

土の構造とメカニクス—ミクロからマクロへ—

4. 数値粒子法による土の微視的挙動の追跡 (その2)

田村 武 (たむら たけし)

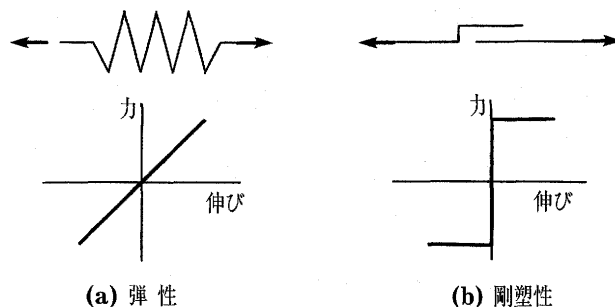
京都大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻

4.1 最新数値粒子法

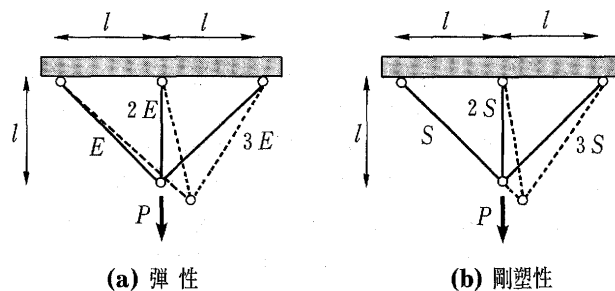
4.1.6 粒状体の極限解析

(1) はじめに

材料のもっとも代表的な力学特性は弾性である。高校で学ぶ「ばね」のように、作用する力に比例して変形が生じるモデルである。これを拡張するとばねが連続につながった弾性体となる。例えば、1 m のゴムは弾性的に挙動するが、それを1 mm の大きさで見ても、やはり、弾性的に挙動する。すなわち、局所的な力学特性が巨視的な力学特性にそのまま反映している。ところが代表的な粒状体である乾燥した砂試料の特性を取り上げると、巨視的に弾性あるいは弾塑性モデル（構成則）で表現されることが多いが、粒子レベルで見たとき、必ずしも弾性あるいは弾塑性的な挙動をするといえない。むしろ、粒子自体が「ゴムまり」のように弾性体だと仮定すれば、微視的にも弾性モデルでいいのかもしれない。しかし、砂の集合の変形を想像するとき、巨視的な挙動が粒子自体の変形に基づいているとは考えにくい。むしろ、個々の粒子の配置（formation）の変化が巨視的な変形に大きな寄与をしていると思う方が自然である。では二つの粒子間にはどのような力学的な作用があるのだろうか。粒子自体にはわずかながらでも弾性的な性質もあることから、粒子と粒子の間に適当な「ばね」を挿入してその力が相互作用の要因と見る方法もあるであろう。この「ばね」は非線形的であってもよく、場合によれば粘性を考慮したり、さらにはすべりを表すために塑性を入れることもできる。例えば、個別要素法、粒状要素法がこれに当たる。しかし、これらのモデルでは弾性部分が主要な役割を果たしている。すなわち、「ばね」を完全に取り去ることはできない。そうするためには、「剛塑性モデル」による「極限解析」の考え方が必要となる。すなわち、粒子は完全な剛体でそれ自体はまったく変形せず、粒子間には摩擦力のみが作用するようなモデルである。鋼鉄のような粒子からなる供試体をそれほど大きな応力下で試験したとすれば、このような状況になるはずである。そのような観点から粒子集合の変形挙動を眺めると「粒状体の極限解析」にたどり着くことになる。そこで粒子を円形の剛体と仮定し、一定の大きさの摩擦力に支配される粒子群についてその力学的挙動の解析手法を説明する。摩擦力は、一般に法線方向の力（軸力）に依存するが、ここでは軸力に依存しないような摩擦



図—4.16 二つのモデル



図—4.17 弾性解析と極限解析

を仮定した。これは本質的な仮定ではなく、単に説明を簡単にするだけの目的である。

このような剛体粒子を考える理由は、粒状体の「粒子性」のみを考慮したある種の「理想粒状体」の特性を明らかにすることである。

(2) 極限解析とは

図—4.16(a)に示す弾性モデルに対し、極限解析で用いる剛塑性モデルは、図—4.16(b)のように伸び速度の符号と力の関係で表される。すなわち、伸び速度が正の場合には、引張り強度が負の場合には圧縮強度が対応する力となる。また、伸び速度が0の場合には、その中間にあることだけがわかるが、値は決定できない。弾性解析と比べて極限解析は難しいと思われる。しかし、そうとも限らない。図—4.17(a)の弾性係数の異なる3本トラスの弾性解析は、荷重 P が作用したときの部材力と節点変位を求めることであり、それなりに面倒である。一方、図—4.17(b)の極限解析は、与えられた強度をもつ3本トラスにどのような大きさの荷重 P が作用したとき、どのような速度分布で破壊するかを求める問題である。まず、すぐにわかることは、もっとも強度の大きい $3S$ の部材の伸び速度が0だということである。

講 座

なぜなら、この部材が降伏すれば、それは $3S$ の部材力となることを意味するが、強度が S の部材は S 以上の部材力を持ち得ないので、節点での水平力の釣合い条件が保てなくなるからである。したがって図—4.17(b)に示すように、この構造は $3S$ の部材の伸び速度が 0 であるように崩壊する。むろん、強度 $3S$ の部材の部材力は S である。 $2S$ の部材も伸びるので $2S$ の部材力となる。したがって、 P の大きさは $(2+\sqrt{2})S$ となることがわかる。仮定した速度場が釣合い条件を満足すれば、それが正解となるので暗算で答が出せる場合もある。

(3) 極限解析のからくり

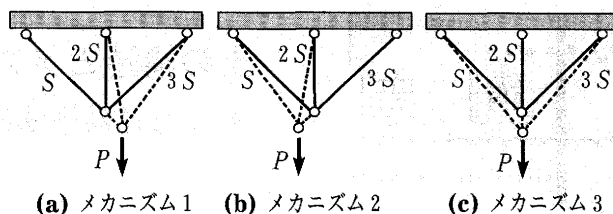
極限解析の本質についてもう少し説明しよう。先と同じ構造であるが、このような鉛直荷重が作用する場合、崩壊時にはどの部材にも引張り力が働く。だから崩壊時の荷重点のヒンジの代表的な動きは図—4.18の三つである。これらのように破壊時のモードを「メカニズム」とよぶ。メカニズム 1 が正解である。あとの二つのメカニズムでは節点における左右の釣合いが保てなくなる。例えばメカニズム 3 では、すべての部材は伸びつつあり、引張り強度までの部材力が発揮されているが、二つの斜材の強度に違いがあるので、水平方向に釣合いを保つことができない。だから、メカニズム 1 しか実現しないのである。(変位法による) 極限解析とは、本質的に考え得るメカニズムをすべて取り上げ、その中から釣合い条件を満たすものを探すことと等価である。簡単な構造では考えられるすべてのメカニズムを網羅することは不可能ではないが、複雑な構造では膨大な数のメカニズムから正解を洗い出さなければならない。このために何か有効な手段はないのだろうか？ 実はそれが「上界法」といわれるものである。その方法は以下のようである。

- 1) 外力 P の仕事が正となるようなメカニズムを一つ取り上げる。
- 2) 「外力仕事率」=「部材の塑性仕事率」という式を書き下し、これから荷重 P を求める。
- 3) こうして求めた P は正解値より大きい(厳密には「小さくない」)。つまり、正解値は、こうして求めた値より小さい。

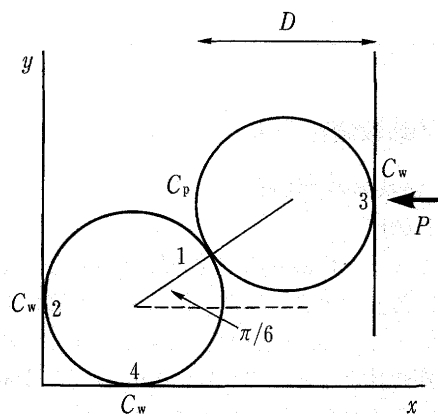
図—4.18の三つのメカニズムにおいて、荷重点の(鉛直方向の)沈下速度を v とすると、容易に三つの部材の伸び速度が v によって表される。それぞれの伸び速度と強度をかけた量が部材の塑性仕事率である。例えば、メカニズム 1 の場合、三つの部材の伸びは、左の部材から順に、 $\sqrt{2}v$, v および 0 である。上記 2) の式から

$$Pv = S \times \sqrt{2}v + 2S \times v + 3S \times 0 \cdots \cdots (4.9)$$

となって、先に求めた正解値 $P = (2+\sqrt{2})S$ を得る。一方、メカニズム 2, 3 の場合には、同様にしてそれぞれ $P = (2+3\sqrt{2})S$, $P = (2+2\sqrt{2})S$ を得る。明らかに正解よりも大きくなっていることがわかる。だから上界法を用いて、荷重の大きさ P を最小にするメカニズムを探索すればよい。これにもっとも適した手法は線形計画法である。なお、一つ注意しておく、上界法で用い



図—4.18 三つのメカニズム



図—4.19 二つの剛体要素

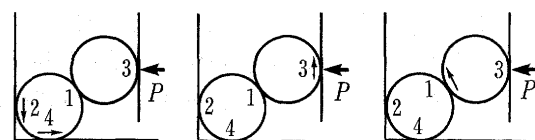
る 2) の式や式(4.9)は、いわゆる「仮想仕事の式」ではない。これは単に上界法における P の計算式に過ぎない。また、上界法が成立する理由である「上界定理」は、仮想仕事の式と「最大塑性仕事の式」から証明されるが、ここでは述べない。興味あるのは、荷重 P が最小となる条件を書けば、それがトラス構造の釣合い条件と一致することである。つまり、 P を最小化することと、構造の(静的な、すなわち、加速度を考えない)釣合い条件とは等価であることが示される。

(4) 二つ粒子要素の場合

図—4.19に示すように直径 D の二つの円形剛体要素が水平面内にある。左の要素は直角の壁と 2 点で接し、一方、右の要素は鉛直の壁に接している。二つの要素どうしはそれらの中心を結ぶ線分が x 軸と $\pi/6$ となる角度で接している。接点では、すべりところがり、あるいはそれらが同時に生じる。二つの粒子間のすべりに抵抗する摩擦強度(ここでは定数と仮定しているので粘着力のような量)を C_p 、粒子と壁の摩擦強度を C_w する($C_p < C_w$ とする)。ころがり抵抗はないものとする。このとき、右の要素に接する壁を左方向に押すと、はじめは四つの接点の摩擦力により静止を保つが、やがてどこかで摩擦抵抗を超えるせん断力が生じ、粒子が移動と回転を始める。問題は

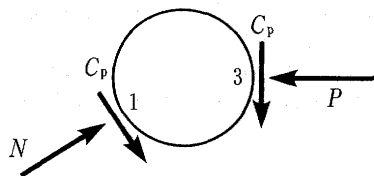
- 1) 外力 P がどのような値になったとき動き始めるか？
- 2) どのようなメカニズム(運動形式)で動き始めるか？

を極限解析の立場から決定することである。ここでいくつかのメカニズムを考える。図—4.20(a)に示すように左の要素が左向きに回転して、接触点 2 と 4 ですべったとする。このとき、ここでは当然、最大のせん断抵抗



(a) メカニズム 1 (b) メカニズム 2 (c) メカニズム 3

図—4.20 三つのメカニズム



図—4.21 正解時の釣合い

力である C_w が生じている。一方、二つの要素の接触点では最大 C_p のせん断力しか発揮しえない。左の要素の中心に関する力のモーメントの釣り合い条件を考えると、 $C_p < C_w$ であることから右回りの力のモーメントがづねに大きくなって、釣り合うことはあり得ないことになる。次に図—4.20(b)に示すように、右の要素の接触点3ですべりが生じたとしても同様に $C_p < C_w$ であることから回転に関する釣り合い条件を満足できないことになる。したがって $C_p < C_w$ の場合、すべりは接触点1のみで許される。その他の三つの接触点ではすべりは生じ得ない。つまり、図—4.20(c)が正解のメカニズムである。この正解時の右の要素に作用する力を示すと図—4.21のようになる。ここで接触点3ではすべりが生じていないので、摩擦特性からはせん断力を求めることはできないが、右の要素の力のモーメントに関する釣り合い条件から、ここでのせん断力は C_p でなければならない。未知の力は極限状態の作用外力 P と接触点1における法線方向の力 N である。

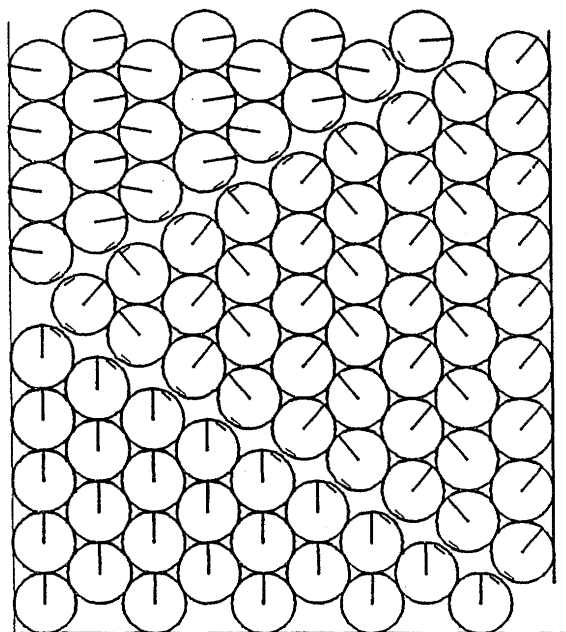
これら二つの未知数は要素2の x, y 方向の釣り合い条件から求めることができる。実際に計算すると $P = N = (2 + \sqrt{3})C_p$ となる。

(5) 多くの粒子要素の場合の計算例

ここまで説明した剛体要素の極限解析は、要素の数が増加しても本質的には同様である。ただし、計算量は増えるので手計算は面倒になる。そこで、計算機を用いて線形計画法のプログラムを組むことになる。通常のシンプレックスタブローを用いればよいが、初期の実行可能解が不明なので、いわゆる「2段階単体法」を適用する。一方、このような計算が果たしてどの程度の信用があるかを調べることも重要である。ここでは、簡単な実験と比較する。剛体要素のモデルとして10円硬貨を用いる。これを摩擦の小さい平面上に並べ、右側の境界壁を通して左方に少し押した結果の変形パターンが写真—4.1である。初期には「12時」の方向に目印の線が引かれているが、それを見れば各10円硬貨がどのように回転したかが容易にわかる。また、左の壁で折れ曲がった2本の斜めに走る「すべり線」も見える。これに対して、本手法で計算した結果が図—4.22である。すべり線の出



写真—4.1 10円硬貨の実験



図—4.22 数値計算結果

現や各要素の移動、回転とも実験とよく似た結果となっている。この計算に用いた材料定数は C_p と C_w の2個である。ここまでの説明では、摩擦力として法線方向の力の大きさに依存しない定数を仮定してきた。これは、むしろ、現実的でない。10円硬貨の摩擦力も法線方向の力に依存するはずである。このような条件を加味するには、これまで説明してきた方法を少し修正すればよい。線形計画法による解から、要素間等のせん断力のみならず、法線方向の力も求めることができる。そこで

- 1) せん断抵抗力として一定値を仮定し、求めた解から法線方向の力を計算する。
- 2) 法線方向の力によって定まるせん断抵抗力を新

講 座

たに入力して、再度、計算する。

3) 解が収束するまで繰り返す。

のような方法をとれば、より現実に近いモデルを扱うことができる。

(6) まとめ

極限解析はそれほど一般に用いられていないが、弾性成分を考慮した従来の計算法と比べて、種々の長所がある。例えば、材料定数の数がかなり少なくてよい。これは、個別要素法などと比べてずいぶん楽な点である。一方、短所としては、変位を直接に計算しないことである。極限解析ではいつも「速度場」が主たる未知量である。

もし、変形を追跡するには、要素の配置を逐次、変化させながら計算することになる。数値計算は、いずれも長所と短所があり、それらを相互に補間しあう協調が必要である。

参 考 文 献

- 1) Tamura, T. and Yamada, Y.: A rigid-plastic analysis for granular materials, *Soils and Foundations*, Vol. 36, No. 3, pp. 113~121, 1996.
- 2) 田村 武・小池 渉・桜井義之：剛体要素からなる粒状体の上界法とその応用，応用力学論文集，Vol. 1, pp. 407~416, 1998.