

Q&A コナ

内部摩擦角 ϕ と 摩擦係数について

Q

土のせん断強さは、 $\tau = c + \sigma \tan \phi$ で表現され、 c および $\tan \phi$ は接触面での粘着力と摩擦係数を表します。一方、せん断強さを表す強度定数としては c と内部摩擦角 ϕ が一般に用いられています。摩擦係数 $\tan \phi$ として表現された方がわかりやすいと思うのですが、あえて角度で表現している理由を教えてください。

A

モール・クーロンの破壊規準 ($\tau = c + \sigma \tan \phi$)

で、なぜ摩擦係数を使わず $\tan \phi$ として、摩擦角 ϕ を使うのかということについて、摩擦についての歴史的な経過を考えてみよう。

2 物体間の巨視的な摩擦の問題を最初に研究したのは、16世紀のレオナルドダビンチ (Leonardo da Vinci) であり、板の上においた物体の重さと板の角度を測定した。ダビンチは、さらに図-1のような2物体間の摩擦を測るための実験を行い、2物体間の摩擦は、物体間の表面積に比例するのではなく、物体間に働く垂直力に比例することに気がついた。最終的に、物体を動かすために必要な張力 T は垂直力 P に比例すること ($T = \mu P$) を見出した。このような特徴は、その後、17世紀にフランスのアモントン (G. D'Amontons, 1663~1705) によって再発見された。その後、数学で有名なレオンハルトオイラー (L. Euler, 1707~1783) はダビンチの行った、2物体間の垂直な力の成分を板を傾けることによって減少させる摩擦力を測る実験を再考した。オイラーは、摩擦力を重力に起因すると考え、角度 ϕ と摩擦係数 μ の関係が、 $\mu = \tan \phi$ となることを見出した。この ϕ が摩擦角であり、 ϕ は力の釣合いから図-2のように考えられます。このようにして、摩擦係数は角度と関連づけられ、摩擦角が用いられるようになったと考えられます。後年のモール (Otto Mohr, 1871) による土に関するモール・クーロンの破壊規準での内部摩擦角は、二つの物体間の摩擦そのものではなく、土が破壊するときに発生するすべり面 (または破壊面) 上で考えた摩擦則に対応している。オイラーの少し後に、クーロンはアモントンの結果にならい、摩擦則を研究した。クーロンは、土が破壊する場合、すべり面が発生することから、すべり面に関して摩擦則を適用し、釣合いを考えて土圧の問題を解いた。その後、ランキン (1857) は、クーロンの仕事を3次元状態に拡張している。ランキンは、最大および最小主応力のみを考慮し (すべりに中間主応力には依

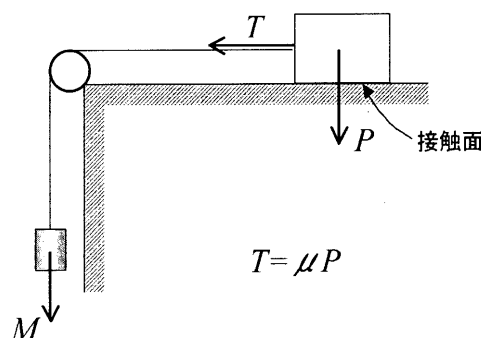


図-1 摩擦係数 μ

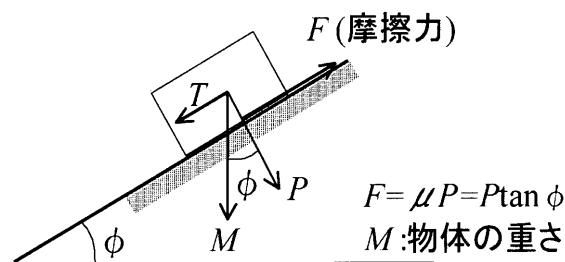


図-2 摩擦角 ϕ

存しないとして)、物体中の任意の面に働くせん断応力と垂直応力の比が最大・最小になる面の角度を求め、この角度が最大値となる時の主応力の比から求められる角度 ($= \sin^{-1}(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)$) は安息角 (angle of repose) より大きくならないことを述べています。その後、モールは、すべり面に働く最大せん断力は、その面に働く垂直力と材料の状態に依存し、中間主応力にはよらないと考え、彼の考えた図解法を用いてランキンの破壊に関する仮定を明らかにしました。その際、粘着力の項を付け加え、クーロン則を一般化したモール・クーロンの破壊規準としました。このように、物体間の摩擦の研究から、すべり面を介して、土の破壊規準に摩擦角 (内部摩擦角) が用いられているわけです。ただし、テイラー (D. W. Taylor, 1948) の述べているように、物体間のすべりと、土のすべり面 (せん断帯) は似通っているが、土の場合すべりだけでなく粒子の回転とインターロッキングもあるためより複雑であると指摘していることには注意が必要です。以上より、摩擦角が用いられる理由は、物体間の摩擦の研究で、傾斜した角度に対して摩擦力が調べられたこと、物体間の摩擦力の問題から、すべり面と傾斜角とのアナロジーを通して、内部摩擦角が用いられてきたことにあると考えられます。機械系の Tribology (摩擦, 潤滑学) などでは摩擦角はあまり用いられず、摩擦係数が用いられていますが、その理由はすべり面と関係が薄いからだと思われます。

参考文献

- 1) J. Duran, Sands, Powders and Grains, Springer, 2000, 和訳 粉粒体の物理学, 中西, 奥村訳, 吉岡書店, 2002.
 - 2) www.tribology-abc.com/abc/friction.htm
 - 3) D. W. Taylor, Fundamentals of soil mechanics, Wiley, 1948.
 - 4) R. de Boer, Theory of porous media, Springer, 2000.
- (文責: 岡二三生 京都大学)

(原稿受理 2002.7.1)