

厳密と曖昧

広 中 平 祐 (ひろなか へいすけ)

山口大学 学長

曖昧,あるいは厳密ということに対して,数学者はいろいろな形で苦労を重ねてきました。ある意味で,数学者にとっては非常に勇気づけられるような,昔からの考え方があります。例えば,紀元前100年ぐらいに書かれた「ソロモンの知恵」がありますが,その中に「御身は,すべてのものを,尺度と数と重さによって整えた」という文章があるんですね。こう言うと,やっぱり数学というのは数の学問だから,それをやっている人間というのは,紀元前のころから非常に注目された学問ではないかと,そのように思います。

数学のように非常に厳密な学問において,すべてのものを厳密にしようとするほど,何か限界が出てくる。限界が出てくるというのは,考える範囲が狭くなるということ。そういうことは,ここ数十年の間に数学者が感じ始めてきたものです。それで,いろんな悪戦苦闘が始まるわけです。一番有名なのは,前世紀の終わりごろの話ですが,パートランド・ラッセルという人のパラドックス。それ以外にもたくさんのパラドックスが立て続けに出てきますが,パートランド・ラッセルのパラドックスというのは集合論に対するパラドックスです。これはいろんな表現があります。一つ例をあげますと,国会図書館にはあらゆる図書があります。特に,目録,図書目録,いろんな図書館それぞれに図書目録という図書があるわけですが,その図書目録という図書もたくさん集めてあります。ところが,ほとんどの図書目録は図書目録そのものは目録の中に入っていないのです。そこで,国会図書館としては,図書目録そのものが入っていない図書目録ばかり集めて,その目録をつくろうと考えました。そのときに気付いた問題は,図書目録を含まない図書目録という本ですから,新しくできた本そのものは目録の中へ入れたらいいのかどうかということです。しかし,図書目録自身が入っていない図書目録は全部網羅した目録をつくろうということですから,もし自分を入れなかったら,自分が入っていない目録になるので,自分も入れなきゃいかん。逆に自分を入れれば,自分の入った目録が入ったことになって目的に反する。それでは,もうどうしていいかわからない。こういう話です。

一方,コンピューターの発展は,いろんな形で強烈に数学に影響してきました。それは単に数学を教える道具というようなことだけではない。グラフィック等を使った人間の目による理解,いわば問題の可視化。目で見えるようにするということはコンピューターを使って非常にうまくできるようになったわけです。すると,今まで

考えられなかったような数学も出てきたわけで,その一番典型的なものがジュリアセットの研究です。これは例えば,世の中には非常に複雑な形状を持ったものがありますが,その多くは単純な操作を非常にたくさん繰り返すと表せるという考え方です。例えば $z^2 + (\text{何かの平方根})$,といった非常に単純な操作があります。ジュリアセットで出てくるのはすべて二次式であって,二乗と足し算,掛け算,それから平方根をとるという操作だけです。一つ一つの操作は非常に簡単で,それを非常にたくさん何十万回,あるいは何百万回と繰り返すと,きわめて複雑なものが表せるわけです。

実はこれがフラクタルの考え方の根本でもあります。その考え方をもっと進めると,例えば画像,あるいは動画,そういうものを電送しようというときに,要するにメッシュをして,それぞれの点に値を与えてどんどん送ると,大変な情報量になるわけです。

フラクタルというのは単純な操作を非常にたくさん繰り返せば複雑なものができるということですが,その背後に一つの自然観があります。その自然観を支える考え方に直線とはという問題があります。これはニュートン,ライプニッツの時代からあったわけですが,それはどういう問題かというところ,これはちょっと数学の問題ですから考えてみてください。曲線があって,その曲線が次のような性質を持っているとする。いまエプシロン・ポジティブを与えた場合,そのエプシロン・ポジティブよりも短く区切ることができて,どの区分もそれぞれがもとの全体と相似形である。そういう性質を持った曲線というのはどういう曲線かということです。

こういう性質というのが化学にもよく出てきますが。その答は非常にはっきりしています。もし曲線というのがあらかじめ2回微分できて,それが連続であるというような関数で描ける曲線だったら,今のような性質を持っている曲線は真っ直ぐな直線しかありません。直線はもちろんどんなに小さく区切っても,それぞれがもとと相似形になるわけです。なぜ,2回微分できたらそうならざるを得ないかというと,これは2回微分できればいわゆる曲率が各点で定義されるわけです。曲率が無限大,曲率がゼロでない限り,曲率というのは広げると変わってくるわけです。相似形で不変の数ではないわけです。だから,曲率がゼロでない限り部分が全体と相似形になるはずはありません。だから,曲率ゼロの曲線,すなわち直線しかないというわけです。

今度はそういう微分可能という仮定を無視すると,部

特別講演

分が全体と相似形であるという特性を持った曲線は山ほどあるわけです。それがフラクタルというものなんです。フラクタルというのは、特定の操作を全体に当てはめ、その操作によってできる各部分に同じ操作を縮小して当てはめる。また、そこで出てくる小さい区分について同じ操作を当てはめるという形でどんどんつくっていくわけですから、当然そういう自己相似性、つまりインナシミラリティーを持っているわけです。しかし、そういう曲線は全微分もできないような、要するに微係数が存在しないような曲線になるわけですね。すなわち、山の稜線であれ、海岸線であれ、我々が普通見るもののほとんどはフラクタル的ですが、しかし、真っ直ぐ進んでいく光みたいなものもあるわけで、どうもその中間みたいなものがない。そういう考え方なんです。

それから、ファジー理論がありますが、これも今世紀の中ごろをちょっと過ぎたころに出てきた理論だったと思います。インド系の数学者で、サディという人が提案した理論です。彼は小さな論文を書いたわけですが、そのときにはほとんどの数学者は相手にしなかったわけです。なぜかという、そういう理論というのは確率論で実際に説明しようと思えばできるわけです。だから何も新しい理論という必要はないではないかと。そういうふうにいわれていたわけです。それが一つの物の見方として、不思議に、いわゆるかなり観念的にあまり厳密でなく、しかも要領よく理解し合うという世界では、観念として非常にうまく使えるわけですね。

実際にはこれもコンピューターが発達したおかげでできているわけで、コンピューターが発達しなかったら、全く無視されるような理論です。コンピューターが発達すると、いわば表から見るとファジー、あるいはブラックボックスみたいに見えるけれども、中では大変な準備をして、いわば大変な確率論を展開して、そしてそれは内蔵されて、場合によってはそれが汎用化されるような形につくられる。そういうことができれば、これはもう汎用化したものが内蔵されるわけですから、結構使いものになってきます。それもコンピューターの発達のおかげだと思うわけです。

いずれにしても、コンピューターのおかげで特に工学の人たちも何らかの関心が持てるような分野を非常に推し進めてきたわけです。それと同時に純粋数学にも非常に大きなインパクトを与えたんですね。それは何かというと、理論の価値判断です。例えば、数学的な推論、論証とか、我々数学者がよく証明を書きます。これだからこうであると証明を書きます。証明が実に単純明快ですばらしいということがありますが、実際にそれをコンピューターで実行すると、途方もなく時間がかかってしまう。そうなってくると、実際にはそれはいいと言えるのかどうかという問題です。

そこで、もう一度論理の方に返ります。たしかラッセルだと思いますが、論理学というのは数学の青年であり、数学は論理学の壮年であるとか何とか、そういうふうに言ったみたいです。論理学というのもゲーデルなんか

が問題にしたように、非常に厳密に空集合が存在するところから始めて、全部証明していこうと。矛盾があるとかないとか、完全性があるとかないとか、そういう種類のことをやる人もいるわけです。これも大変な操作です。一方、もうちょっと実用的なというか、もっとナイーブなそういう論理学もあります。

それはある状況を設定して、それに対する解答は欲しい。どんな解答だろうと考えて、多分これぐらいが解答になるだろう。そうだとしたら、それをどういうふうに証明する公理系を設定したらいいか。現象から逆上って公理系をつくる。公理系をつくれれば、非常に簡単な公理系から結果を証明する。それをコンピューターでもできるようにする。だから、公理系をつくる。そうすると、またその公理系がほかの現象で役に立つかもしれない。しかも、それが非常に論理的に有限個のステップでできるわけですから、答は明確になるということです。

最後に一つだけ言っておきます。成長過程では曖昧というのが非常に大切だし、有効にきく。ところが、成人して、壮年、さらに熟年に至ったときには、曖昧というのが非常に高いコストを伴う。そういう話です。例えば、新しいベンチャービジネスを始めようというときに、よくハイテクのベンチャービジネスが非常に困るのは、もうけ始めると特許に関連して訴えられる可能性がある。特に大企業が訴える。もうけていないときには訴えてもしょうがないのですが、もうけ出して本当に発展し出すと訴えるということがあるから、それに対して、訴える前に保険をかけなきゃいかん。特許に関する保険というのがあるわけです。また、その保険料が高くて、一生懸命働いてどんどんもうけているけれど、ほとんどが保険料にいつてしまう。それで非常に苦勞をしているというベンチャービジネスも結構あるわけです。特に、独自でやっているようなベンチャービジネスですけれどね。

そういう点で、曖昧を消去するためのエネルギーとコストというのがあまりにも大きいから、発展段階ではとにかくいさかいがあっても、きょうはお互いに許しましょうよとか、借りにしておきますよと、いつかお返ししますよというような感じで、あるいは恩にきますよとか何とか言って済ませていた方がよっぽど安上がりだ。それは官庁でも大学でも、いろんな企業でも同じことですが、適当に曖昧にしていって、情報も隠しておいた方がうまくいく。総会屋に少々払ってでも、曖昧にしておいた方が結局は安上がりという時代があるんですが、そういう時代というのはまだどんどん成長している青年期なんですね。それが壮年期に来て、やがて熟年期に来たときには、曖昧というものにコストがかかってくるわけです。インドネシアの現象を見ても、アジアのフォードラゴンズと言われたようなところの急成長を見ても、そして今壮年期に達して曖昧に対する高いコストを払っている状況ではないかと思うんです。日本も明らかに曖昧が高価なコストになる時代に来たと思います。

(文責：松田 博 山口大学工学部)

(原稿受理 1998.8.17)