The Japanese Geotechnical Society

報文—2685

弾性論による地中埋設管のバックリング挙動の検討

A Study on Buckling of Buried Pipes Based on Elastic Theory

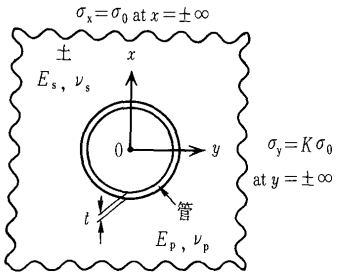
東田　淳（とうだ　じゅん）
大阪市立大学助教授　工学部

1. まえがき

かつて Luscher & Höeg[1]は，土と地中埋設管の相互作用としての埋設管周囲の土の挙動を，①管の変形による土圧の再分配，②管と土の鉛直方向の相対変位によるアーチ作用，③管がバックリングする時の拘束作用に分類した。著者はこれまで土と管の相互作用を実験的，解析的に調べ，上述の①，②について解明を終え，相互作用を説明するモデルとして従来用いられてきたばねモデルと連続体モデルのうち，**図—1**に示す連続体モデルの方が正しいと結論した。そして，このモデルに対する弾性解[2]を埋設管の設計概念として示し，この概念に基づく埋設管の合理的設計法を提案した[3]。本報告は，残る③の埋設管のバックリング挙動を連続体モデルを用いて弾性論的に考察するものである。

近年，地中構造物のバックリング破壊が懸念される施工事例が増えている。地中埋設管の分野では，プラスチック製の大口径薄肉たわみ性管が多用される傾向にあるが，中には50 m を優に超える高盛土下に排水管として埋設され，バックリング破壊する事例が生じている。また，7.35 MPa (75 kgf/cm^2) という高い内圧が働くガス鋼管が出現し，内圧がゼロになった時のバックリングが懸念される。トンネルの分野では，那珂導水路水戸トンネルの内巻鋼管のバックリング事故が発生し，シールドトンネルの二次覆工の新工法として近年施工実績が増大している内挿管工法も，水戸トンネルと基本的に同じ問題を抱えている。このような状況から，従来のバックリング理論の問題点を整理し，バックリング挙動の新しい解法を提示することは意義あることと思われる。

バックリングに関する既往の研究[4),5)]によれば，Forrestal ら[7]と Moore ら[6]が求めた連続体モデルのバックリング解が理論上の到達点と思われる。彼らの解法は以下のとおりである。①管厚は管径に対してごく小さく，管は不伸張変形（中立軸のひずみがゼロ）するものとする。②管に等方土圧 p_0 が働いている状態を初期状態とし，この状態で管は真円であるとする。③円筒シェルの理論によって管部分の釣合い式を導く。④この釣合い式に含まれる外力項が管の変形によって変化するとする。⑤釣合い式を，管と土の境界が滑動と結合の二つの条件に対して解く。



図—1　連続体モデル

Forrestal らは，外力の変化項として非線形有限変形理論を用いて求めた土要素の応力を与えている。一方，Moore らは外力項として $p=p^a+p^i+p^e$ を与えている。p は管面に働く垂直応力とせん断応力，p^a は線形微少変形理論によって求めた地盤の応力，p^i は管の変形に伴って生じる p_0 の方向変化分を表す。p^e は，Moore によれば p^a と p^i 以外の外力を表し，例えば管の初期不整や不均一な土圧分布の影響を表す外力である。また，両者とも，変形後の等方土圧 p_0 の方向として，管面に垂直な場合と変形前から変化しない場合を仮定し，Moore らはさらに p_0 が管の中心を向く場合も扱っている。

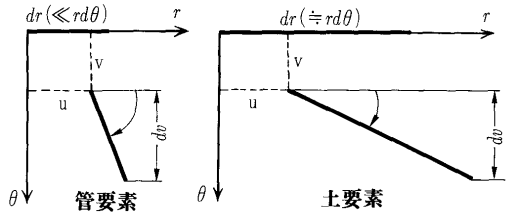
両者の解は基本的に一致しているが，その解はまだ検証されたとはいえない。それは，真円の管に等方土圧 p_0 が働く初期状態の物理的意味がクリアーでなく，また，3 とおりの等方土圧 p_0 の方向変化と 2 とおりの管面の境界条件のうち，どれをとるべきかを明確にしていないため，実験による検証があいまいになっているためである。そこで，本報告では，あいまいさをできるだけ排除した新しい解法を用いて連続体モデルのバックリング解析を行い，得られた解を実験結果と照合した。

2. 問題の設定と解法の着眼点

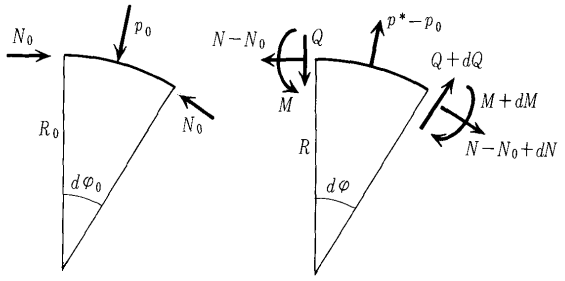
Novozhilov の非線形弾性理論[8]に基づいて問題の設定を行う。管と土は線形弾性体とする。管と土のひずみは微少とし，変位量は線素の元の長さに比べてごく小さい（ただし有限）とする。ここで，**図—2**に示すように，非常に薄い管要素（$rd\theta \gg dr \fallingdotseq 0$）と，$dr \fallingdotseq rd\theta$ の寸法を持つ土要素の線素 dr を考える。この場合，図に示すように例えば変位増分 dv の大きさが両要素で同じであっても，線素の回転角は管要素の方が土要素よりもはるかに大きい。よって，薄肉の管の変形を考える時は，変位が微少であってもこの回転を無視できず，解析には有限変形理論を適用すべきである。一方，土要素の変形を考える時は，変位が微少であれば回転を無視できるので，解析に微少変形理論を適用できる可能性がある。

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図—2　同じ dv に対する管・土両要素の回転角の比較



(a) 初期状態　　(b) 変形後

図—3　二つの釣合い状態

つぎに，図—2の例から分かるように，有限変形理論と微少変形理論は，実は同じ大きさの有限変位を扱っており，その違いは，釣合い式の定式化に当たって回転を考慮するか否かにある。このことは，管に働く外力がバックリング荷重近傍にある場合，図—3 (a), (b)に示す2とおりの釣合い状態が存在することを示す。すなわち，管に働く外力がバックリング荷重に到達する寸前（初期状態）では，回転の影響を無視した微少変形理論を適用できる釣合い状態が存在する。一方，外力がバックリング荷重に到達した瞬間には，回転を考慮した有限変形理論が適用できる釣合い状態が存在し得る。

著者は，以上の考察から次に示す解法を考えついた。

① バックリングが生じる前の初期状態を以下のように規定する。管と土の変形を微少と仮定し，この状態に対して，微少変形理論に基づく著者の解[2]が適用できるとする。この時，管はたわむが，仮定によりその量は微少であるから，管を近似的に真円とみなし，管の曲げ剛性が軸剛性に比べて微少の時の解から得られる等方土圧が管に作用するとする。

② 外圧がバックリング荷重に到達した時，管は変形する。管の有限変形を表すため，変形後について釣合い式をたて，これを変形前の座標に変換する。一方，管の変形によって土要素の応力も変わるが，この土の応力変化は微少変形理論に従うとする。

3. バックリング解の誘導

解析の対象とした連続体モデルは図—1に示してある。土と管の弾性定数（ヤング率とポアソン比）は E と ν で表し，土には添字 s を，管には添字 p を付す。無限遠における鉛直，水平境界応力はそれぞれ $\sigma_0, K\sigma_0$ である。ここに，K は側方土圧係数で，バックリングを対象とする場合は，一般に静止土圧係数 $K_0=\nu_s/(1-\nu_s)$ をとれば良い。管面境界条件は，著者が既に指摘したように[2]，結合条件（管と土の変位が同じ）はプレキャスト管では存在しないので，実際に近い完全滑動条件（管面で働くせん断抵抗がゼロ，半径方向の変位は管と土で同じ）の場合のみを扱う。解析は平面ひずみ条件で行う。

図—3 (a)に示す初期状態において，管の微少要素の角度を $d\varphi_0$，半径（管の中心から管壁の中立軸までの距離）を R_0，管厚を t とする。土中管のたわみ性指数 κ，ならびに管の曲げ剛性 S_P と軸剛性 S_A を，$\kappa=E_s/S_p$, $S_p=E_pt^3/\{12(1-\nu_p^2)R_0^3\}$, $S_A=E_pt/\{(1-\nu_p^2)R_0\}$ とそれぞれ定義する。

初期状態に対する著者の解[2]によれば，管面位置における土要素の半径方向の垂直応力 σ_r，せん断応力 τ，半径方向変位 u_s，周方向変位 v_s は次式で表される。式中の Σ の項は $n(\geqq 4)$ に関する級数で，対称条件から n は偶数である。また $\mu=E_s/2(1+\nu_s)$ である。

$$\sigma_r=a_0R^{-2}+2b_0-(2a_2+6a_2'R_0^{-4}+4b_2'R_0^2)\cos(2\varphi_0)+\Sigma\{-n(1+n)a_n'R_0^{-n-2}-(n+2)(n-1)b_n'R_0^{-n}\}\times\cos(n\varphi_0)$$

$$\tau=(2a_2-6a_2'R_0^{-4}-2b_2'R_0^{-2})\sin(n\varphi_0)+\Sigma\{-n(1+n)a_n'R_0^{-n-2}-n(n-1)b_n'R_0^{-n}\}\sin(n\varphi_0)$$

$$u_s\cdot 2\mu=\{-a_0R_0^{-1}+2b_0(1-2\nu_s)R_0\}+\{-2a_2R_0+2a_2'R_0^{-3}+4(1-\nu_s)b_2'R_0^{-1}\}\cos(2\varphi_0)+\Sigma\{na_n'R_0^{-n-1}+(n+2-4\nu_s)b_n'R_0^{-n+1}\}\times\cos(n\varphi_0)$$

$$v_s\cdot 2\mu=\{2a_2R_0+2a_2'R_0^{-3}-2(1-2\nu_s)b_2'R_0^{-1}\}\sin(2\varphi_0)+\Sigma\{na_n'R_0^{-n-1}+(n-4+4\nu_s)b_n'R_0^{-n+1}\}\times\cos(n\varphi_0)\quad\cdots\cdots(1)$$

上式中の係数 $a_0, b_0, a_2, a_2', b_2', a_n', b_n'$ は無限遠ならびに管面の滑動条件から定まる定数で，次式で表される。

$$b_0=(1+K)\sigma_0/4,\quad a_2=-(1-K)\sigma_0/4,$$
$$b_2'=-a_2R_0^2-3a_2'R_0^{-2},$$
$$a_0=2b_0R_0^2\{(1-2\nu_s)(S_p+S_A)-2\mu\}/(S_p+S_A+2\mu),$$
$$a_2'=a_2R_0^4\{3S_p(1-2\nu_s)+2\mu\}/\{3S_p(5-6\nu_s)+2\mu\},$$
$$a_n'=b_n'=0\text{(初期状態においてのみ)}\quad\cdots\cdots(2)$$

管厚 t が小さく，たわみ性指数 κ が 10^3 よりも大きい場合，管の曲げ剛性 S_p よりも軸剛性 S_A の方がかなり大きくなり，管の変形挙動は S_A によって支配される。$S_A \gg S_p$ の時，S_p を無視すると，σ_r は一定となり，管に働く土圧 $p_0=\sigma_r$ と管壁の軸力 N_0 は，$p_0=\sigma_0S_A/(S_A+2\mu)$, $N_0=p_0R_0$ となる（$K=K_0$ の場合）。管壁の曲げモーメント M_0 とせん断力 Q_0 はともにゼロである。

次に，図—3 (b)に示す変形状態では，管要素の半径と角度が変形により $R, d\varphi$ に変化する。この変形後の座標系における力の釣合いは，モーメントの釣合い $dM/d\varphi-QR=0$ を用いて

$$d^2M/d\varphi^2-(N-N_0)+(p^*-p_0)R=0,$$
$$dN/d\varphi+dM/d\varphi=0\quad\cdots\cdots(3)$$

と表される。ここに，p^*は管の変形によって生じる土圧の変化である。

変形後の $R, d\varphi$ と変形前の $R_0, d\varphi_0$ の関係は，$R=(1+\varepsilon_0)R_0\cdot d\varphi_0/d\varphi$, $d\varphi_0/d\varphi=1/(1+d\theta/d\varphi_0)$ と表される。ここに，ε_0 は管壁中立軸のひずみ，θ は管要素のたわみ角である。この関係を用いて変形後の釣合い式(3)を変

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society

形前の座標系に変換し，二次の微少項を無視すれば次式を得る。

$$d^2M/d^2\varphi_0+N_0R_0(d\theta/d\varphi_0-\varepsilon_0)$$
$$-NR_0(1+d\theta/d\varphi_0+\varepsilon_0)+p^*(1+2\varepsilon_0)R_0^2=0,$$
$$(1+\varepsilon_0)R_0\cdot dN/d\varphi_0+(1+d\theta/d\varphi_0)\cdot dM/d\varphi_0=0 \cdots\cdots(4)$$

ここで，u と v をそれぞれ管要素の半径方向と周方向の変位とし，u と v の φ_0 による i 次導関数を u_i, v_i と表すと，$M, N, \varepsilon_0, d\theta/d\varphi_0$ は変形前の座標系を用いて

$$M=-R_0S_p(u_2+u_0),\ N=S_A\cdot(v_1+u_0)+S_p(u_2+u_0),$$
$$\varepsilon_0=(v_1+u_0)/R_0,\ d\theta/d\varphi_0=(v_1-u_2)/R_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

と表される注1)。式(5)を式(4)に代入して二次の微少項を無視し，さらに不伸張変形を仮定して $v_1+u_0=0$ とおくことにより，次式を得る注2)。

$$S_p(u_4+2u_2+u_0)+N_0/R_0\cdot(u_2+u_0)-p^*R_0=0 \cdots\cdots(6)$$

境界条件から $u_s=u$ なので，式(6)の変数はすべて土要素の応力変位成分で表され，これらは初期状態の土要素の応力変位式(1)を用いて計算できる。ただし，式(1)中に現れる $a_0, b_0, a_2, a_2', b_2'$ を含む項は，応力に関しては既に N_0 の形で上式に含まれており，また変位に関しては初期状態で微少と仮定したことから無視できるので，式(1)中の Σ の項（$n\geqq4$）だけを考える注3)。

管面の滑動条件 $\tau=0$ から，式(1)の τ の Σ 項をゼロとおけば，$a_n'=-(n-1)/(n+1)\cdot b_n'R_0^2$ が得られる。これを式(1)の σ_r と u_s の Σ 項に代入して

$$\sigma_r=\Sigma A_nU_n\cos(n\varphi_0),\quad u_s=\Sigma U_n\cos(n\varphi_0)$$
$$U_n=b_n'R_0^{-n+1}\{(2n+1)-2\nu_s(n+1)\}/\{\mu(n+1)\}$$
$$A_n=-2(n^2-1)/\{(2n+1)-2\nu_s(n+1)\}\cdot\mu/R_0 \cdots\cdots(7)$$

を得る。式(7)の σ_r と u_s を式(6)の p^* と u に代入すると

$$\Sigma U_n\cos(n\varphi_0)$$
$$\times R_0\{S_p(n^2-1)^2-N_0/R_0\cdot(n^2-1)-A_nR_0\}=0 \cdots\cdots(8)$$

となる。U_n がゼロでないための条件は上式の｛　｝$=0$ であり，これから次のバックリング条件式を得る。

$$N_0/R_0=p_0=S_p(n^2-1)+2\mu/\{(2n+1)-2\nu_s(n+1)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

この式は，管面が滑動，外力が管面に垂直の条件に対して Moore らが導いたバックリング条件式と全く同じである。つぎに，Moore らと同様に，n が大きい時，これを近似的に連続とみなし，式(9)の n に関する一次導関数を 0 とおけば，N_0 の最小値が得られる。N_0 が最小の時のバックリングの波数 n は次式で表される。

$$n=[\mu/\{2(1-\nu_s)S_p\}]^{1/3}=[\kappa/\{4(1-\nu_s^2)\}]^{1/3}\cdots\cdots(10)$$

バックリング時の軸力 N_0 と外力 p_0 はこの波数 n をバックリング条件式(9)に代入して得られ，無限遠の境界応力 σ_0 は $\sigma_0=p_0(S_A+2\mu)/S_A$ によって求められる。

4. 解の妥当性の検証

4.1 等方外水圧が働く場合への適用

前章で示した座標変換を用いた解法の妥当性を理論的に確かめるため，この解法を等方外水圧が管に働く場合のバックリング問題に適用した。この場合，管が変形しても外水圧は p_0 のままなので，変形後の釣合い式は p^* を無視したものとなり，管要素の周方向変位 v に関する微分方程式が次のように求まった。

$$v_6+v_4\{2+N_0/(S_pR_0)\}+v_2\{1+N_0/(S_pR_0)\}=0 \cdots(11)$$

この同次方程式の解は $N_0/R_0=(n^2-1)S_p$ と求まり，$n=2$ において最小値 $N_0/R_0=3S_p$ となって，良く知られた解[9]と一致することが確かめられた。この結果から，前章で示した管要素の座標変換を用いたバックリング解法は理論的に妥当と結論した。

4.2 実験との比較

解の妥当性を実験的に確認するため，以下の実験を行った。使用した装置は，上下板と2枚の側板を組合せた硬質アルミ製の容器（内寸法で幅47.5 cm×高さ11.0 cm×30 cm），2枚の載荷板，反力枠から構成される。容器の側板と2枚の載荷板は，それぞれロードセルと油圧シリンダーを介して反力枠に固定されている。上板をはずした容器を水平におき，その中央に，市販の1 l 入りアルミ製ビール缶（**表—1** 参照，外径83.6 mm，管厚0.144 mm）から切り出した長さ109 mm の管をおき，乾燥砂（**表—2**）を落としこんだ後，容器に上板を被せ，油圧を送って2枚の載荷板により側方変位拘束の条件で管がバックリングするまで地盤を段階的に圧縮した。実験中は，管の20箇所の内外面に貼付したひずみゲージの出力，載荷応力 σ_1，側方応力 σ_3，および載荷板の変位量を測定した。容器内面には摩擦軽減のため，0.2 mm のゴム2枚とシリコングリースによるリュブリケーションを施した。また，2枚の載荷板の変位量は油圧コントロールにより一致させた。管としてビール缶を使用したのは，ビール缶の肉厚の精度が±0.002 mm と高く，これ以上の精度を持つ薄肉管を自作できなかったためである。

測定した σ_1, σ_3，ならびに軸ひずみ ε_1 を，フックの法則から得られる **図—4** 中の式に代入すれば，実験時

表—1 管の諸元

D (mm)	t (mm)	E_p (kgf/cm²)	ν_p	S_p (kgf/cm²)	S_A (kgf/cm²)
83.6	0.144	725 000	0.30	2.73×10^{-3}	2 749

1 kgf/cm²=98 kPa

表—2 地盤材料の性質

D_{max} (mm)	G_s	U_c	$\rho_{d\,max}$ (g/cm³)	$\rho_{d\,min}$ (g/cm³)	ρ_d (g/cm³)	D_r (%)	c_d	ϕ_d (°)
0.85	2.70	2.1	1.74	1.42	1.52	36	0	36.5

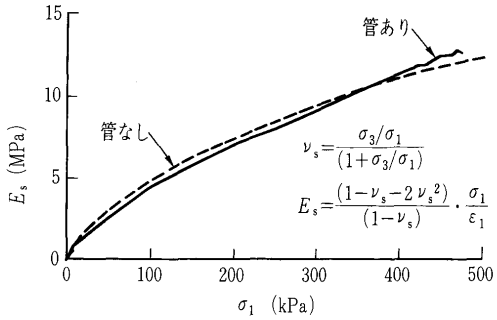
注1) 式(5)に示した N は伸張変形のものである。著者が文献2)に示した N の式は，不伸張変形を仮定したので，式(5)の N の右辺第2項が省略された形となっている。S_p が小さい場合，伸張変形と不伸張変形の N はまったく同一となる。

注2) ここでは u に関する四次の微分方程式から不伸張変形を仮定して解を導いたが，著者が初期状態に対して導いたように，式(11)に示した v に関する六次の方程式に外力項が入った形の式から解を導いても，結果はここに示したものと一致した。

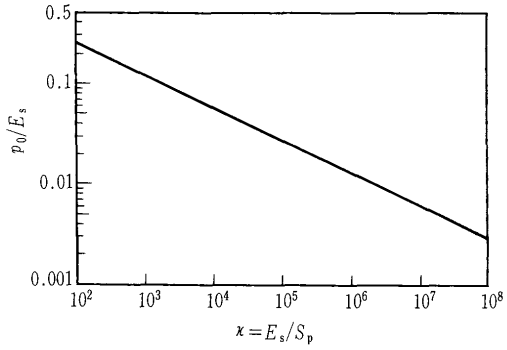
注3) Forrestal らと Moore らは n の範囲として $n\geqq2$ をとっているが，ここでは本文で述べた理由により $n\geqq4$ をとった。

NII-Electronic Library Service

The Japanese Geotechnical Society



図—4 地盤材料の変形係数 E_s と σ_1 の関係
(1 kgf/cm²=98 kPa)



図—5 バックリング荷重 p_0/E_s と κ の関係

の地盤材料の弾性定数が求まる。ポアソン比 ν_s は σ_1 のレベルに影響を受けず0.29と一定値であった。変形係数 E_s と σ_1 の関係を**図—4**に示す。**図—4**の実線は管を設置した場合，破線は管を設置せずに土のみを圧縮した場合のデータである。両者に有意な差は認められない。

管を設置した実験は，10数回の予備実験の後，同一条件で2回行った。当初，管のひずみの測定結果からバックリングの波数を推定しようと考えたが，測定結果は外縁ひずみの方が内縁ひずみよりも大きくなり，この結果を解釈できなかったので，管の測定ひずみはバックリング発生時点の判断にのみ用いた。ひずみが急激に変化した時の σ_1 の値は，439 kPa (4.48 kgf/cm²) と463 kPa (4.72 kgf/cm²) であった。また，この σ_1 における E_s は**図—4**からそれぞれ12.1 MPa (123 kgf/cm²), 12.7 MPa (130 kgf/cm²) と求められた。

表—1に示した管の S_p 値と上述の E_s, ν_s からバックリングの波数として $n=23.1$ と23.5が得られた。n は対称条件から偶数なので最も近い値として $n=24$ をとると，**表—1**に示した S_A 値を用いて境界応力 σ_0 が439 kPa (4.48 kgf/cm²), 457 kPa (4.66 kgf/cm²) と求められた。これらの σ_0 の値は管がバックリングした時の載荷応力 σ_1 の値とほぼ一致している。また，σ_0 の計算に用いた $n=24$ と実験値から得られた $n=23.1, 23.5$ の誤差は最大で3.8%にすぎない。以上の結果から，前章で得られた解の妥当性が実験的にも確かめられた。

5. バックリング荷重図と結論

図—5にバックリング荷重 p_0/E_s と土中管のたわみ性指数 κ の関係を示す。これは土のポアソン比 ν_s をほとんどの土に適用できる0.3とした時のもので，実施工で現れる多種多用な管と土の組合せのほぼすべてを網羅している。また，トンネルの内巻鋼管やシールドの内挿管に対しては，管の外側に充填されるモルタルの変形係数を E_s として与えることにより対応できる。ただし，実際には管は上下非対称の条件に置かれるので，**図—1**に示した上下対称モデルから導かれた**図—5**を実設計に用いることはできず，この図はあくまでもバックリング荷重の基準値（目安）を与えるものと理解すべきである。

本報告で導いたバックリング解は結果的にMooreらの解の一部と同じとなったが，管要素の有限変形を表すための座標変換を導入し，土要素に微少変形理論を適用することによって，初期等方土圧の回転やあいまいな外力変化項を用いずに解を得ることができた。また，解析結果と実験結果がほぼ一致したことから，解析で与えた管面の滑動条件などの仮定の妥当性が検証され，この解析結果が埋設管のバックリング挙動をかなり正確に表すことが確かめられた。

著者は1986年に線形弾性理論に基づく連続体モデルの解析を報告した[2]が，この解析がバックリングを考慮していなかったため，管のたわみ性が大きい時の解の適用限界が明確でない点に長年不満を抱いてきた。本報告により，この懸案にようやく決着をつけるとともに，連続体モデルによる土と構造物の相互作用の解釈の幅を広げることができた。

最後に，**4**章の実験は現中央復建コンサルタンツ勤務の寒竹英貴君が大阪市立大学学部在学中に卒業研究として遂行したことを記し，謝意を表する。

参 考 文 献

1) Luscher, V. and Höeg, K.: The action of soil around buried tubes, Proc. of 6th ICSMFE, Vol. 2, pp. 396～400, 1965.
2) 東田　淳・三笠正人：弾性論による埋設管の土圧の検討，土木学会論文集，第376号/Ⅲ-6, pp. 181～190, 1986.
3) 東田　淳・吉村　洋：たわみ性埋設管の合理的設計法の提案，土木学会論文集，No. 617号/Ⅲ-46, pp. 49～63, 1999.
4) Gumble, J. E.: Analysis and design of buried flexible pipes, PH. D. thesis submitted to Univ. of Surrey, 1983.
5) Moore, I. D.: Elastic buckling of buried flexible tubes—A review of theory and experiment, Journal of Geotechnical Engg., ASCE, Vol. 115, No. 3, pp. 340～358, 1989.
6) Moore, I. D. and Booker, J. R.: Simplified theory for the behavior of buried flexible cylinders under the influence of uniform hoop compression, Int. J. Solids Structure, Vol. 21, pp. 929～941, 1985.
7) Forrestal, M. J. and Herrmann G.: Buckling of a long cylindrical shell supported by an elastic medium, Int. J. Solids Structure, Vol. 1, pp. 297～309, 1965.
8) Novozhilov, V. V.: Foundations of the nonlinear theory of elasticity, Graylock Press, Rochester, N. Y., 1953.
9) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: Theory of elastic stability, Second edition, Mcgraw-Hill, pp. 278～294, 1961.

(原稿受理　2000.7.31)

NII-Electronic Library Service