技術手帳

下負荷面モデル

Subloading Surface Model

橋口公一（はしぐち　こういち）
九州大学大学院教授　農学研究院生産環境科学部門

1. 下負荷面モデル誕生の背景

降伏面の内部を純粋弾性域と仮定する古典弾塑性構成式（土のCam-clayモデルもこれに属する）は，硬化材料の変形挙動については，かなり現実的な予測が可能で金属や正規圧密土の変形解析に寄与してきた。しかし，先行荷重から開放され過圧密状態にある地球表面地盤などに広範に観察される軟化現象については，応力が弾性的に急上昇して降伏面に達し，その後急激に低下する非現実的な予測を行う。また，諸機械運動・振動，地震，波浪，交通等において見られる繰返し負荷については，第2サイクル以降，応力は降伏面の内部を弾性的に往復するだけで塑性ひずみの集積は全く表現できない。

古典弾塑性構成式のこのような限界を克服するため，降伏面の内部の応力変化による塑性変形を合理的に表現する非古典弾塑性構成式として考案されたのが「下負荷面モデル」[1),2)]である。

2. 下負荷面モデルの基本式

変形の微小な変化は次のひずみ増分で表わされる。

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j}+\frac{\partial du_j}{\partial x_i}\right) \quad\cdots\cdots (1)$$

ここに，$x_i(i=1, 2, 3)$は物質点の現在の位置ベクトル，u_iは変位である。これを，次のように応力増分を取り去ると消滅する弾性ひずみ増分$d\varepsilon^e_{ij}$と残留する塑性ひずみ増分$d\varepsilon^p_{ij}$に加算的に分解する。

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon^e_{ij}+d\varepsilon^p_{ij} \quad\cdots\cdots (2)$$

まず，弾性ひずみ増分を次式で与える。

$$d\varepsilon^e_{ij}=E^{-1}_{ijkl}d\sigma_{kl} \quad\cdots\cdots (3)$$

なお，σ_{ij}は応力，E_{ijkl}は弾性係数テンソル，$(\ )^{-1}$は逆テンソルを示し，等方・増分線形弾性を仮定すれば，

$$E_{ijkl}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \quad\cdots\cdots (4)$$

ここに，Kは体積弾性係数，Gはせん断弾性係数，δ_{ij}はKronccker のデルタ（$i=j$: $\delta_{ij}=1$, $i\neq j$: $\delta_{ij}=0$）である。

2.1 下負荷面の概念

降伏面内部の応力変化による塑性変形の表現は，次のように仮定すれば最も自然で簡単に実現できるであろう。

1) 応力が降伏面に近づくにつれて塑性変形が顕著に発生する。
2) 応力が降伏面に到達したら，古典弾塑性構成式がそのまま成り立つ。

さて，1)を表現するには，応力が降伏面にどれだけ近づいたかを表す尺度が必要である。その一般的な尺度は，常に現応力点を通って，降伏面（以後，“正規降伏面”と呼ぶ）に相似な面（“下負荷面”と呼ぶ）を想定し，正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比（“正規降伏比”と呼ぶ）$R(0\leq R\leq 1)$で与えられる。以下では，この基本概念に基づいて具体的な定式化を行う。

2.2 正規降伏面と下負荷面

下負荷面モデルの定式化の基本的理解のため，最も単純な次の等方硬軟化の正規降伏条件（面）を導入しよう。

$$f(\sigma_{ij})=F(H) \quad\cdots\cdots (5)$$

ここに，スカラーHは等方硬軟化変数である。

他方，下負荷面は，先述の正規降伏比Rを導入して次式で表される（図―1）。

$$f(\sigma_{ij})=RF(H) \quad\cdots\cdots (6)$$

2.3 塑性ひずみ増分

式(6)を全微分して次式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{rs}}d\sigma_{rs}=RF'dH+dRF,\ F'\equiv dF/dH \quad\cdots\cdots (7)$$

さて，実測結果によれば，塑性負荷状態においては，応力は正規降伏面に漸近するといえる。そこで，塑性負荷状態においては，正規降伏比Rは1に向かって増大するとし，その発展則として次式を仮定する。

$$dR=U(R)d\bar{\varepsilon}^p \quad \text{for} \quad d\varepsilon^p_{ij}\neq 0 \quad\cdots\cdots (8)$$

ここに，$d\bar{\varepsilon}^p$は塑性ひずみ増分の大きさ，つまり，

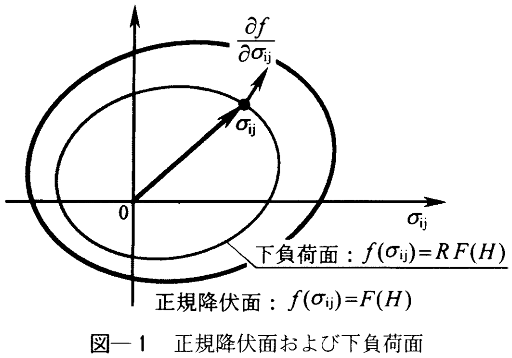
$$d\bar{\varepsilon}^p\equiv\sqrt{d\varepsilon^p_{rs}d\varepsilon^p_{rs}} \quad\cdots\cdots (9)$$

Uは次の条件を満たすRの単調増加関数である（図―2）。

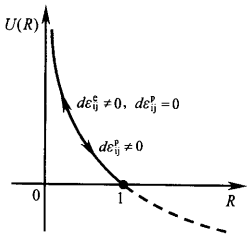
$$U(R)=\begin{cases}\infty & \text{for } R=0\text{(純粋弾性状態)}\\ 0 & \text{for } R=1\text{(正規降伏状態)}\end{cases} \quad\cdots\cdots (10)$$

この条件を満たす最も単純な関数Uは次式で与えられる。

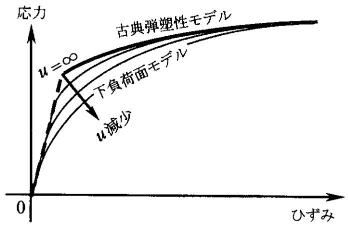
$$U(R)=-u\ln R \quad (u\text{：材料定数}) \quad\cdots\cdots (11)$$



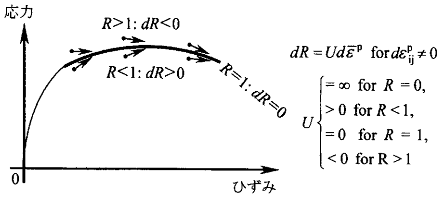
図―1　正規降伏面および下負荷面



図―2　正規降伏比 R の発展則における関数 U



図―3　材料定数 u による応力-ひずみ曲線の曲率の推移



図―4　下負荷面モデルに内包された応力自動制御機能

式(7)に式(8)を代入して次の適応条件を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} = RF' dH + Ud\bar{\varepsilon}^p F \quad \cdots\cdots (12)$$

ここで，次の関連流動則を導入しよう。

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \cdots\cdots (13)$$

ここに，$d\lambda(\geq 0)$ は正値の比例係数である。

式(13)を式(12)に代入して次式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} = RF' d\lambda h + U d\lambda \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} F, \quad h \equiv dH/d\lambda \quad \cdots\cdots (14)$$

式(14)より正値の比例係数 $d\lambda$ は次式で与えられる。

$$d\lambda = \frac{1}{M^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} \quad \cdots\cdots (15)$$

ここに，塑性係数 M^p は次式で与えられる。

$$M^p \equiv RF' h + U \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} F \quad \cdots\cdots (16)$$

ひずみ増分は式(2)，(3)，(13)および(15)より

$$d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + \frac{1}{M^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \cdots\cdots (17)$$

また，正値の比例係数 $d\lambda$ をひずみ増分で表現するとき記号 $d\Lambda$ を用いれば，式(17)より次のように表される。

$$d\Lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} E_{abcd}\, d\varepsilon_{cd}}{M^p + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqrs} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}} \quad \cdots\cdots (18)$$

式(2)，(3)，(13)および(18)より次の逆関係を得る。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} E_{abcd}\, d\varepsilon_{cd}}{M^p + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqrs} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad \cdots\cdots (19)$$

負荷基準は，硬，軟化状態によらず，次式で与え得る。

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p \neq 0 &: d\Lambda > 0 \\ d\varepsilon_{ij}^p = 0 &: \text{otherwise} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (20)$$

3.　下負荷面モデルの特徴

本モデルは，古典塑性構成式に比して画期的な改善がなされ，次のように多くの重要な長所が付与されている。

1)　弾性状態から塑性状態への滑らかな変化つまり“弾塑性遷移”を示し常に滑らかな応力-ひずみ曲線が予測される（図―3）。

2)　常に応力が負荷面の役割を持つ下負荷面上にあるので，負荷基準においては，降伏条件を満たすか否かの判定は不要で，式(20)のようにひずみ増分の方向についてのみ判定すればよい。

3)　条件式(10)を満たす正規降伏比の発展則を導入しているので，**図―4**に示すように，塑性負荷状態で応力が正規降伏面に漸近する自動制御機能を内包しており，数値計算の高精度化・高効率化が実現される。

なお，材料定数は，古典弾塑性構成式に対して，R の発展則に関する式(8)の u が1個増えるだけである。u は従来の塑性構成式への漸近の速度を規定する（**図―3**）。

4.　土への適用[3),4)]

土の正規降伏面は，主応力空間において原点を通って長軸が静水圧軸に一致する楕円体[5)]を呈し（**図―5**），また，硬軟化は塑性体積ひずみ ε_v^p により生じる。したがって，土の降伏条件は次式で表される（以下，応力，ひずみの符号は，すべて引張正とする）。

$$\left\{\frac{p - F(\varepsilon_v^p)/2}{F(\varepsilon_v^p)/2}\right\}^2 + \left\{\frac{\bar{\sigma}^*}{mF(\varepsilon_v^p)/2}\right\}^2 = 1 \quad \cdots\cdots (21)$$

ここに，

$$p \equiv -\sigma_{rr}/3,\ \sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij} + p\delta_{ij},\ \bar{\sigma}^* \equiv \sqrt{\sigma_{rs}^* \sigma_{rs}^*} \quad \cdots\cdots (22)$$

$$dH = d\varepsilon_v^p,\ d\varepsilon_v^p \equiv d\varepsilon_{rr}^p,\ h = -\partial f/\partial \sigma_{rr} \quad \cdots\cdots (23)$$

m は限界状態面の $(p, \bar{\sigma}^*)$ 面における勾配である。式(21)は式(5)の形式で次のように記される。

$$p\left\{1 + \left(\frac{\bar{\sigma}^*/p}{m}\right)^2\right\} = F(\varepsilon_v^p) \quad \cdots\cdots (24)$$

硬化関数 $F(\varepsilon_v^p)$ は具体的に次式で与え得る[3)]。

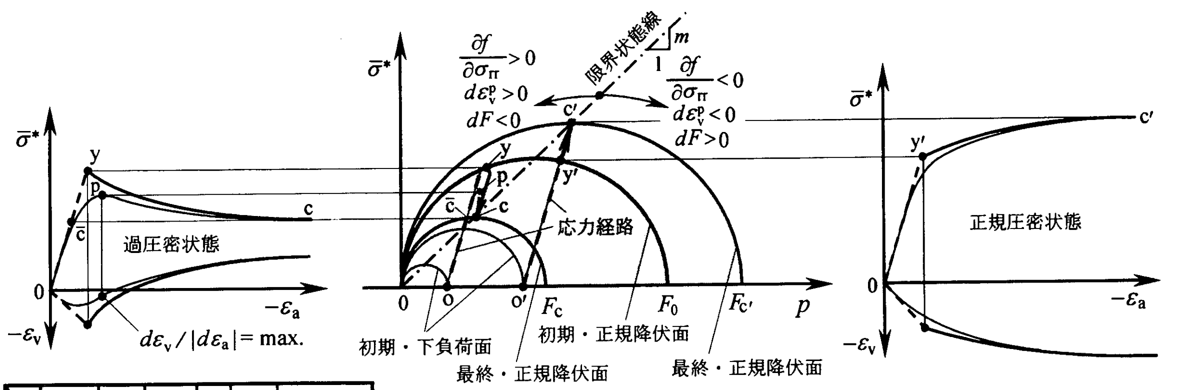
$$F(\varepsilon_v^p) = F_0 \exp\left(\frac{-\varepsilon_v^p}{\rho - \gamma}\right) \quad \cdots\cdots (25)$$

ここに，F_0 は F の初期値，また，ρ および γ は，等方圧密特性の $(\ln p, \ln v)$ 面におけるそれぞれ正規圧密（弾塑性）線および膨潤（弾性）線の勾配である。なお，本等方圧密特性に基づいて，体積ひずみ ε_v，弾性体積ひずみ ε_v^e および塑性体積ひずみ ε_v^p は次式で与えられる。

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p = -\gamma \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - (\rho - \gamma) \ln\left(\frac{p_y}{p_{y0}}\right) \quad \cdots\cdots (26)$$

ここに，p_0 は初期圧力，また，p_y は正規圧密圧力，p_{y0} はその初期値である。

式(4)の弾性係数テンソルにおける体積弾性係数 K は式(26)の第1項より得られ，また，これとPoisson比 ν によりせん断弾性係数 G は次式で与えられる。



<table>
<tr><th></th><th>$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}$</th><th>$d\varepsilon_v^p$</th><th>$dF$</th><th>$U$</th><th>$M^p$</th><th>$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}d\sigma_{rs}$</th></tr>
<tr><td>o ↓</td><td colspan="2">−</td><td>+</td><td rowspan="5">+</td><td colspan="2" rowspan="3">+</td></tr>
<tr><td>$\bar{c}$</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td>↓</td><td colspan="2">+</td><td>−</td></tr>
<tr><td>p</td><td colspan="2">max.</td><td>min.</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>↓</td><td colspan="2">+</td><td>−</td><td colspan="2">−</td></tr>
<tr><td>c</td><td colspan="6">0 （限界状態）</td></tr>
</table>

応力-ひずみ曲線

- - - - - - 弾性 } 修正Cam-clayモデル

———— 弾塑性 } (下負荷面モデル：$u\rightarrow\infty$)

———— 下負荷面モデル

$$d\varepsilon_{ij}^p=\frac{1}{M^p}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}d\sigma_{rs}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$M^p=RF'h+UF$$

$$F'=\frac{F}{\rho-\gamma},\quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}(=-h)=\left(\frac{\bar{\sigma}^*/p}{m}\right)^2-1,\quad U=-u\ln R,\quad F=F_0\exp\left(\frac{-\varepsilon_v^p}{\rho-\gamma}\right)$$

<table>
<tr><th></th><th>$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}$</th><th>$d\varepsilon_v^p$</th><th>$dF$</th><th>$U$</th><th>$M^p$</th><th>$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}d\sigma_{rs}$</th></tr>
<tr><td>o' ↓</td><td colspan="2">−</td><td colspan="4">+</td></tr>
<tr><td>c'</td><td colspan="6">0 （限界状態）</td></tr>
</table>

図—5　側圧一定排水３軸圧縮変形挙動の予測

$$K=\frac{p}{\gamma},\quad G=\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K \quad\cdots\cdots\cdots(27)$$

式(11)，(24)および(25)を２節の式(16)に代入して，塑性係数は次のように得られる。

$$M^p=-R\frac{F}{\rho-\gamma}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}-u\ln RF_0\exp\left(\frac{-\varepsilon_v^p}{\rho-\gamma}\right)\cdots\cdots(28)$$

図—5に，以上の土の構成式による側圧一定排水三軸圧縮試験における軸ひずみ ε_a に対する $\bar{\sigma}^*$ および体積ひずみ ε_v の予測特性を示す。本図に修正 Cam-clay モデル[5)]による予測特性も示している。下負荷面モデルによれば，応力が正規降伏面に近づくにつれて塑性変形が顕著に発生する実験事実を適切に表現し得る。特に，過圧密土において，軸ひずみに対する軸応力のピーク（図中の点 p）と軸ひずみ増分に対する体積ひずみ増分の極大値の発生時点が一致する実験事実[6)]も合理的に表現される。一方，Cam-clay モデル[5),7)]によれば，軟化現象を生じる過圧密土については過大なピーク応力が予測される。この欠点を補うものとして，過圧密状態に対して錘面状の降伏面を代用する Drucker-Prager モデル[8)]がある。これは，降伏面の内部を弾性域とする従来の塑性論に属し，関連流動則では過大な塑性体積膨張を予測するので，より勾配の低い塑性ポテンシャル面を仮定する非関連流動則が用いられる。しかし，下負荷面モデルに比して，多くの材料定数を要し，また，非対称構成テンソルを含む複雑な構成式となり，さらに非現実的な引張り降伏強度を有することになり，ピーク応力まで弾性的に鋭利に立ち上がった非現実的な応力-ひずみ曲線が予測される[4)]。

5.　その後の発展（拡張）

下負荷面モデルの基本理念，構成式について概説するとともに，その土への適用について述べたが，これは初期下負荷面モデルと呼ばれるものである。繰返し負荷挙動の予測のための拡張下負荷面モデル[2)]，下負荷面の接線方向の応力増分成分による非弾性ひずみ増分表現のための接線下負荷面モデル[9),10)]，変形速度の影響を考慮した速度依存性下負荷面モデル[11)]，土の構造変化を考慮した上負荷面モデル[12)]等，広範な拡張がなされている。

参　考　文　献

1) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech.* (ASME), Vol. 42, pp. 266～272, 1980.

2) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 25, pp. 917～945, 1989.

3) Hashiguchi, K. and Chen, Z.-P.: Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 22, pp. 197～227, 1998.

4) Hashiguchi, K., Saitoh, K., Okayasu, T. and Tsutsumi, S.: Evaluation of typical conventional and unconventional plasticity models for prediction of softening behavior of soils, *Geotechnique*, Vol. 52, pp. 561～573, 2002.

5) Roscoe, K. H. and Burland, J. B.: On the generalized stress-strain behavior of 'wet' clay, *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press, pp. 535～608, 1968.

6) Taylor, D. W.: *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, 1948.

7) Schofield, A. N. and Wroth, C. P.: *Critical State Soil Mechanics*, London, McGraw-Hill, 1968.

8) Drucker, D. C. and Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 2, pp. 157～165, 1952.

9) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, Vol. 17, pp. 117～145, 2001.

10) Khojastehpour, M. and Hashiguchi, K.: Axisymmetric bifurcation analysis of soils by the tangential-subloadig surface model, *J. Mech. Physics Solids*, Vol. 52, in press.

11) Hashiguchi, K., Okayasu, T. and Saitoh, K.: Rate-dependent inelastic constitutive equation: The extension of elastoplasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol. 20, in press.

12) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Superloading yield surface concept for highly saturated soil behavior, *Soils and Foundations*, Vol. 40, No. 2, pp. 99～110, 2000.

（原稿受理　2004.5.31）