極限解析における上界定理と下界定理を、それぞれ一般化した表現になっている。ここでは、Melan の定理に基づく shakedown 解析について説明する²⁸⁾。

Melan の定理の主張は次のようなものである。関連流れ則に従い、区分的に連続な降伏関数を持つ材料を考える。この材料が繰返し荷重を受けるときに、もし次式の関係：

$$f(\sigma_{ij}^e(s, t) + \sigma_{ij}^r(s)) \leq 0 \dots\dots\dots(28)$$

を満たすような残留応力場 $\sigma_{ij}^r(s)$ が存在すれば、系は shakedown する。ここに $\sigma_{ij}^e(s, t)$ は繰返し荷重に対する弾性解である。この定理で重要な役割を果たす残留応力場とは、応力境界 (自由表面) では外力=ゼロという境界条件を満たし、かつ物体力=ゼロという条件を満たすような釣り合い応力場 ($\sigma_{i,j,z}^r=0$) のことである。このような応力場はいくらでも考えることができる。例えば、ある境界値問題で得られた弾塑性解 $\sigma_{ij}(s, t)$ と、同じ境界条件のもとで解いた弾性解 $\sigma_{ij}^e(s, t)$ を用いて、ある応力場 $\sigma_{ij}^r(s, t) = \sigma_{ij}^e(s, t) - \sigma_{ij}(s, t)$ を定義すると、たしかにこの応力場は一種の残留応力場となっている。

Melan の定理に基づく解析を効率的に行うために、Maier (マイアー)²⁹⁾ は線形計画法を導入している。すなわち、連続体の shakedown 解析を行うために、有限要素法による空間離散化と降伏関数の区分的線形化を導入し、線形計画法として定式化している。この考え方に基づく shakedown 解析の一例として、Pande (パンデ) らによる鉛直荷重および繰返しモーメント荷重を受ける強度 k の Tresca (トレスカ) 材料地盤上のたわみ



図—5.31 繰返しモーメント荷重を受けるたわみ性基礎の shakedown 解析³⁰⁾

性基礎の支持力解析例³⁰⁾を図—5.31に示す。図中の FCS (First Cycle Shakedown) は1番目の周期の荷重によって系が shakedown に達するような荷重を意味する。この解析結果からも、両振りの繰返し載荷時には、支持力がかなり低下することがわかる。

なお、Pande らの解析ではたわみ性の基礎を対象にしていること、また地盤の引張り強度も考慮していることから、単調載荷に対する支持力曲面は前号の5.3.2に述べた Meyerhof (マイヤーホッフ) の有効基礎幅法に基づく支持力曲面とは異なる形状となっている。

5.4.3 今後の課題

繰返し荷重を受ける問題を解くにあたって、液状化解析のような連成有限要素解析と shakedown 解析の位置づけについてふれておきたい。液状化解析法は一般には、地盤-流体の2相系の連成問題を解く、汎用的で強力な解析手法である。しかしながら時間領域において逐次積分を行うため、海洋構造物のように極めて多い回数の繰返し荷重を受ける構造物の安定性を評価するには、巨額のコストと計算時間を必要とする。これに対して shakedown 解析は、1相系でかつ関連流れ則に従う材料が主たる対象という制約を受けるものの、基本的には外力1周期分の解析を行うだけで系の安定性を評価することができる利点を有する。

また、最終的な構造物の残留変形量を評価する場合にも、液状化解析では一般に時間領域において延々と逐次積分して残留変形量を求めざるを得ないのに対し、shakedown 解析では、Ponter (ポンター)³¹⁾ や Capurso (カプルソ)³²⁾ の方法を適用することにより、残留変形量の上限値を比較的簡単な計算で評価しうる場合が多い。

これらのことをまとめると、shakedown 解析法は完全排水条件の砂質地盤や、飽和粘土地盤上の構造物の挙動を手軽に解析できる可能性を有する。他方、間隙水圧挙動が重要となる地盤の液状化問題などの2相系の問題では、現状ではやはり時間領域において逐次積分を行う

必要があろう。この意味では効率的な数値計算アルゴリズムの開発は急務である。

参 考 文 献

- 15) Butterfield, R. and Gottardi, G.: A complete three-dimensional failure envelope for shallow footings on sand, *Géotechnique*, Vol. 44, No. 1, pp. 181~184, 1994.
- 16) Teunissen, J. A. M.: Analysis of Plasticity and Non-coaxiality in Geomaterials, Ph. D. Thesis, Delft University, 1991.
- 17) Davis, E. H. and Booker, J. R.: The bearing capacity of strip footings from the standpoint of plasticity theory, *Proc. 1st Australia-New Zealand Conf. on Geomech.*, Vol. 1, pp. 276~282, 1971.
- 18) Tan, F. S. C.: Centrifuge and theoretical modelling of conical footings on sand, Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1990.
- 19) Dyvik, R., Anderson, K. H., Madshus, C. and Amundsen, T.: Model tests of gravity platforms: Description, *Proc. ASCE, J. Geotech. Engng.*, Vol. 115(GT11), pp. 1532~1549, 1989.
- 20) 例えば O'Reilly, M. P. and Brown, S. F. (eds.): *Cyclic Loading of Soils*, Chap. 4, Blackie and Son Ltd., 1991.
- 21) Nova, R. and Montrasio, L.: Settlements of shallow foundations on sand, *Géotechnique*, Vol. 41, No. 2, pp. 243~256, 1991.
- 22) Georgiadis, M. and Butterfield, R.: Displacements of footings on sand under eccentric and inclined loads, *Can. Geotech. J.*, Vol. 25, pp. 199~212, 1988.
- 23) 例えば橋口公一: *最新弾塑性学*, 朝倉書店, 1990.
- 24) Murff, J. D.: Limit analysis of multi-footing foundation systems, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*(Siriwardane and Zaman eds.), pp. 233~244, Balkema, 1994.
- 25) Koiter, W. T.: General theorems for elasto-plastic solids, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1, pp. 166~221, North Holland, 1960.
- 26) Melan, E.: Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien IIa*, Vol. 147, pp. 73~87, 1938.
- 27) Melan, E.: Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ing. Archiv.*, Vol. 9, pp. 116~126, 1938.
- 28) Martin, J. B.: *PLASTICITY*, chap. 16~20, The MIT Press, 1975.
- 29) Maier, G.: Shakedown theory in perfect elasto/plasticity with associated and non-associated flow laws: A finite element linear programming approach, *Meccanica*, Vol. 4, pp. 259~260, 1969.
- 30) Pande, G. N., Davis, E. H. and Abdullah, W. S.: Shakedown of elasto-plastic continua with special reference to soil-rock structures, *Soils under Cyclic and Transient Loading* (Pande, G. N. and Zienkiewicz, O. C. eds.), Balkema, 1980.
- 31) Ponter, A. R. S.: An upper bound on the small displacements of elastic, perfectly plastic structures, *J. Appl. Mech.*, Vol. 39, pp. 959~963, 1972.
- 32) Capurso, M.: A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 10, pp. 72~92, 1974.