# 3．逆解析の手法

佐　藤　忠　信（さとう　ただのぶ）
京都大学教授　防災研究所耐震基礎部門

## 3.1　ま え が き

本章では逆解析でよく用いられる最小二乗法[1]，最尤法[2]，ベーズ法の概念[3]を簡単に説明した後，ベーズ法に基づいてカルマンフィルター[4]を誘導し，拡張カルマンフィルター[5),6]を誘導する。数学的な厳密性にはあまりこだわらず，初心者に分かりやすく解説を行った。また，簡単な例題を設定して，逆解析のアルゴリズムを把握しやすくしてあるので，例題を参照しながら本文を読んでもらいたい。

## 3.2　最　尤　法

### 3.2.1　線形最小二乗法によるパラメーターの推定

最初に推定したい未知量と観測値とが線形の関係で表される簡単な場合を対象として説明を行う。未知量を $n$ 次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ とし，その値を $m$ 個の観測値から推定することを考えよう。$m$ 個の観測値を成分とする $m$ 次元のベクトル $\boldsymbol{z}$ を考え，$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x}$ の間に次のような関係があるとする。

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \quad \cdots\cdots (1)$$

ただし $\boldsymbol{H}$ は（$m\times n$）の既知の行列である。$m$ が $n$ より大きい場合，すなわち，観測値の数が未知量の数より多い場合には，式(1)のすべての条件を満たす解 $\boldsymbol{x}$ を求めることはできない。そこで，次のような評価関数を最小にするように $\boldsymbol{x}$ を定めることにする。

$$J_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに，$\boldsymbol{W}$（$m\times m$）は重み行列であり，観測値の重要度や信頼度に基づいて設定されるものである。$J_1$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を $\hat{\boldsymbol{x}}$ で表せば，$\hat{\boldsymbol{x}}$ は次式を満たす。

$$dJ_1=-d\hat{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}})=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

したがって，$\hat{\boldsymbol{x}}$ は次式で与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{z} \quad \cdots\cdots (4)$$

これは重み付き最小二乗法の式としてよく知られているものである。

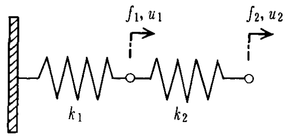
式(4)の $m$ と $n$ が一致するときには，式(1)を連立方程式と考えて解いた形になり，解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}&=(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{z}\\&=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{H}^T)^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{z}\end{aligned} \quad \cdots\cdots (5)$$

また，$m$ が $n$ より小さくなったときは，条件が不足して $\boldsymbol{x}$ を式(1)から求めることはできなくなる。当然のことながら，式(4)の逆行列は意味のないものになっている。この場合には，$\boldsymbol{x}$ に関する先験的な情報を利用して $\hat{\boldsymbol{x}}$ を求めることがよく行われる。これが後に述べるベーズ法になる。

**例題　1**

**図—例1**に示すように二つのばねからなる系を考え，以下に示すような3種類の外力の組み合わせに対し変位 $u_2$ が観測されている場合を対象として，ばね係数の値を決定する問題を考える。（この系のばね係数 $k_1$ と $k_2$ の厳密な値は以下の計算過程においては必要でないが，参考のために述べておくと0.5と1.0である。したがって，観測①と③は誤差を含んでおり，観測②は厳密な変位が観測されたことになっている。）




**図—例1**

$$\text{①}\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\quad u_2=2$$

$$\text{②}\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\quad u_2=5 \quad \cdots\cdots (\text{e1-1})$$

$$\text{③}\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix}\quad u_2=7$$

まず，問題を解くための準備として，節点1と2に外力 $f_1$ と $f_2$ が作用しているときの変位 $u_1$ と $u_2$ の関係式を求めると，次式が得られる。

$$u_1=\frac{f_1}{k_1}+\frac{f_2}{k_1}\qquad u_2=\frac{f_1}{k_1}+\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)f_2 \quad \cdots\cdots (\text{e1-2})$$

観測されているのは変位 $u_2$ のみであるから，式(e1-2)の第2式で，$x_1=\dfrac{1}{k_1}$，$x_2=\dfrac{1}{k_2}$ とおき，観測された関係式を代入すれば，式(1)に対応する方程式（観測方程式と呼ばれる）として次式を得る。

$$\begin{Bmatrix}2\\5\\7\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (\text{e1-3})$$

いま，式(2)に現れる重み行列を単位行列と仮定すれば，式(4)の計算に必要な変量は次式のように与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{Bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{k_1}\\\dfrac{1}{k_2}\end{Bmatrix}\qquad \boldsymbol{z}=\begin{Bmatrix}2\\5\\7\end{Bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\2&2\end{bmatrix}\qquad W=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$H^TWH=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&7\\7&6\end{bmatrix}$$

$$(H^TWH)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6&-7\\-7&9\end{bmatrix}$$

したがって，最適推定値は以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{Bmatrix}=(H^TWH)^{-1}H^TWz$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6&-7\\-7&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\5\\7\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{Bmatrix}9\\7\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.8\\1.4\end{Bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(el-4)}$$

### 3.2.2 最尤法によるパラメーター推定

(1) 尤度関数の定義

対象としている系の応答の観測値を$z$（$m$次元ベクトル）とし，その真値$z_0$が与えられている場合を考えると，観測誤差$\varepsilon$（$m$次元ベクトル）は次式で与えられる。

$$\varepsilon=z-z_0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$\varepsilon$の確率密度関数$p(\varepsilon)=p(z;z_0)'$が与えられているものとする。

ここで，実際に得られた観測値$z$から真値$z_0$を推定することを考える。一つの観測値$z_1$が得られれば，真値$z_0$は$z_1$の近傍にあると考えられる。そこで，観測値$z_1$を定数として，真値の推定値$\hat{z}$に関する次式のような関数を定義する。

$$L(\hat{z}|z_1)=p(z_1;\hat{z})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$L(\hat{z}|z_1)$は観測値$z_1$が与えられたときの推定値$\hat{z}$に関する尤度と呼ばれている。$p(z;z_0)$は真値が$z_0$であるとき，実際に得られた値$z$が観測される確率を表しているので，$L(\hat{z}|z_1)$の値が大きい場合には観測値$z_1$に対し，真値$z_0$が$\hat{z}$の近傍にある可能性が高く，逆に$L(\hat{z}|z_1)$の値が小さければ，真値$z_0$が$\hat{z}$の近傍にある可能性は低くなる。

さらに観測を繰り返して，$z_1$，$z_2$，…，$z_k$が得られたとすると，これら$k$個の観測ベクトルを総合して，真値の推定値（最尤推定値）$\hat{z}$の尤度関数$L(\hat{z})$を求めるためには，各々の観測ベクトルに対して定義された$k$個の尤度関数の積をとればよい。

$$L(\hat{z})=\prod_{i=1}^{k}L(\hat{z}|z_i)=\prod_{i=1}^{k}p(z_i;\hat{z})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

尤度関数を概念的に理解するために，観測値がスカラー値で与えられる場合を考えてみる。今，観測値が1個与えられたとし，それを$z_1$とすれば，**図—1**に示すように尤度関数は確率分布関数の左右を，式(7)では$z_1$が定数で$\hat{z}$が変数となるので逆転させ，中心を$z_1$に置いたものになっている。観測値の数が多くなるにつれて，それらを総合して求めた尤度関数は，最尤推定値$\hat{z}$が真値$z_0$に近づき，その分布幅も観測値の確率分布関数$P(z;z_0)$の分布幅よりしだいに狭くなっていくことがわかる。

以下に，観測誤差ベクトル$\varepsilon$が多次元正規分布で表される場合について尤度関数を求めておく。この場合には観測ベクトル$z$が得られる確率は

$$p=(z;z_0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|R_1|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z-z_0)^TR^{-1}(z-z_0)\right\}$$

と表現できる。ここに，$R$は観測値に対する共分散行列である。したがって，観測ベクトル$z_1$が与えられたとすれば，尤度関数は次式となる。

$$L(\hat{z}|z_1)=p(z_1;\hat{z})$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|R_1|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1-\hat{z})^TR_1^{-1}(z_1-\hat{z})\right\}\cdots(9)$$

ここに，$R_1$は観測ベクトル$z_1$に対する共分散行列である。

各観測ベクトル$z_i$について与えられる式(9)と同様な関数を式(8)に代入すれば，$k$個の観測ベクトルが与えられたときの尤度関数として次式を得る。

$$L(\hat{z})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}|R_1||R_2|\cdots|R_k|}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(z_i-\hat{z})^TR_i^{-1}(z_i-\hat{z})\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

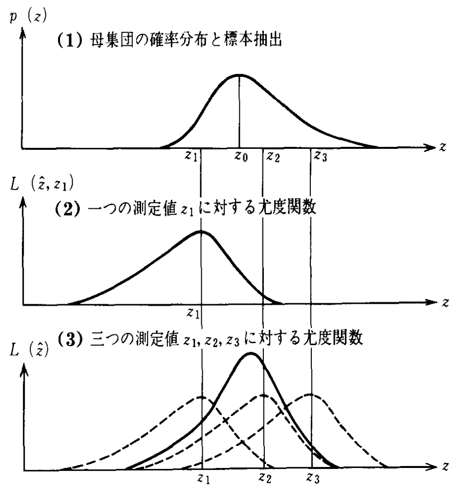
尤度関数を最大にする$\hat{z}$が最尤推定値となるが，観測誤差が正規分布に従うときには，式(10)のexpの中の値を最小にすればよい。すなわち，次式の評価関数を最小にするように$\hat{z}$を定めればよい。

$$J_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(z_i-\hat{z})^TR_i^{-1}(z_i-\hat{z})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

すなわち，

$$dJ_1=-d\hat{z}\sum_{i=1}^{k}R_i^{-1}(z_i-\hat{z})=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

これから$\hat{z}$が次式で与えられる。




**図—3.1** 誤差の確率密度関数と尤度関数
(1) 母集団の確率分布と標本抽出
(2) 一つの測定値$z_1$に対する尤度関数
(3) 三つの測定値$z_1$，$z_2$，$z_3$に対する尤度関数

$$\hat{z}=\left[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{R}_i^{-1}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{z}_i\right]\cdots\cdots(13)$$

式(13)は，$k$個の観測ベクトルが与えられたときの真値$\boldsymbol{z}_0$の最尤推定値が，観測ベクトルの共分散行列の逆行列を重みとして観測ベクトルを重み付き平均した値になり，最小二乗法の結果と一致することを示している。

(2)　尤度関数を用いたパラメーター推定

今モデルのパラメーターの推定値を$\hat{\boldsymbol{x}}$とし，この値を用いて理論的に計算される$\boldsymbol{z}$の値を$\hat{\boldsymbol{z}}$とし，それが式(1)と同様に

$$\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}\cdots\cdots(14)$$

と表されるものとする。式(14)を式(13)に代入すれば，次式を得る。

$$d\hat{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{H}^T\left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{z}_i-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}\right)=0\cdots\cdots(15)$$

したがって，パラメーターの推定値$\hat{\boldsymbol{x}}$は次式で与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\left[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{H}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{z}_i\right]\cdots\cdots(16)$$

式(16)で観測ベクトルが1個のとき，すなわち，$k=1$の場合を考えると，$\hat{\boldsymbol{x}}$は次式となる。

$$\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{z}_1$$

この式で，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{R}_1^{-1}$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_1$と置き換えれば，上式は式(4)と一致する。

線形最小二乗法では観測ベクトルが1個の場合を対象として評価関数$J_1$を定義したのに対し，ここでは観測ベクトルが$k$個あるとして評価関数を定義している。しかし，両者は観測ベクトルの次元を変えれば，同じ形式になる。いま，新しく以下のような観測ベクトル，最尤推定ベクトルと重み行列を定義すれば，

$$\boldsymbol{z}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{z}_1\\\boldsymbol{z}_2\\\vdots\\\boldsymbol{z}_k\end{Bmatrix}\quad\hat{\boldsymbol{z}}=\begin{Bmatrix}\hat{z}\\\hat{z}\\\vdots\\\hat{z}\end{Bmatrix}\quad\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1^{-1}&0&\cdots&0\\0&\boldsymbol{R}_2^{-1}&\ddots&0\\0&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\boldsymbol{R}_2^{-1}\end{bmatrix}$$

式(11)は次式のように書き換えられる。

$$J_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}})^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}})\cdots\cdots(17)$$

いま，$\hat{\boldsymbol{z}}$と$\hat{\boldsymbol{x}}$の関係を表す関係式として，

$$\boldsymbol{z}=\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{x}$$

が与えられているとし，これを式(17)に代入すれば，$\hat{\boldsymbol{x}}$を決めるための評価関数として，式(4)と同じ形式の次式を得る。

$$J_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\tilde{\boldsymbol{H}}\hat{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\tilde{\boldsymbol{H}}\hat{\boldsymbol{x}})$$

したがって，評価関数の最小化に当たっては，式(11)で観測ベクトルが1個の場合に得られる，以下の評価関数を最小化するアルゴリズムを展開しておけば，十分である。

$$J_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}})^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}})\cdots\cdots(18)$$

ただし，$\boldsymbol{W}$と$\boldsymbol{R}$との間には次式の関係が成立している。

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{R}^{-1}$$

確率論に基づく逆解析と確定論に基づく逆解析の本質的な違いは，評価関数の重み行列の意味の違いにあるが，重み行列が共分散行列の逆行列で与えられる場合には確定論に基づく逆解析と確率論に基づく逆解析は同じものになる[7]。

(3)　非線形最小二乗法

$\boldsymbol{z}$が式(1)のようにパラメーターの線形結合で表されるのではなく，$\boldsymbol{x}$の任意の$m$次元の非線形関数$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$で表現される場合を対象とした理論を展開する。式(18)で

$$\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\cdots\cdots(19)$$

とすれば，次式を得る。

$$J_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))\cdots\cdots(20)$$

式(20)を最小とする$\boldsymbol{x}$を求めるためには，最急勾配法，共役勾配法，ニュートン法などの最適化手法（**4**章で概説する）が必要である。以下にガウスニュートン法に基づいて最小点を求めるアルゴリズムを説明する。

いま，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$を$\boldsymbol{x}_k$の周りで一次のオーダーまで展開した次式で近似する。

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\approx\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k)\cdots\cdots(21)$$

ここに，$\boldsymbol{H}_k$は（$m\times n$）次元の行列であり，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{x}$についての微係数の$\boldsymbol{x}_k$における値で

$$\boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial h_m}{\partial x_1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\dfrac{\partial h_1}{\partial x_n}&\cdots&\dfrac{\partial h_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x=x_k}$$

と表される。これを式(18)に代入し$J_1$を改めて$J_1'$とおけば，次式を得る。

$$J_1'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x})^T$$
$$\cdot\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x})\cdots\cdots(22)$$

したがって，

$$dJ_1'=-d\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x})=0$$

より，$J_1'$を最小にする$\boldsymbol{x}$として次式を得る。

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_k+(\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{W}\{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)\}\cdots\cdots(23)$$

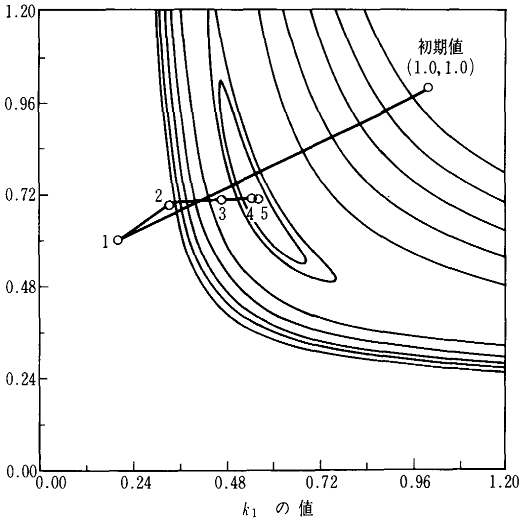
式(23)の$\boldsymbol{x}$は式(22)を最小にするが，式(20)を最小にするわけではないので，式(23)で与えられる$\boldsymbol{x}$を改めて$\boldsymbol{x}_{k+1}$とおいた次式を用いて，

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+(\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{W}\{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)\}\cdots\cdots(24)$$

収束が得られるまで$k$についての更新を行って$J_1$の最小点を求めればよい。

(4)　誤差の確率密度関数が正規分布以外のとき

最尤法によれば，観測誤差ベクトルの確率密度関数が正規分布に従わないときでも，その分布特性が与えられていれば，パラメーターの推定値を求めることは可能である。式(8)に式(19)を代入すれば，




図—例2　観測方程式が非線形の場合の評価関数 $J_1$ の等高線と収束過程（ガウスニュートン法による）

$$L(\tilde{z})=\prod_{i=1}^{k}p(z_i;\tilde{z})=\prod_{i=1}^{k}p(z_i;\boldsymbol{h}(\hat{x}))=L(\hat{x}) \quad \cdots\cdots(25)$$

式(25)の対数をとった対数尤度関数

$$\log L(\hat{x})=\sum_{i=1}^{k}\log p\{z_i;h_i(\hat{x})\} \quad \cdots\cdots(26)$$

を用いて，この最大値を与えるような $\hat{\boldsymbol{x}}$ を求めればよいことになる。

**例題2**

**例題1**では $x_1=\dfrac{1}{k_1}$，$x_2=\dfrac{1}{k_2}$ と置いたので，観測方程式が線形となったが，

$$\boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k_1\\k_2\end{Bmatrix}$$

とすると，観測方程式が非線形になるので，式(24)に基づいた繰返し計算が必要になる。

**例題1**の式(e1-2)の第2式を書き直すと，

$$u_2=(f_1+f_2)\frac{1}{x_1}+f_2\frac{1}{x_2}$$

となるので，**例題1**の式(e1-1)の観測値を上式に代入すれば，観測方程式として次式を得る。

$$\begin{Bmatrix}2\\5\\7\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\\[2mm]\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\\[2mm]\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(\mathrm{e}2\text{-}1)$$

式(e2-1)の右辺は式(19)の $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ に相当するから次式を得る。

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\begin{Bmatrix}h_1(x_1,x_2)\\[2mm]h_2(x_1,x_2)\\[2mm]h_3(x_1,x_2)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\\[2mm]\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\\[2mm]\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(\mathrm{e}2\text{-}2)$$

式(24)に基づいた繰返し計算のためには，$\boldsymbol{H}_k$ と $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)$ の値が必要となるが，それらは $k$ 回目の繰返し段階での $\boldsymbol{x}$ の値を次式のように表現すれば，

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{Bmatrix}x_{1,k}\\x_{2,k}\end{Bmatrix}$$

以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2}\\[2mm]\dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2}\\[2mm]\dfrac{\partial h_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x=x_k}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{x_{1,k}^{\ 2}} & -\dfrac{1}{x_{2,k}^{\ 2}}\\[2mm]-\dfrac{2}{x_{1,k}^{\ 2}} & -\dfrac{1}{x_{2,k}^{\ 2}}\\[2mm]-\dfrac{2}{x_{1,k}^{\ 2}} & -\dfrac{2}{x_{2,k}^{\ 2}}\end{bmatrix} \cdots(\mathrm{e}2\text{-}3)$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{x_{1,k}}+\dfrac{1}{x_{2,k}}\\[2mm]\dfrac{2}{x_{1,k}}+\dfrac{1}{x_{2,k}}\\[2mm]\dfrac{2}{x_{1,k}}+\dfrac{2}{x_{2,k}}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(\mathrm{e}2\text{-}4)$$

**図—例2**に $\boldsymbol{x}$ の初期値を $x_1=1.0$ と $x_2=1.0$ としたときの収束過程を示した。図中の○印に添えられた数字は繰返し回数を意味している。また，図中の曲線は式(20)に定義された評価関数の等高線を描いたものである。5回の繰返しで評価関数の極小点へ到達していることが分かる。このときの $\boldsymbol{x}$ の値は

$$\boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.5555556\\0.7142856\end{Bmatrix}$$

であり，**例題1**の答の逆数になっていることが分かる。**例題1**では簡単な線形代数の計算で問題が解けたが，同じ問題でもパラメーターの設定の仕方によって問題が非線形になり，かなり複雑な計算を行わないと求めようとする解が得られないばかりでなく，時には解の収束しないような事態が発生する。逆解析では観測方程式を書き下すときに，変数変換などを行って，できるだけ線形問題に帰着できるような努力をすることが，問題の見通しをよくする一つの方法である。なお，非線形問題では $\boldsymbol{H}_k$ を解析的に求めることが困難な場合が多いので，数値微分によって計算するのが一般的である。

## 参　考　文　献

1) 中川　徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1986.
2) Ang A. H-S. and Tang W. H.：土木・建築のための確率統計の基礎（伊藤・亀田訳），丸善，1977.
3) Jazwinski A. H.：Stochastic process and filtering theory, Academic Press Inc., 1970.
4) 加藤寛一郎：最適制御入門，東京大学出版会，1987.
5) 有本　卓：カルマンフィルター，産業図書，1977.
6) 片山　徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，1983.
7) 吉田郁政・黒瀬浩公・福井史朗：確率論に基づく逆解析手法の基礎的研究，土木学会論文集，No. 483/I-26, pp. 61～68, 1994.

（以下，次号に続く）