講座

移流分散解析入門

4. 地盤内の物質移動方程式―多相流問題―

藤縄克之（ふじなわ　かつゆき）
信州大学教授　工学部社会開発工学科

日比義彦（ひび　よしひこ）
基礎地盤コンサルタンツ㈱関東支社

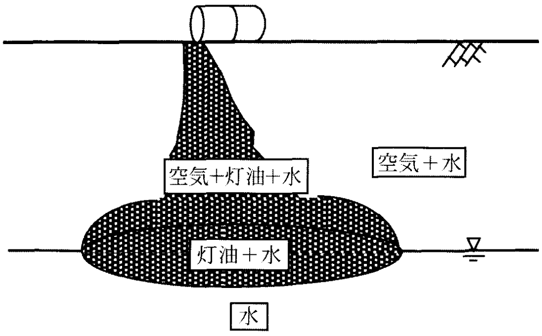
4.1 まえがき

灯油などの水より密度の小さい疎水性の液体の漏洩現場では，図―4.1に示すように「水のみの領域」,「水と空気の領域」,「水と灯油の領域」,「水と灯油と空気の領域」と1相状態から3相状態までが複雑に分布しており[1)]，実際の汚染問題を扱うためには水，灯油，空気の3相流を扱う必要がある。

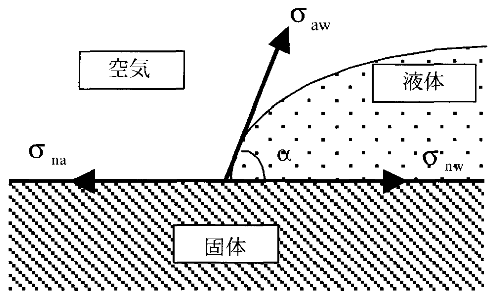
多孔体中の非混合性流体は潤す流体と潤される流体に区分される。例えば水と空気の2相流では，水は潤す流体となり，空気は潤される流体となる。潤す流体と潤される流体の違いは，接触し安定状態にある二つの流体の接触角（図―4.2参照）により区分され，接触角が鋭角となる流体が潤す流体となる。例えば，水と灯油などの石油系炭化水素が多孔体中に存在する場合，水が潤す流体，灯油が潤される流体となる[1),2)]。

第2章では，浸透流の支配方程式が取り扱われた。不飽和多孔体中には，水と空気が存在する。この状態は，厳密には水と空気の2相流として記述する必要がある。しかし，水と空気の2相流では，空気圧が大気圧に等しいと仮定するのが一般的で，不飽和浸透流の支配方程式は飽和浸透流に類似した1相系の微分方程式となる。本稿では，このような1相流も包含した多相流を数学的に記述する。

ところで，ここでいう多相流とは，多孔体中で互いに混合しない二つ以上の流体が混在し，流動する状態を指す。なお，水への溶解度が小さい液体は疎水性液体(Non-Aqueous Phase Liquid; NAPL）と称し，NAPLは密度が水より大きいDNAPLと小さいLNAPLに分けられる。LNAPLには灯油やガソリンのような石油系炭化水素などがあり，DNAPLとしてはトリクロロエチレンのような有機溶剤などがある[1),3)~5)]。



図―4.1　3相流の場合のLNAPLの浸透形態



図―4.2　表面張力（σ_{nw}, σ_{na}, σ_{aw}）と接触角（α）

4.2 浸透流の基礎方程式

ここでは，多相流の支配方程式を誘導する。図―4.3に示すように流れ場の中に微小直方体をとり，この中の流体fの質量の時間変動を考える。

微小時間dtの間にx軸に平行に微小直方体内に流入する流体fの質量は流体の密度をρ_f, x方向の流速をv_{fx}とすると以下のようになる。

$$\rho_f v_{fx}\,dy\,dz\,dt \quad\cdots\cdots(4.1)$$

一方，$x+dx$において微小直方体からx軸に平行に流出する流体fの質量は以下のようになる。

$$\rho_f v_{fx}\,dy\,dz\,dt+\frac{\partial \rho_f v_{fx}}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt \quad\cdots\cdots(4.2)$$

したがって，この微小直方体内に貯留される流体のx方向の成分は

$$\rho_f v_{fx}\,dy\,dz\,dt-\left(\rho_f v_{fx}\,dy\,dz\,dt+\frac{\partial \rho_f v_{fx}}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt\right)$$

$$=-\frac{\partial(\rho_f v_{fx})}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt \quad\cdots\cdots(4.3a)$$

となる。同様に，y方向およびz方向に対して以下の成分が得られる。

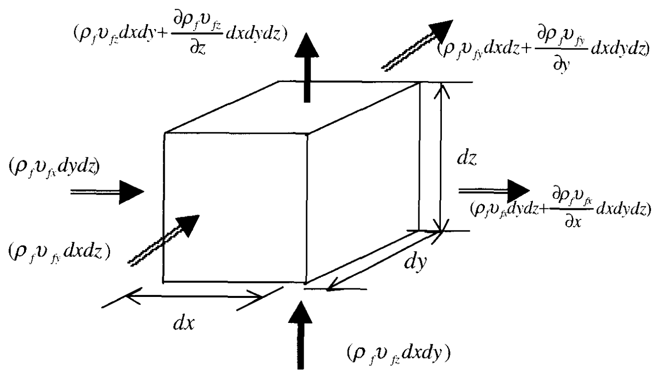
$$-\frac{\partial(\rho_f v_{fy})}{\partial y}dx\,dy\,dz\,dt \quad (y\text{ 方向}) \quad\cdots\cdots(4.3b)$$

$$-\frac{\partial(\rho_f v_{fz})}{\partial z}dx\,dy\,dz\,dt \quad (z\text{ 方向}) \quad\cdots\cdots(4.3c)$$

したがって，dt時間に微小直方体に貯留される流体の全質量は

$$-\frac{\partial(\rho_f v_{fx})}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt-\frac{\partial(\rho_f v_{fy})}{\partial y}dx\,dy\,dz\,dt$$

$$-\frac{\partial(\rho_f v_{fz})}{\partial z}dx\,dy\,dz\,dt \quad\cdots\cdots(4.4)$$



図—4.3　単位時間当たりの微小直方体における流体fの質量の収支

となる。

一方，最初に微小直方体内に貯留されていた流体fの質量は

$$\rho_f\theta_f\,dx\,dy\,dz \quad\cdots\cdots(4.5)$$

となり，微小な時間dt後に以下のように変化する。

$$\rho_f\theta_f\,dx\,dy\,dz+\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt \quad\cdots\cdots(4.6)$$

ここで，θ_fは流体fの体積含有率である。

したがって，dt時間における微小直方体内の流体質量の貯留量は

$$\left(\rho_f\theta_f\,dx\,dy\,dz+\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt\right)-\rho_f\theta_f\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt \quad\cdots\cdots(4.7)$$

となる。

質量保存則より式(4.4)と式(4.7)は等しくならなければならない。そこで，両式を$dx\,dy\,dz\,dt$で除すると

$$\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_f v_{fx})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_f v_{fy})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho_f v_{fz})}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_f\boldsymbol{v}_f)=0 \quad\cdots\cdots(4.8)$$

が誘導される[6)~8)]。

多孔体中の運動方程式はダルシーの法則で表される。重力方向にz軸をとり，流体fの流速を$\boldsymbol{v}_f$とすると[1)]

$$\boldsymbol{v}_f=-\frac{k_{rf}K_w}{\mu_{rf}}\mathbf{grad}\,(\psi_f+\rho_{rf}z) \quad\cdots\cdots(4.9)$$

となる。ここで，ψ_fは流体fの圧力水頭，k_{rf}（$=k_f/k_s$）は流体fの不飽和透過度k_fを飽和透過度k_sで除した相対透過度，μ_{rf}（$=\mu_f/\mu_w$）は水の粘性係数μ_wに対する流体fの相対粘性係数，ρ_{rf}（$=\rho_f/\rho_w$）は水の密度ρ_wに対する流体fの相対密度，K_w（$=\rho_w g k_s/\mu_w$）は飽和透水係数である。

式(4.9)を式(4.8)に代入すると以下のようになる。

$$\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_f\boldsymbol{v}_f)$$

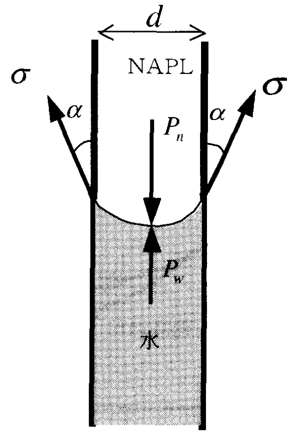
$$=\frac{\partial(\rho_f\theta_f)}{\partial t}-\nabla\cdot\left[\rho_f\frac{k_{rf}K_w}{\mu_{rf}}\mathbf{grad}\,(\psi_f+\rho_{rf}z)\right]$$

$$=0 \quad\cdots\cdots(4.10)$$

なお，間隙率をn，流体fの飽和度をS_fとすると，$\theta_f$$=nS_f$であるから以下の式が得られる。

$$\frac{\partial(n\rho_f S_f)}{\partial t}-\nabla\cdot\left[\rho_f\frac{k_{rf}K_w}{\mu_{rf}}\mathbf{grad}\,(\psi_f+\rho_{rf}z)\right]=0$$

$$\cdots\cdots(4.11)$$



図—4.4　毛管圧と表面張力

4.3　2相流問題

4.3.1　毛管圧[1),2)]

NAPLと水が毛管中で図—4.4のように釣合っており，NAPLと水の接触面における水の圧力をP_w, NAPLの圧力をP_nとすると，毛管圧P_{cnw}はP_wとP_nの差として次式で表される。

$$P_{cnw}=P_n-P_w \quad\cdots\cdots(4.12)$$

上式の両辺を水の密度ρ_wと重力加速度gで除し，水の圧力水頭をψ_w, NAPLの圧力水頭をψ_nおよび毛管水頭をψ_{cnw}（以下では毛管圧とする）とすると次式を得る。

$$\psi_{cnw}=\psi_n-\psi_w \quad\cdots\cdots(4.13)$$

通気帯での水分移動現象では空気をNAPLと考え，空気圧を大気圧と等しく，$\psi_n=0$とできるので，式(4.13)は以下のようになる。

$$\psi_{cnw}=-\psi_w \quad\cdots\cdots(4.14)$$

上式のψ_wは，一般にサクションと呼ばれている。

一方，表面張力をσ_{nw}，接触角をαとすると図—4.4より以下のような関係が得られる。

$$P_{cnw}=\frac{4\sigma_{nw}\cos\alpha}{d} \quad\cdots\cdots(4.15)$$

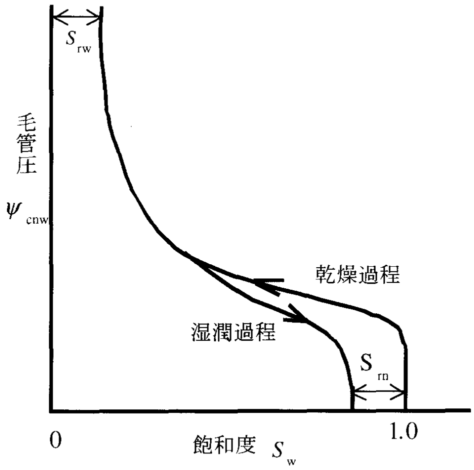
なお，dは毛細管の直径である。

4.3.2　飽和度と毛管圧との関係

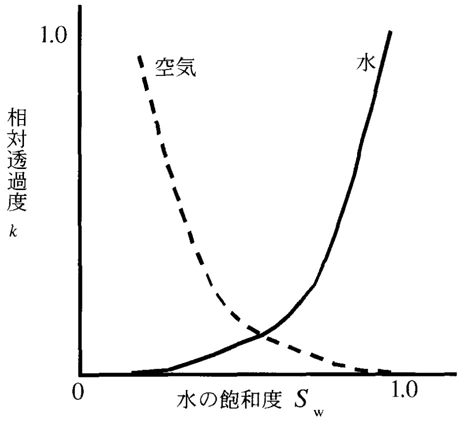
図—4.5に毛管圧と飽和度との関係を示す。飽和状態から排水していくと，その際にメニスカスの平均曲率半径は小さくなり，毛管圧は増大する。

土壌間隙中の水の飽和度が低下し，あるレベルになると，水は流動できない状態となる。この飽和度を残留飽和度S_{rw}と称する。

残留飽和度からの浸潤過程では曲線は図—4.5のように別のルートをたどる。このような飽和度と毛管圧の関係を水分ヒステリシスと呼ぶ[9)]。なお，土壌によっては，毛管圧が低下してもNAPLが水の中に封入され，水の



図―4.5　毛管圧と飽和度の関係



図―4.6　相対透過度と飽和度の関係

飽和度は1には戻らないことがある。この封入されたNAPLの飽和度をNAPLの残留飽和度 S_{rn} と称する。

毛管圧 ψ_{cnw} と水の飽和度 S_w との関係はvan Genuchten（バン　ゲヌーチェン）モデル[10]で表現でき，乾燥過程の水分特性曲線は次のように表される。

$$\bar{S}_w=\frac{(S_w-S_{rw})}{(1-S_{rw})}=\frac{1}{\{1+(\alpha\psi_{nw})^{\lambda}\}^{m}} \quad\cdots\cdots(4.16a)$$

ここで，$\bar{S}_w$ は水の有効飽和度，α, λ, m（$=1-1/\beta$）は土壌に固有の定数である。なお，湿潤過程では，

$$\bar{S}_w=\frac{(S_w-S_{rw})}{(1-S_{rn}-S_{rw})} \quad\cdots\cdots(4.16b)$$

となる。

4.3.3　水の飽和度と相対透過度との関係

図―4.6に水の飽和度と水の相対透過度 k_{rw} および空気の相対透過度 k_{ra} との関係を示す。飽和度と相対透過度の間のヒステリシスは，飽和度と毛管圧のヒステリシスより小さい。

水の飽和度が1の場合，水の相対透過度は1となり，空気の相対透過度は0となる。排水過程では，水の相対透過度は低下し，空気の相対透過度が上昇していく。水の飽和度が残留飽和度になった時，水の相対透過度は0となるが，空気の相対透過度は1にはならない。

水の飽和度と水およびNAPLの相対透過度 k_{rw}, k_{rn} との関係はMualem（ムアレム）のモデル[11]を用いると以下のように表すことができる。

$$k_{rw}=\bar{S}_w^{1/2}\{1-(1-\bar{S}_w^{1/m})^{m}\}^{2} \quad\cdots\cdots(4.17a)$$

$$k_{rn}=(1-\bar{S}_w)^{1/2}(1-\bar{S}_w^{1/m})^{2m} \quad\cdots\cdots(4.17b)$$

4.3.4　支配方程式

式(4.11)より非圧縮性NAPLと水の2相流の支配方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial(nS_n)}{\partial t}-\nabla\cdot\frac{k_{rn}K_w}{\mu_{rn}}\,\mathbf{grad}\,(\psi_n+\rho_{rn}z)=0 \quad\cdots\cdots(4.18a)$$

$$\frac{\partial(nS_w)}{\partial t}-\nabla\cdot k_{rw}K_w\,\mathbf{grad}\,(\psi_w+z)=0 \quad\cdots\cdots(4.18b)$$

なお，添え字nとwはそれぞれNAPLの相と水の相を表し，μ_{rn} はNAPLの水に対する相対粘性係数である。

水の飽和度とNAPLの飽和度は以下の関係がある。

$$S_n+S_w=1 \quad\cdots\cdots(4.19)$$

間隙率が変化しないとし，式(4.19)と式(4.13)を式(4.18a)に代入すると

$$-n\frac{\partial(S_w)}{\partial t}-\nabla\cdot\frac{k_{rn}K_w}{\mu_{rn}}\,\mathbf{grad}\,(\psi_w+\psi_{cnw}+\rho_{rn}z)=0 \quad\cdots\cdots(4.20a)$$

$$n\frac{\partial(S_w)}{\partial t}-\nabla\cdot k_{rw}K_w\,\mathbf{grad}\,(\psi_w+z)=0 \quad\cdots\cdots(4.20b)$$

となる。

ψ_{cnw} は式(4.16b)より求まり，k_{rw} と k_{rn} は式(4.17)より求めることができる。したがって，式(4.20)の未知変数は S_w と ψ_w となる。

4.4　3相流問題

次に，空気，水と疎水性液体の3相流問題を考える。疎水性流体としては，水より密度の小さい石油系炭化水素を想定する。

4.4.1　毛管圧

空気と水の接触面で生じる毛管圧を P_{caw}，空気とNAPLの接触面で生じる毛管圧を P_{can}, NAPLと水の接触面で生じる毛管圧を P_{cnw} とすると以下の式が成り立つ。

$$P_{caw}=P_a-P_w \quad\cdots\cdots(4.21a)$$

$$P_{can}=P_a-P_n \quad\cdots\cdots(4.21b)$$

$$P_{cnw}=P_n-P_w \quad\cdots\cdots(4.21c)$$

ここで，P_a, P_n, P_w は空気，NAPL，水の圧力である。

r をメニスカスの平均曲率半径とすると，

$$\cos\alpha=d/2r \quad\cdots\cdots(4.22)$$

となる。そこで，式(4.22)を式(4.15)に代入すると，

$$P_{cnw}/\sigma_{nw}=2/r \quad\cdots\cdots(4.23)$$

となる。すなわち，接触する流体の組み合わせに関係なく，飽和度が同じならば毛管圧を界面張力で除した値は同じ値となる。したがって，毛管圧と界面張力の間には以下のような関係が成立する。

$$\frac{P_{caw}}{\sigma_{aw}}=\frac{P_{can}}{\sigma_{an}}=\frac{P_{cnw}}{\sigma_{nw}} \quad\cdots\cdots(4.24)$$

なお，σ_{aw} は水と空気の間の表面張力，σ_{an} は空気とNAPLの間の表面張力，σ_{nw} はNAPLと水の間の界面

張力である。

また，式(4.24)に σ_{aw} を乗し，$\beta_{an}=\sigma_{aw}/\sigma_{an}$, $\beta_{nw}=\sigma_{aw}/\sigma_{nw}$ とすると以下のようになる。

$$P_{caw}=\beta_{an}P_{can}=\beta_{nw}P_{cnw} \quad\cdots\cdots(4.25)$$

また，式(4.25)を $\rho_w g$ で除すると次の圧力水頭の関係式を得る。

$$\psi_{caw}=\beta_{an}\psi_{can}=\beta_{nw}\psi_{cnw} \quad\cdots\cdots(4.26)$$

4.4.2　各流体の分布形態[1),12)]

図―4.7は空気，水，NAPLの分布形態を示したもので，最も潤される流体である空気は3相系で最も潤す流体である水とは接触せず，また，潤される流体であるNAPLは潤す流体である水に，空気はNAPL中や水中に封入されないものと仮定し，残留飽和度 S_{rw} に相当する水が不動態で残存しているものとする。

いま，空気，NAPL，水の飽和度を S_a, S_n, S_w とし，水とNAPLの飽和度の合計を S_t とすると S_a, S_n, S_w, S_t には以下の関係がある[1),12)]。

$$S_a+S_n+S_w=S_t+S_a=1 \quad\cdots\cdots(4.27)$$

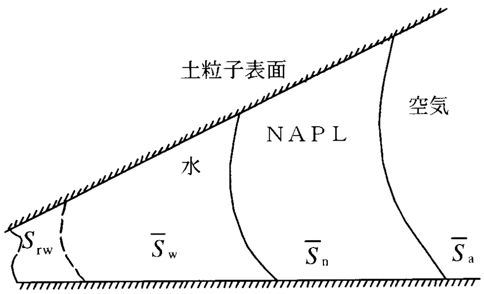
また，空気，NAPL，水，液体の合計の有効飽和度をそれぞれ $\bar{S}_a$, $\bar{S}_n$, $\bar{S}_w$, $\bar{S}_t$ とすると以下のようになる[1),12)]。

$$\bar{S}_a=\frac{S_a}{1-S_{rw}} \quad\cdots\cdots(4.28a)$$

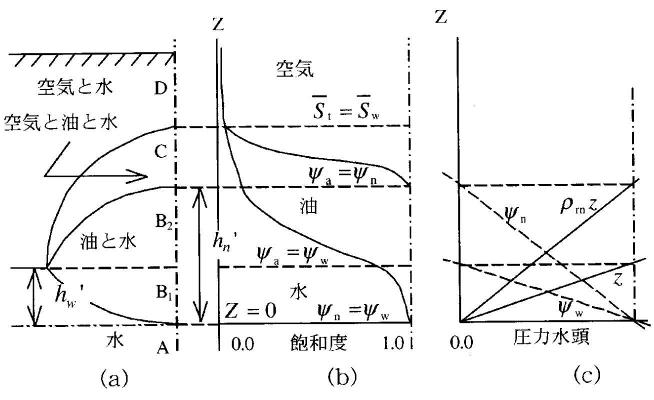
$$\bar{S}_n=\frac{S_n}{1-S_{rw}} \quad\cdots\cdots(4.28b)$$

$$\bar{S}_w=\frac{S_w-S_{rw}}{1-S_{rw}}=\{1+(\alpha\psi_{caw})^{\lambda}\}^{-m} \quad\cdots\cdots(4.28c)$$

水と空気の間に界面は出現しないという仮定より次式



図―4.7　3相における各流体の分布状況



図―4.8　水-NAPL-空気3相系における定常状態の分布形態と圧力水頭分布

を得る。

$$\bar{S}_t=\frac{S_n+S_w-S_{rw}}{1-S_{rw}}=\bar{S}_n+\bar{S}_w=\{1+(\alpha\beta_{an}\psi_{can})^{\lambda}\}^{-m} \quad\cdots\cdots(4.28d)$$

地下水面上にLNAPLが滞留している定常状態の概念図を**図―4.8**(a)に，また各流体の飽和度を**図―4.8**(b)に示す。定常状態であるので，各流体の圧力分布は**図―4.8**(c)のようになる。多孔体内は，水のみ分布する領域（A），水とNAPLが分布する領域（B_1 と B_2），水，NAPLと空気が分布する領域（C），そして，水と空気が分布する領域（D）に分類できる。

A, B_1, B_2, CおよびD領域の分布条件を各毛管圧で表すと以下のようになる。

① A領域

A領域は $\psi_{caw}\leq 0$ and $\psi_{cnw}\leq 0$ となる領域で，水のみが分布する。いま，$\psi_a=0$ とすると，A領域の分布条件は $\psi_w\geq 0$ and $\psi_n\leq\psi_w$ となる。

② B_1 領域

$\psi_w\geq 0$ で $\psi_{cnw}>0$ の B_1 領域では水とNAPLが存在し，かつ，地下水面以下となる。すなわち，B_1 領域では $\psi_n>\psi_w\geq 0$ となる。

③ B_2 領域

$\psi_w<0$ で $\psi_n\geq 0$ の B_2 領域も水とNAPLのみが存在するが，地下水面より上に分布する。すなわち，B_2 領域では $\psi_w<0$ and $\psi_n\geq 0$ となる。

④ C領域

空気，水，NAPLの3流体が存在する領域がC領域である。地下水面以上で，かつ，NAPLの液面以上であるから $\psi_w<0$ and $\psi_n<0$ である。また，C領域では $\bar{S}_t>\bar{S}_w$ であるので，$\psi_a=0$ とすると式(4.28c)，式(4.28d)より，$\beta_{an}\psi_n-\psi_w>0$ でNAPLが存在することになる。すなわち，C領域では $\psi_w/\beta_{an}<\psi_n<0$ となる。

⑤ D領域

上述の考察より，NAPLが存在しないD領域では，$\bar{S}_t=\bar{S}_w$ となる。よって，$\beta_{an}\psi_n-\psi_w\leq 0$ では，NAPLは存在しない。また，地下水面以上であることより $\psi_w<0$ となる。すなわち，D領域では $\psi_n\leq\psi_w/\beta_{an}<0$ となる。

4.4.3　飽和度および相対透水係数との関係

ここでは，空気，水，NAPLの3相系における各相の飽和度を毛管圧の関数として記述する。

van Genuchtenモデルを用いると**図―4.8**のA, B_1, B_2, CおよびD領域における $\bar{S}_w$ と $\bar{S}_t$ は以下のように設定できる[1),12),13)]。

$$\begin{cases} \bar{S}_w=1 \\ \quad \text{A 領域}：\psi_w\geq 0 \text{ and } \psi_n\leq\psi_w \\ \bar{S}_w=\{1+(\alpha\beta_{nw}\psi_{cnw})^{\lambda}\}^{-m} \\ \quad B_1\text{ 領域}：\psi_n>\psi_w\geq 0 \text{ or} \\ \quad B_2, \text{C 領域}： \\ \qquad \psi_w<0 \text{ and } \psi_w/\beta_{an}<\psi_n \\ \bar{S}_w=\{1+(\alpha\psi_{caw})^{\lambda}\}^{-m} \\ \quad \text{D 領域}：\psi_n\leq\psi_w/\beta_{an}<0 \end{cases} \quad\cdots\cdots(4.29)$$

$$\begin{cases} \bar{S}_t=1 \\ \quad \text{A, B}_1\text{, B}_2\text{ 領域：}\psi_w \geq 0 \text{ or } \psi_n \geq 0 \\ \bar{S}_t=\{1+(\alpha\beta_{an}\psi_{can})^{\lambda}\}^{-m} \\ \quad \text{C 領域：}\psi_w/\beta_{an}<\psi_n<0 \\ \bar{S}_t=\bar{S}_w \\ \quad \text{D 領域：}\psi_n \leq \psi_w/\beta_{an}<0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(4.30)$$

一方，Mualem モデルを用いると空気，NAPL，水の相の相対透過度は以下のようになる。

$$k_{rw}=\bar{S}_w^{1/2}\{1-(1-\bar{S}_w^{1/m})^m\}^2 \quad \cdots\cdots(4.31a)$$

$$k_{rn}=(\bar{S}_t-\bar{S}_w)^{1/2}\{(1-\bar{S}_w^{1/m})^m-(1-\bar{S}_t^{1/m})^m\}^2 \quad \cdots\cdots(4.31b)$$

$$k_{ra}=(1-\bar{S}_t)^{1/2}(1-\bar{S}_t^{1/m})^{2m} \quad \cdots\cdots(4.31c)$$

4.4.4　支配方程式

流体を非圧縮とし，間隙率を一定とすると，NAPL に関する支配方程式は次式で与えられる。

$$n\frac{\partial(S_n)}{\partial t}-\nabla\cdot\frac{k_{rn}K_w}{\mu_{rn}}\,\mathbf{grad}\,(\psi_n+\rho_{rn}z)=0 \quad \cdots\cdots(4.32)$$

$\psi_n=\psi_{cnw}+\psi_w$ と $S_n=1-S_a-S_w$ を用いて式(4.32)を変形すると次式が得られる。

$$-n\frac{\partial(S_w)}{\partial t}-n\frac{\partial(S_a)}{\partial t}-\nabla\cdot\frac{k_{rn}K_w}{\mu_{rn}}\,\mathbf{grad}\,(\psi_w+\psi_{cnw}+\rho_{rn}z)=0 \quad \cdots\cdots(4.33)$$

なお，空気の圧力水頭を大気圧と等しくした場合，空気–NAPL–水系3相流の支配方程式は式(4.20b)と式(4.33)となる。

式(4.20b)と式(4.33)で未知変数となるのは，S_w，S_a，ψ_w, ψ_{cnw}, k_{rw}, k_{rn} である。式(4.28c)を用いて S_w より $\bar{S}_w$ を求めることができ，式(4.29)を用いて $\bar{S}_w$ より ψ_{cnw} を求めることができる。ただし，ψ_{cnw} を求める際に A, B$_1$, B$_2$, C および D 領域のどの領域に属するか決める必要がある。例えば，$\bar{S}_w=1$ では A 領域となり，$\bar{S}_w=\{1+(\alpha\psi_{caw})^{\lambda}\}^{-m}$ を用いて ψ_{caw} より求めた $\bar{S}_w$ と S_w より求めた $\bar{S}_w$ が等しい場合には D 領域となる。

式(4.29)より ψ_{cnw} を求めることができれば，ψ_n は $\psi_n=\psi_{cnw}+\psi_w$ より求められる。ψ_n が求められると式(4.30)を用いて ψ_w と ψ_n により $\bar{S}_t$ を求めることができる。$\bar{S}_t$ と $\bar{S}_w$ が求められると $\bar{S}_n+\bar{S}_w=\bar{S}_t$ により $\bar{S}_n$ を求めることができ，さらに $\bar{S}_w$ と $\bar{S}_n$ を用いて $\bar{S}_n+\bar{S}_w+\bar{S}_a=1$ より $\bar{S}_a$ を求めることができる。$\bar{S}_a$ が求まれば S_a は式(4.28a)より，$\bar{S}_n$ が求まれば S_n は式(4.28b)より求められる。

また，式(4.31)を用いて $\bar{S}_t$ と $\bar{S}_w$ により k_{ra}, k_{rn}, k_{rw} を求めることができ，最終的に式(4.20b)と式(4.33)の未知変数を S_w と ψ_w にできる。

4.5　おわりに

本稿では，浸透流の基礎方程式，飽和度と毛管圧の関係，そして飽和度と相対透水係数の関係について論じ，最後に多相流の支配方程式を紹介した。

支配方程式中のパラメーター S_a, ψ_{cnw}, k_{rn} および k_{rw} は未知変数 S_w, ψ_w の関数となり，支配方程式は非線形性が高い。したがって，実用上の問題に多相流の支配方程式を適用する場合，式(4.20b)と式(4.33)をどのように定式化し，効率の良い計算スキームにするかが重要である。一般に式(4.20b)と式(4.33)は風上法を用いた有限要素法または差分法により定式化される場合が多いが[2),14)]，8章では最新の知見を踏まえて多相流支配方程式の定式化について記述する。

今回誘導した支配方程式には van Genuchten モデルと Mualem モデルが用いられているが，解析精度はこれらのモデルの選定にも左右される。また，式(4.20b)や式(4.33)では表面張力または界面張力による非混合性液体の接触面に沿う移動がうまく反映されていない。このような点も含め，今後の研究課題は少なくない。

参　考　文　献

1) 藤縄克之・日比義彦・藤原幸彦：多孔体中における水–疎水性液体–気体の等温多相流れに関する研究の進歩，農業土木学会論文集，第214号，pp. 149～158, 2001.
2) Helmig, R.: Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, Springer, p. 367, 1997.
3) 藤縄克之：汚染される地下水，共立出版，pp. 1～3, 1990.
4) 藤縄克之：講座「地盤環境汚染の現状と対策 6」―地盤環境汚染の解析手法，土と基礎，Vol. 42, No. 8, pp. 71～78, 1994.
5) 藤縄克之：地下水における物質移動の挙動，岩田進午・喜多大三監修「土の環境圏」第4編第7章，フジ・テクノシステム，pp. 1221～1230, 1997.
6) 黒川健実・荒巻軍治：土木解析学，理工図書，pp. 15～17, 1983.
7) 松波順三郎：環境流体輸送，日刊工業新聞者，pp. 11～14, 1991.
8) 伊里二夫・韓　太舜：新しい応用の数学 1-Ⅰ，ベクトル解析，教育出版，pp. 114～118, 1982.
9) Lenhard, R. J., Parker, J. C. and Kaluarachchi, J. J.: A model for hysteretic constitutive relations governing multiphase flow 3. Refinements and numerical simulations, Water Resour., Res., 25 (7), pp. 1727～1736, 1989.
10) Van Genuchten, M. TH.: A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, Soil Sci. Soc. Am. J., 44, pp. 892～898, 1980.
11) Mualem, Y.: A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, Water resour. Res., 12, pp. 513～522, 1976.
12) van Dijke, M. I. J., Van der Zee, S. E. A. T. M.: A similarity Solution for Oil Lens Redistribution Including Capillary Forces and Oil Entrapment, Transport in Porous Media, 29, pp. 99～125, 1997.
13) Lenhard, R. J. and Parker, J. C.: Exprimental validation of the theory of extending two-phase saturation-pressure relations to three-fluid phase systems for monotonic drainage paths, Water Resour. Res., 24 (3), pp. 373～380, 1988.
14) Forsyth, P. A.: A control volume finite element approach to NAPL groundwater contamination, SIAM J. SCI. STAT. COMP., pp. 1029～1057, 1991.