論　文

三軸圧縮試験からせん断強度定数を決定する方法の統計学的検討

Statistical Discussions for Determining of Strength Coefficients by Triaxial Compression Tests

菱田省一（ひしだ　しょういち）
応用地質㈱エネルギー事業部

小川浩司（おがわ　こうじ）
応用地質㈱エネルギー事業部

船戸明雄（ふなと　あきお）
応用地質㈱コアラボ

1.　はじめに

三軸圧縮試験の結果からモール・クーロンの破壊規準でせん断強度定数を求める場合には，「土質試験の方法と解説」[1)]に示されている二つの方法のいずれかを用いて最小二乗法を適用するのが一般的である。ところが図—1のように試験結果のばらつきが大きい場合は，両方法による強度定数に無視できない差が生ずることがある。もちろんこのような場合には機械的に最小二乗法を適用するのではなく，ばらつきの原因を検討した上で4個の供試体を1組の試料として扱うことが妥当かどうかなどの工学的判断が要求される。

本稿は，三軸圧縮試験の結果からせん断強度定数を求める二つの方法について説明し，得られる強度定数の統計学的意味を論ずるものである。

2.　回帰係数と強度定数の関係

2.1　圧縮強さと側圧から求める方法

図—2のように，縦軸に圧縮強さ $(\sigma_a-\sigma_r)_f$，横軸に側圧 σ_{rf} をプロットし，最小二乗法によって直線回帰したときの勾配 m_1，縦軸切片 f_1 から，次式で強度定数を求める（以下，この方法を方法1と呼ぶ）。

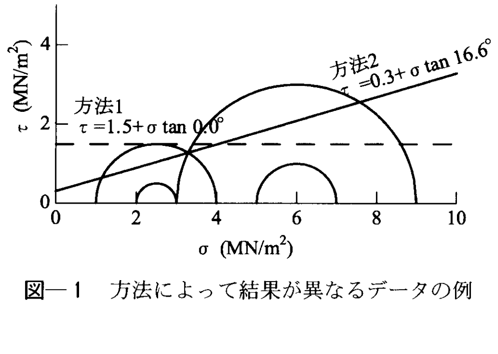
$$\phi=\sin^{-1}(m_1/(2+m_1)) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$c=f_1/2\sqrt{1+m_1} \qquad \cdots\cdots(2)$$

図—3の回帰直線と包絡線との幾何学的な関係から，

$$\sin\phi=\frac{r}{A},\quad m_1=\frac{2r}{A-r},\quad \frac{c}{f_1}=\frac{\tan\phi}{m_1}$$

であるので，これらの式から A を消去すれば(1)，(2)を導出できる。



図—1　方法によって結果が異なるデータの例

2.2　圧縮強さの1/2と破壊時の軸方向応力と側圧の平均から求める方法

図—4のように縦軸に圧縮強さの1/2，横軸に破壊時の軸方向応力と側圧の平均値 $(\sigma_a+\sigma_r)_f/2$ をプロットし，最小二乗法によって直線回帰したときの勾配 m_2，縦軸切片 f_2 から次式で強度定数を求める（以下，この方法を方法2と呼ぶ）。

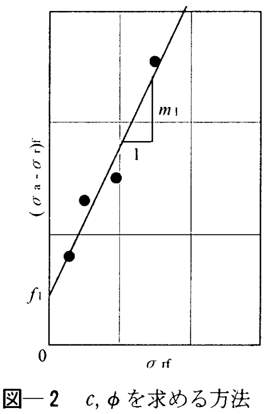
$$\phi=\sin^{-1}m_2 \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$c=f_2/\sqrt{1-m_2^2} \qquad \cdots\cdots(4)$$

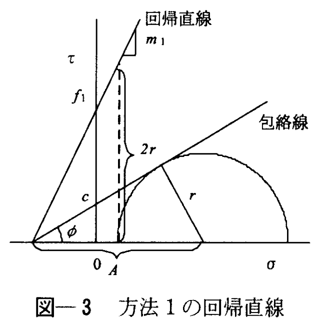
図—5の回帰直線と包絡線との幾何学的な関係から，

$$\sin\phi=\frac{r}{A},\quad m_2=\frac{r}{A},\quad \frac{c}{f_2}=\frac{\tan\phi}{m_2}$$

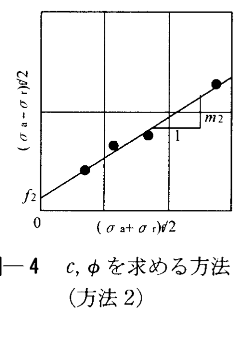
であるので，これらの式から A を消去すれば(3)，(4)を導出できる。



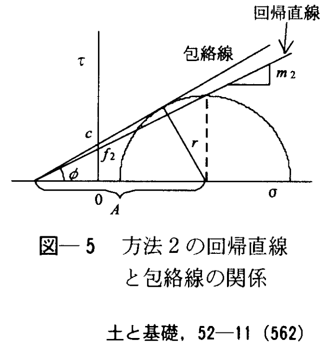
図—2　c, ϕ を求める方法（方法1）



図—3　方法1の回帰直線と包絡線の関係



図—4　c, ϕ を求める方法（方法2）



図—5　方法2の回帰直線と包絡線の関係

3.　両方法の統計学的，幾何学的意味

3.1　最小二乗法の統計的扱い

最小二乗法とは，説明変数と被説明変数の間の線形的な関係を推定する方法である。説明変数とは，制御できる変数であり，言わば測定条件である。これに対し，被説明変数は測定値であり，ばらつきや諸々の誤差を含んでいる量である。

この考え方からすると，三軸圧縮試験において，説明変数は破壊時の側圧 σ_{rf}，被説明変数は破壊時の軸方向応力 σ_{af} と考えるのが妥当である。したがって，統計学的に正しい最小二乗法の適用方法は，σ_{rf} と σ_{af} の間に，$\sigma_{\mathrm{af}}=m_0\sigma_{\mathrm{rf}}+f_0$ なる関係を仮定して m_0, f_0 を回帰する方法である（この方法を方法 0 と呼ぶ）。

ここで，σ_{rf} と σ_{af} を確率変数そのものとして扱うと，傾きおよび切片は以下のようになる。

$$m_0=\frac{Cov(\sigma_{\mathrm{rf}},\sigma_{\mathrm{af}})}{Var(\sigma_{\mathrm{rf}})} \quad\cdots\cdots(5)$$

$$f_0=\frac{E(\sigma_{\mathrm{af}})\,Var(\sigma_{\mathrm{rf}})-E(\sigma_{\mathrm{rf}})\,Cov(\sigma_{\mathrm{rf}},\sigma_{\mathrm{af}})}{Var(\sigma_{\mathrm{rf}})} \quad\cdots\cdots(6)$$

ここに，Cov：共分散

Var：分散

E：平均値

3.2　方法 1 の統計学的解釈

方法 1 において，

$$y=\sigma_{\mathrm{af}}-\sigma_{\mathrm{rf}} \quad\cdots\cdots(7)$$

とおき，$y=m_1\sigma_{\mathrm{rf}}+f_1$ の関係に最小二乗法を適用すると，(5), (6)式と同様に，傾きと切片は以下のようになる。

$$m_1=\frac{Cov(\sigma_{\mathrm{rf}},\sigma_{\mathrm{af}}-\sigma_{\mathrm{rf}})}{Var(\sigma_{\mathrm{rf}})}=\frac{Cov(\sigma_{\mathrm{rf}},\sigma_{\mathrm{af}})-Var(\sigma_{\mathrm{rf}})}{Var(\sigma_{\mathrm{rf}})}$$

$$=m_0-1 \quad\cdots\cdots(8)$$

$$f_1=\frac{E(\sigma_{\mathrm{af}}-\sigma_{\mathrm{rf}})\,Var(\sigma_{\mathrm{rf}})-E(\sigma_{\mathrm{rf}})\,Cov(\sigma_{\mathrm{rf}},\sigma_{\mathrm{af}}-\sigma_{\mathrm{rf}})}{Var(\sigma_{\mathrm{rf}})}$$

$$=\frac{E(\sigma_{\mathrm{af}})\,Var(\sigma_{\mathrm{rf}})-E(\sigma_{\mathrm{rf}})\,Cov(\sigma_{\mathrm{rf}},\sigma_{\mathrm{af}})}{Var(\sigma_{\mathrm{rf}})}=f_0 \quad\cdots\cdots(9)$$

したがって，方法 1 は本質的には方法 0 と同じであり，σ_{af} に含まれる誤差を正しく扱っていることがわかる。すなわち，方法 1 は統計学的に正しく最小二乗法を適用していることなる。

3.3　方法 2 の幾何学的解釈

破壊基準がモール円群に接する包絡線という考え方からすれば，モール円と求める直線の最小距離を残差とするのが妥当であるという主張もあり得る。

モール円の中心の x 座標 x および半径 r は次のように書ける。

$$x=\frac{\sigma_{\mathrm{af}}+\sigma_{\mathrm{rf}}}{2},\quad r=\frac{\sigma_{\mathrm{af}}-\sigma_{\mathrm{rf}}}{2} \quad\cdots\cdots(10)$$

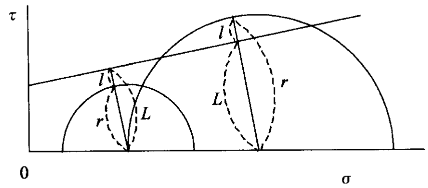
いま，求める包絡線を，

$$y=x\tan\phi+c \quad\cdots\cdots(11)$$

と置く。(11)を次のように変形する。

$$x\sin\phi-y\cos\phi+c\cos\phi=0 \quad\cdots\cdots(11')$$

モール円の中心から包絡線(11′)への垂線の長さ L は，



図―6　モール円と包絡線の最小距離

$$L=|x\sin\phi+c\cos\phi|$$

と表せる。ここで，$x\geqq 0,\ 0\leqq\phi<\pi/2,\ c\geqq 0$ とすると，

$$x\sin\phi+c\cos\phi\geq 0$$

となる。したがって，モール円と(11′)の最小距離 l は，

$$l=|x\sin\phi+c\cos\phi-r| \quad\cdots\cdots(12)$$

と書ける（**図―6** 参照）。

残差二乗和 S は次のようになる。

$$S=\sum_i^n l^2=\sum(x\sin\phi+c\cos\phi-r)^2 \quad\cdots\cdots(13)$$

(13)を最小とする条件は

$$\frac{\partial S}{\partial c}=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial\phi}=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

であるから，(13), (14)より

$$\frac{\partial S}{\partial c}=2\cos\phi(\Sigma x\sin\phi+nc\cos\phi-\Sigma r)=0$$

ここで，$\cos\phi\neq 0$ であるから，

$$\Sigma x\sin\phi+nc\cos\phi-\Sigma r=0$$

$$c=\frac{\Sigma r-\Sigma x\sin\phi}{n\cos\phi}=\frac{E(r)-E(x)\sin\phi}{\cos\phi} \quad\cdots\cdots(16)$$

同様に，(13), (15)より，

$$\frac{\partial S}{\partial\phi}=2\{-nc^2\sin\phi\cos\phi+(\Sigma x\cos^2\phi-\Sigma x\sin^2\phi+\Sigma r\sin\phi)$$

$$\times c+\Sigma x^2\sin\phi\cos\phi-\Sigma xr\cos\phi\}=0$$

これに(16)を代入して整理すると，

$$\cos^2\phi\{Var(x)\sin\phi-Cov(r,x)\}=0$$

$\cos\phi\neq 0$ であるから，

$$Var(x)\sin\phi-Cov(r,x)=0$$

したがって，

$$\sin\phi=\frac{Cov(r,x)}{Var(x)} \quad\cdots\cdots(17)$$

これを(16)に代入すると c として次式が得られる。

$$c=\frac{E(r)\,Var(x)-E(x)\,Cov(r,x)}{\sqrt{Var(x)^2-Cov(r,x)^2}} \quad\cdots\cdots(18)$$

一方，方法 2 の傾き m_2 および切片 f_2 は，(5), (6)において $\sigma_{\mathrm{rf}}\to x$, $\sigma_{\mathrm{af}}\to r$ と置き換えたものにほかならないから，この m_2 と f_2 を(3), (4)に代入して得られる c と ϕ は(17), (18)と同一である。また，m_2 と f_2 に(10)を代入すると，

$$m_2=\frac{Var(\sigma_{\mathrm{af}})-Var(\sigma_{\mathrm{rf}})}{Var(\sigma_{\mathrm{af}})+Var(\sigma_{\mathrm{rf}})+2Cov(\sigma_{\mathrm{af}},\sigma_{\mathrm{rf}})} \quad\cdots\cdots(19)$$

$$f_2=\frac{E(\sigma_{\mathrm{af}})\,Var(\sigma_{\mathrm{rf}})-E(\sigma_{\mathrm{rf}})\,Var(\sigma_{\mathrm{af}})+\{E(\sigma_{\mathrm{af}})-E(\sigma_{\mathrm{rf}})\}Cov(\sigma_{\mathrm{af}},\sigma_{\mathrm{rf}})}{Var(\sigma_{\mathrm{af}})+Var(\sigma_{\mathrm{rf}})+2Cov(\sigma_{\mathrm{af}},\sigma_{\mathrm{rf}})} \quad\cdots\cdots(20)$$

となり，方法０や方法１と異なる結果を与える。

以上をまとめると，モール円との最小距離を残差とする最小二乗法は数学的に方法２と等価であるが，方法１とは異なる。

3.4　両方法によって得られる定数の相互関係

方法１によって得られる定数を c_1, ϕ_1，方法２によって得られる定数を c_2, ϕ_2 とする。

(1), (2), (8), (9)より

$$\sin\phi_1 = \frac{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) - Var(\sigma_{rf})}{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) + Var(\sigma_{rf})} \quad \cdots\cdots(21)$$

$$c_1 = \frac{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})}{2\sqrt{Var(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})}} \quad \cdots\cdots(22)$$

また，(3), (4), (19), (20)より

$$\sin\phi_2 = \frac{Var(\sigma_{af}) - Var(\sigma_{rf})}{Var(\sigma_{af}) + Var(\sigma_{rf}) + 2Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})} \quad \cdots\cdots(23)$$

$$c_2 = \frac{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Var(\sigma_{af}) + \{E(\sigma_{af}) - E(\sigma_{rf})\}Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})}{2\sqrt{\{Var(\sigma_{rf}) + Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})\}\{Var(\sigma_{af}) + Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})\}}} \quad \cdots\cdots(24)$$

となる。

ここで，ϕ_1 と ϕ_2 の大きさを比較する。$-\pi/2<\theta<\pi/2$ では $\sin\theta$ は単調増加関数であるから，ϕ_1 と ϕ_2 の大小関係は $\sin\phi_1$ と $\sin\phi_2$ の大小関係と同じである。したがって，

$$\begin{aligned}\sin\phi_2 - \sin\phi_1 &= \frac{Var(\sigma_{af}) - Var(\sigma_{rf})}{Var(\sigma_{af}) + Var(\sigma_{rf}) + 2Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})} - \frac{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) - Var(\sigma_{rf})}{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) + Var(\sigma_{rf})} \\ &= \frac{2\{Var(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})^2\}}{\{Var(\sigma_{af}) + Var(\sigma_{rf}) + 2Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})\}\{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) + Var(\sigma_{rf})\}} \\ &= \frac{2\left\{1 - \dfrac{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})^2}{Var(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf})}\right\}}{Var(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{af} + \sigma_{rf})\left\{\dfrac{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})}{Var(\sigma_{rf})} + 1\right\}} \quad \cdots(25)\end{aligned}$$

となり，「σ_{rf} と σ_{af} の間には正の相関がある」という一般的にほぼ成り立つことを仮定すると分母は正となる。一方，$\dfrac{Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})}{\sqrt{Var(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf})}}$ は相関係数であり，相関係数 ρ は必ず $-1 \leqq \rho \leqq 1$ の範囲にある。したがって，$\rho^2 \leqq 1$ であり，分子は非負となる。つまり，σ_{rf} と σ_{af} の間に正の相関があれば，$\sin\phi_2 \geqq \sin\phi_1$，すなわち $\phi_2 \geqq \phi_1$ が成立する。また，等号は $\rho^2=1$ の時にのみ成立する。これは，データにばらつきがないときにのみ，ϕ_1 と ϕ_2 が一致することを示している。

次に，c_1 と c_2 を比較する。

いま，$c_1 \geqq 0, c_2 \geqq 0$ とすると，(22), (24)より，

$$E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) \geqq 0 \quad \cdots\cdots(26)$$

$$E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Var(\sigma_{af}) + \{E(\sigma_{af}) - E(\sigma_{rf})\} \times Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf}) \geqq 0 \quad \cdots\cdots(27)$$

である。このとき c の大小関係は c^2 の大小関係と同じであるから，c_1^2 と c_2^2 の差をとると以下のようになる。

$$c_1^2 - c_2^2 = \frac{Var(\sigma_{af})\left\{1 - \dfrac{Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})^2}{Var(\sigma_{rf})\,Var(\sigma_{af})}\right\}}{4Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\{Var(\sigma_{rf}) + Cov(\sigma_{af}\,\sigma_{rf})\}\{Var(\sigma_{af}) + Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf})\}}$$

$$\underline{\{E(\sigma_{af})^2 Var(\sigma_{rf})^2 - E(\sigma_{rf})^2 Var(\sigma_{af})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})}$$

$$\underline{+E(\sigma_{af})^2 Var(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) - E(\sigma_{rf})^2 Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})^2\}} \quad \cdots\cdots(28)$$

ここで，ϕ の議論と同様に，「σ_{rf} と σ_{af} の間には正の相関がある」とすると分母は正となる。また，分子の第１｛　｝も ϕ の場合と同様に $1-\rho^2$ であり非負である。

次に，分子の第２｛　｝の正負について考える。それを書き出して変形すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\text{第2}\{\ \} = &\{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\} \\ &\times \{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) + E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\} \\ &+ E(\sigma_{af})^2 Var(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) \\ &- E(\sigma_{rf})^2 Var(\sigma_{af})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) \quad \cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

ここで，(26), (27)より

$$E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) \geqq E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})$$

$$E(\sigma_{af})\,Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Var(\sigma_{af}) \geqq E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{af}, \sigma_{rf}) - E(\sigma_{af})\,Var(_{rf})$$

であることを用いて，以下のように変形する。

$$\begin{aligned}\text{第2}\{\ \} \geqq &\{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) - E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\} \\ &\times \{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) + E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\} \\ &+ E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf})\{E(\sigma_{af})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af}) \\ &- E(\sigma_{rf})\,Var(\sigma_{af})\} \\ \geqq &E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\{E(\sigma_{af})\,Var(\sigma_{rf}) \\ &- E(\sigma_{rf})\,Cov(\sigma_{rf}, \sigma_{af})\} \geqq 0 \quad \cdots\cdots(30)\end{aligned}$$

したがって，分子の第２｛　｝も非負である。

以上から，「σ_{rf} と σ_{af} の間には正の相関がある」，「$c_1 \geqq 0, c_2 \geqq 0$」という一般的な条件下では，$c_1^2 - c_2^2 \geqq 0$，すなわち $c_1 \geqq c_2$ となる。また，相関係数が１，すなわちデータにばらつきがない場合には，$c_1 = c_2$ となる。

4.　ま　と　め

三軸圧縮試験の破壊時の応力から，最小二乗法を用いて c, ϕ を求める方法について概説し，これらの方法で得られる c, ϕ の相互関係を明らかにした。

① 方法１は統計学的に正しく誤差を扱っているが，包絡線のイメージとは乖離している。

② 方法２は統計学的な意味付けは難しいが，モール円と包絡線との最小距離を残差とする最小二乗法と数学的に等価で，c, ϕ のイメージに合致する。

③ 一般的な条件下では，$\phi_1 \leqq \phi_2, c_1 \geqq c_2$ であり，ばらつきがない場合にのみ $\phi_1 = \phi_2, c_1 = c_2$ となる。

今後は，統計学的により合理的なせん断強度定数決定法を追求していきたい。

参　考　文　献

1)　㈳地盤工学会：土質試験の方法と解説―第一回改訂版―，pp. 462～501, 2000.

（原稿受理　2003.10.24）