土質工学会論文報告集
Vol. 15, No. 3, Sept. 1975

研究ノート

粒状体の応力比-構造式に関する省察

(Stress Ratio-Fabric Equations of Granular Media)

橋　口　公　一* (Koichi Hashiguchi)

キーワーズ：圧縮／砂／塑性／土の構造／ヒズミ／摩擦
IGC：　D 6/D 3

1. はじめに

近年来，微視的観点から粒状体の力学的特性に関して多くの報告がなされているが，この一見シンプルに見える問題は非常に難解で，現段階でただちに結論を得ることは望むべくもないようにすら思える。しかるに，難題であるがゆえに，種々の観点からの一層の検討を進めねばならないことはいうまでもないが，他面，これにより諸説乱出，混乱を招いている状況も否めない。まったく新たな立場からの諸概念を見い出すこともさることながら，従来より呈出されている諸概念に対する一層の省察を進めて，より適切な概念を見極め，取捨選択し，これらの妥当な概念に基づいて，未解決な多くの問題点の究明をさらに進めねばならない。

さて，古く Horne[1)]は粒状体の力学的特性に関する微視的解析に基づいて，応力比-構造式その他を規定しているが，近年，小田[2),3)]は新たな立場から，前者とは異なる応力比-構造式を提案している。後者の提案式は独特の興味深い仮定に基づくものであるが，その導出過程は必ずしも妥当ではないと思われる。しかるに，本提案式の適否に関して，必ずしも核心に至らない，あるいは誤解であると思われる多くの議論が繰り返えされ[4),5),6),7),8)]，根底からの一層の省察なしには，結論を得るには至り得ないように思われる。

本文においては，巨視的応力と粒子間力の関係などに関する一般的考察を行ない，さらに，非粘着性材料における粒子間力に関して小田により主張された仮説，および，これにごく自然であると思われる付加的条件を考慮することにより，軸対称圧縮，伸張状態および平面ヒズミ状態における応力比-構造式を導びき，これらの諸式と小田および Rowe[9)] の提案式との関連について述べる。さらに，先に Horne により究明された理論的概念と対照しつつ，これらの諸式の適否，さらには今後，進んで解明に当たらねばならない問題点について述べる。

2. 巨視的応力，粒子間力などに関する一般的関係

2.1 巨視的応力と粒子間力の関係について

右手系直角座標 (x, y, z) を採用し，これらの座標軸方向に関する応力成分を $\sigma_{ij}(i, j=x, y, z)$ とする。なお，本文においては応力およびヒズミの符号は引張を正とする。

さて，粒状体内の巨視的応力一様とみなしうる領域において，x, y および z 軸にそれぞれ垂直な微小面積素 ΔS_x, ΔS_y および ΔS_z を考える**。さらに，粒子は球状（等径である必要はない）であるとし，中心が ΔS_x, ΔS_y および ΔS_z の各面の互いに反対側にある粒子相互の接触点***をつらねた微小曲面素をそれぞれ $\Delta S_x'$, $\Delta S_y'$ および $\Delta S_z'$ とする。したがって，これらの微小曲面素は次の条件を満たす（図-1 参照）。

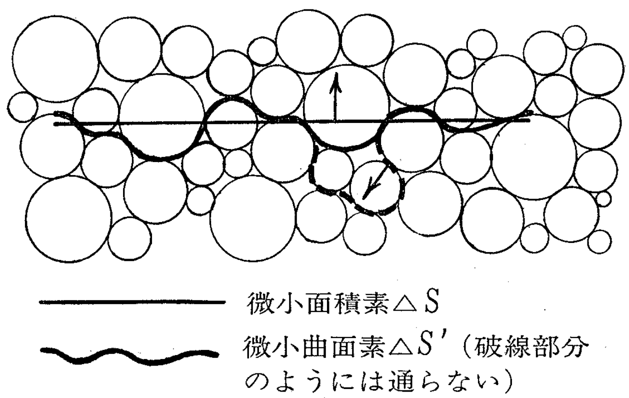

図-1　微小面積素 ΔS および微小曲面素 $\Delta S'$ の2次元的説明図

** 巨視的応力一様とみなせる程度に微小であるが，平均粒子間距離の平方に比してはるかに大きな面積素とする。

*** 片側あるいは両側の粒子の重心が微小面積素上にある場合の接触点も含むものとする。

* 九州大学農学部（福岡市東区大字箱崎3575-1）

・この研究ノートに対するディスカッションは昭和51年7月1日までにご投稿下さい。

条件一A：

“一般に微小面積素 $\varDelta S$ に相応する（粒子接触点を通る）微小曲面素を $\varDelta S'$ とするとき，$\varDelta S'$ の片側に立てた法線ベクトルの $\varDelta S$ に垂直な方向への垂直射影ベクトルは $\varDelta S$ の同じ側に立てた法線ベクトルと常に同じ向きを有する。”

また，粒子面に作用している力をベクトル $\boldsymbol{f}$ で表わし，$\boldsymbol{f}$ の x, y および z 軸方向の成分をそれぞれ f_x, f_y および f_z とする。さらに，$\varDelta S_x'$ に対して x 軸の座標値が大である側から作用している力を $\boldsymbol{f}_i^x(i=1,\ 2,\cdots\cdots n_x)$ とする。$\boldsymbol{f}_j^y(j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n_y)$ および $\boldsymbol{f}_k^z(k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n_z)$ についても同様とし，これらの x, y および z 軸方向の成分にそれぞれ下添字 x, y および z を付する。なお，$\varDelta S_x'$, $\varDelta S_y'$ および $\varDelta S_z'$ に対してそれぞれ x, y および z 軸の座標値が小である側からはそれぞれ $-\boldsymbol{f}_i^x$, $-\boldsymbol{f}_j^y$ および $-\boldsymbol{f}_k^z$ が作用していることはいうまでもない。また，微小曲面素 $\varDelta S_x'$, $\varDelta S_y'$ および $\varDelta S_z'$ の片側からそれぞれ n_x, n_y および n_z 個の力が作用している。すなわち，これらの数の粒子接触があるとしたが，一般に元面積素 $\varDelta S$ に対応する曲面素 $\varDelta S'$ 内に n 個の粒子接触があるとき $\bar{n}=n/\varDelta S$ とおいた $\bar{n}$ は $\varDelta S$ に関する単位面積当たりの粒子接触数と規定しうるので，

$$\bar{n}_x=n_x/\varDelta S_x,\ \bar{n}_y=n_y/\varDelta S_y,\ \bar{n}_z=n_z/\varDelta S_z \qquad (1)$$

とおいた $\bar{n}_x$, $\bar{n}_y$ および $\bar{n}_z$ はそれぞれ x, y および z 軸に垂直な面における単位面積当たりの粒子接触数となる。

さて，巨視的応力 σ_{ij} と粒子間力 $\boldsymbol{f}_i^x$, $\boldsymbol{f}_j^y$ および $\boldsymbol{f}_k^z$ の x, y および z 軸方向の成分の間に次の関係が成り立つと考えうる*。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{1}{\varDelta S_x}\sum_{i=1}^{n_x}f_{ix}^x,\quad \sigma_y=\frac{1}{\varDelta S_y}\sum_{j=1}^{n_y}f_{jy}^y,\\
&\sigma_z=\frac{1}{\varDelta S_z}\sum_{k=1}^{n_z}f_{kz}^z,\\
&\tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{1}{\varDelta S_x}\sum_{i=1}^{n_x}f_{iy}^x=\frac{1}{\varDelta S_y}\sum_{j=1}^{n_y}f_{jx}^y,\\
&\tau_{yz}=\tau_{zy}=\frac{1}{\varDelta S_y}\sum_{j=1}^{n_y}f_{jz}^y=\frac{1}{\varDelta S_z}\sum_{k=1}^{n_z}f_{ky}^z,\\
&\tau_{zx}=\tau_{xz}=\frac{1}{\varDelta S_z}\sum_{k=1}^{n_z}f_{kx}^z=\frac{1}{\varDelta S_x}\sum_{i=1}^{n_x}f_{iz}^x.
\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

とくに，座標 $(x,\ y,\ z)$ が，主応力 σ_1, σ_2 および σ_3 方向に一致するように選んだ座標 $(X,\ Y,\ Z)$ に一致する場合，添字を $x\to1$, $y\to2$, $z\to3$ とおきかえれば，

* 体積モーメントを無視し得ない場合には，応力テンソルは非対称となり，偶応力 (couple stress) を導入せねばならない。しかるに，粒状体においては，インターロッキングなどが極端に強い場合などを除いて粒子間の結合力は弱く，粒子間には垂直（圧縮）力および切線力に比してモーメントの作用は微弱であり，さらに，前ページの脚注 **に記したように，粒子径に比してはるかに大きな面積素，すなわち，非常に多数の粒子からなる集合体を想定しているので，偶応力を考慮する必要はなく，ゆえに，応力テンソルを対称テンソルとしてさしつかえない。

これらの主方向に関して次の関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1=\frac{1}{\varDelta S_1}\sum_{I=1}^{n_1}f_{IX}{}^X,\quad \sigma_2=\frac{1}{\varDelta S_2}\sum_{J=1}^{n_2}f_{JY}{}^Y,\\
&\sigma_3=\frac{1}{\varDelta S_3}\sum_{K=1}^{n_3}f_{KZ}{}^Z,\\
&\sum_{I=1}^{n_1}f_{IY}{}^X=\sum_{I=1}^{n_1}f_{IZ}{}^X=\sum_{J=1}^{n_2}f_{JX}{}^Y=\sum_{J=1}^{n_2}f_{JZ}{}^Y\\
&=\sum_{K=1}^{n_3}f_{KX}{}^Z=\sum_{K=1}^{n_3}f_{KY}{}^Z=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

2.2 非粘着性材料における粒子間力と粒子面法線方向の関係について

力 $\boldsymbol{f}$ が加わっている粒子面上の点に立てた単位外法線ベクトルを $\boldsymbol{\nu}$ とし，Coulomb の摩擦則

$$-\frac{\boldsymbol{f}}{|\boldsymbol{f}|}\cdot\boldsymbol{\nu}\geqq\cos\phi_\mu \qquad (4)$$

が成り立つと仮定する。ここに，ϕ_μ は粒子相互間の摩擦角であり，$0\leqq\phi_\mu\leqq45°$ とする。

ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の方向を 図-2 のように，$\boldsymbol{\nu}$ の $X-Y$ 面への垂直射影ベクトル $\boldsymbol{\nu}'$ へ X 軸から測った角 α, および $\boldsymbol{\nu}'$ から $\boldsymbol{\nu}$ へ測った角 β $(-\pi/2\leqq\beta\leqq\pi/2)$ で規定する。また，$\boldsymbol{f}$ に対しても，同様に $\boldsymbol{f}'$ および α', β' を導入すれば，$\boldsymbol{\nu}$ および $\boldsymbol{f}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu}&=\boldsymbol{\nu}'+\nu_Z\boldsymbol{k}=\nu_X\boldsymbol{i}+\nu_Y\boldsymbol{j}+\nu_Z\boldsymbol{k}\\
&=\cos\beta\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\sin\alpha\,\boldsymbol{j}+\sin\beta\,\boldsymbol{k} \qquad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}&=\boldsymbol{f}'+f_Z\boldsymbol{k}=f_X\boldsymbol{i}+f_Y\boldsymbol{j}+f_Z\boldsymbol{k}\\
&=|\boldsymbol{f}|(\cos\beta'\cos\alpha'\,\boldsymbol{i}+\cos\beta'\sin\alpha'\,\boldsymbol{j}+\sin\beta'\,\boldsymbol{k}) \qquad (6)
\end{aligned}$$

と表わしうる。ここに，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ および $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ X, Y および Z 軸方向の単位ベクトルである。

式（5）および（6）により，式（4）は

$$\begin{aligned}
&-(\nu_Xf_X+\nu_Yf_Y+\nu_Zf_Z)/|\boldsymbol{f}|\\
&=-\{\cos\beta\cos\beta'\cos(\alpha-\alpha')\\
&\quad+\sin\beta\sin\beta'\}\geqq\cos\phi_\mu \qquad (7)
\end{aligned}$$

と表わされる。

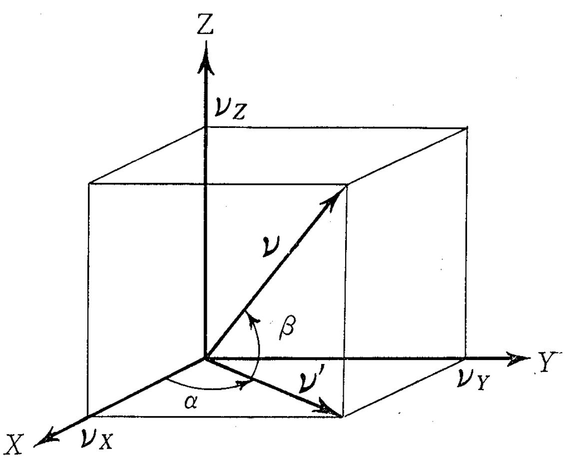

図-2　ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の方向を規定する角 α および β の説明図

3. 非粘着性材料における巨視的応力と粒子配列構造の関係について

本章では，非粘着性材料における粒子間力に関して，後述のように小田により提案された概念[3]と本質的には同等であると思われる仮説を採用し，さらに，これに付加的条件を考慮することにより，当材料の軸対称応力状態および平面ヒズミ状態における巨視的応力状態と粒子配列構造状態の具体的関係を導びく。

3.1 基本仮定

まず，非粘着性材料における粒子間力に関して，後述のように，本質的には小田の仮説と同等であると思われる次の仮定を設ける。

仮定—B：“巨視的応力一様な領域においては，すべての粒子接触点で，粒子に作用する力（粒子間力）のベクトルと単位外法線ベクトルの一つの主応力方向に対する垂直射影成分の比は等しい。”

さらに，ごく自然であると思われる次の補足条件を設ける。

補足条件—C：“粒子間力が作用する粒子面上に立てた外法線ベクトルの方向は特定の方向（の範囲）に制限されず，あらゆる方向が存在しうる。”

3.2 粒子間力について

さて，仮定—Bにより，粒子間力 $\boldsymbol{f}$ の X, Y および Z 軸方向の成分は

$$\left.\begin{aligned} f_X&=A_1\nu_X=A_1\cos\beta\cos\alpha\\ f_Y&=A_2\nu_Y=A_2\cos\beta\sin\alpha\\ f_Z&=A_3\nu_Z=A_3\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

で与えられる。ここに，A_1, A_2 および A_3 は以下に明らかにするように，巨視的応力状態および粒子接触構造状態によるそれぞれ σ_1, σ_2 および σ_3 方向の比例係数である。

$\boldsymbol{f}_I{}^X$, $\boldsymbol{f}_J{}^Y$ および $\boldsymbol{f}_K{}^Z$ が作用している粒子面上の単位外法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\nu}_I{}^X$, $\boldsymbol{\nu}_J{}^Y$ および $\boldsymbol{\nu}_K{}^Z$ とし，さらに，これらの X, Y および Z 方向の成分にそれぞれ下添字 X, Y および Z を付する。また，$\boldsymbol{\nu}_I{}^X$, $\boldsymbol{\nu}_J{}^Y$ および $\boldsymbol{\nu}_K{}^Z$ に対する (α, β) をそれぞれ $(\alpha_I{}^X, \beta_I{}^X)$, $(\alpha_J{}^Y, \beta_J{}^Y)$ および $(\alpha_K{}^Z, \beta_K{}^Z)$ とすれば，式（8）を条件式（3）に用いて次の関係が得られる。

$$\sigma_1=A_1C_1,\ \sigma_2=A_2C_2,\ \sigma_3=A_3C_3 \tag{9}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} C_1&=\frac{1}{\varDelta S_1}\sum_{I=1}^{n_1}\nu_{IX}{}^X=\frac{1}{\varDelta S_1}\sum_{I=1}^{n_1}\cos\beta_I{}^X\cos\alpha_I{}^X,\\ C_2&=\frac{1}{\varDelta S_2}\sum_{J=1}^{n_2}\nu_{JY}{}^Y=\frac{1}{\varDelta S_2}\sum_{J=1}^{n_2}\cos\beta_J{}^Y\sin\alpha_J{}^Y,\\ C_2&=\frac{1}{\varDelta S_3}\sum_{K=1}^{n_3}\nu_{KZ}{}^Z=\frac{1}{\varDelta S_3}\sum_{K=1}^{n_3}\sin\beta_K{}^Z \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

しかるに，条件—Aにより

$$\left.\begin{aligned} &\nu_{IX}{}^X\geqq 0,\ \nu_{JY}{}^Y\geqq 0,\ \nu_{KZ}{}^Z\geqq 0\\ &-\pi/2\leqq\alpha_I{}^X\leqq\pi/2,\ 0\leqq\alpha_J{}^Y\leqq\pi,\\ &0\leqq\beta_K{}^Z\leqq\pi/2 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

でなければならないので，式（10）の総和演算の各項は非負となり，さらに，補足条件—Cを考慮すれば，

$$C_1>0,\ C_2>0,\ C_3>0 \tag{12}$$

でなければならない。なお，C_1, C_2 および C_3 は各主応力面の単位面積当たりに存在する粒子接触点における単位外法線ベクトルの各主応力方向への射影成分の総和であると解し得るが，以後，これらを“法線射影度”と称することにする。

式（9）より，比例係数 A_1, A_2 および A_3 は具体的に

$$A_1=\sigma_1/C_1,\ A_2=\sigma_2/C_2,\ A_3=\sigma_3/C_3 \tag{13}$$

で与えられることになる。

なお，式（3）の下式に式（8）を用いれば，主応力面の接線方向に関して

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{n_1}\nu_{IY}{}^X&=\sum_{I=1}^{n_1}\nu_{IZ}{}^X=\sum_{J=1}^{n_2}\nu_{JX}{}^Y=\sum_{J=1}^{n_2}\nu_{JZ}{}^Y\\ &=\sum_{K=1}^{n_3}\nu_{KX}{}^Z=\sum_{K=1}^{n_3}\nu_{KY}{}^Z=0 \end{aligned} \tag{14}$$

または

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{n_1}\cos\beta_I{}^X\sin\alpha_I{}^X&=\sum_{I=1}^{n_1}\sin\beta_I{}^X\\ &=\sum_{J=1}^{n_2}\cos\beta_J{}^Y\cos\alpha_J{}^Y=\sum_{J=1}^{n_2}\sin\beta_J{}^Y\\ &=\sum_{K=1}^{n_3}\cos\beta_K{}^Z\cos\alpha_K{}^Z=\sum_{K=1}^{n_3}\cos\beta_K{}^Z\sin\alpha_K{}^Z=0 \end{aligned} \tag{15}$$

が成り立たねばならない。

ところで，式（6）および（8）より，α' および β' は

$$\tan\alpha'=\frac{A_2}{A_1}\tan\alpha,\quad \sin\beta'=\frac{A_3}{|\boldsymbol{f}|}\sin\beta \tag{16}$$

で与えられるので，これらを式（7）に用いて，あるいは，直接，式（5），（6）および（8）を式（4）に用いて

$$\begin{aligned} &-\{A_1(\cos\beta\cos\alpha)^2+A_2(\cos\beta\sin\alpha)^2\\ &\quad+A_3\sin^2\beta\}/|\boldsymbol{f}|\geqq\cos\phi_\mu \end{aligned} \tag{17}$$

を得る。しかるに，補足条件—Cにより，α および β の全角度範囲において，本式が満たされるには

$$A_1<0,\ A_2<0,\ A_3<0 \tag{18}$$

でなければならない。ゆえに，式（12），（13）および（18）より，3主応力はいずれも負，すなわち

$$\sigma_1<0,\ \sigma_2<0,\ \sigma_3<0 \tag{19}$$

でなければならないことになる。

なお，巨視的応力一様な領域において，接触点におけるある一つの粒子面外法線ベクトルの方向が $\alpha\sim\alpha+d\alpha$ お

よび $\beta\sim\beta+d\beta$ の範囲に存在する確率を $E(\alpha,\ \beta)\times\cos\beta\,d\alpha\,d\beta$ とすれば（$\cos\beta\,d\alpha\,d\beta$ は立体角要素）

$$E(\alpha,\ \beta)=E(\alpha\pm m\pi,\ -\beta),\ m：整数 \tag{20}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}E(\alpha,\ \beta)\cos\beta\,d\alpha\,d\beta=1 \tag{21}$$

である。$E(\alpha,\ \beta)$ を用いれば，C_1, C_2 および C_3 は次のように記述される。

$$C_1=\bar{n}_1H_1,\ C_2=\bar{n}_2H_2,\ C_3=\bar{n}_3H_3 \tag{22}$$

ここに，H_1, H_2 および H_3 は

$$\left.\begin{aligned}h_1&=E(\alpha,\ \beta)(1+\cos2\beta)\cos\alpha\\h_2&=E(\alpha,\ \beta)(1+\cos2\beta)\sin\alpha\\h_3&=E(\alpha,\ \beta)\sin2\beta\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

として

$$\begin{aligned}H_1&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}h_1d\alpha d\beta,\\H_2&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}h_2d\alpha d\beta,\\H_3&=\int_{0}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}h_3\,d\alpha\,d\beta\end{aligned} \tag{24}$$

で与えられる。なお，式 (15) により h_1, h_2 および h_3 は次式を満たさねばならない。

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}h_1d\alpha d\beta&=\int_{0}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}h_1d\alpha\,d\beta=0\\\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}h_2d\alpha d\beta&=\int_{0}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}h_2d\alpha\,d\beta=0\\\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}h_3d\alpha d\beta&=\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}h_3d\alpha\,d\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

3.3 軸対称応力状態について

本節では $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_l$（側圧）および $\sigma_3=\sigma_a$（軸圧）として，軸対称応力状態について考察を進める。

軸対称応力状態においてはZ軸を含む任意の面は主応力面となるが，その微小面積素を ΔS_l，これに対応する微小曲面素を $\Delta S'_l$ とし，$\Delta S'_l$ における粒子接触数を n_l とする。また，これらの接触点において $\Delta S'_l$ の片側に立てた単位法線ベクトルを $\boldsymbol{\nu}_L{}^l(L=1,\ 2,\cdots,n_l)$ とし，$\boldsymbol{\nu}_L{}^l$ に対するαおよびβを $\alpha_L{}^l$ および $\beta_L{}^l$ と記すことにする。さらに，ΔS_l の同じ側に立てた単位法線ベクトルを $\boldsymbol{\nu}_l$，X軸から $\boldsymbol{\nu}_l$ へ測った角をθとすれば，ΔS_l に対する法線射影度 C_l は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}C_l&=\frac{1}{\Delta S_l}\sum_{L=1}^{n_l}\cos\beta_L{}^l\cos(\alpha_L{}^l-\theta)\\&=\bar{n}_l\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\theta-\pi/2}^{\theta+\pi/2}E(\alpha,\ \beta)\\&\qquad(1+\cos2\beta)\cos(\alpha-\theta)\,d\alpha d\beta\end{aligned} \tag{26}$$

ここに，$\bar{n}_l=n_l/\Delta S_l$ である。

さて，材料は力学的に等方性であると仮定すれば，軸対称応力状態においては，材料構造に関する巨視的パラメータ $\bar{n}_l$, C_l などはθに対して独立でなければならない。したがって，式 (26) より $E(\alpha,\ \beta)$ はβのみの関数でなければならず，粒子面外法線方向はαに関して均一分布することになる。以上により C_l は

$$\begin{aligned}C_l&=\frac{1}{\Delta S_l}\sum_{L=1}^{n_l}\cos\beta_L{}^l\times\lim_{M\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{M}\cos\left(\frac{\pi}{M}m-\frac{\pi}{2}\right)}{M}\\&=\frac{1}{\Delta S_l}\sum_{L=1}^{n_l}\cos\beta_L{}^l\times\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha\\&=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\Delta S_l}\sum_{L=1}^{n_l}\cos\beta_L{}^l\end{aligned} \tag{27}$$

または，$E(\beta)$ により次のように表わしうる。

$$C_l=\bar{n}_lH_l \tag{28}$$

ここに，

$$\begin{aligned}H_l&=\int_{\theta-\pi/2}^{\theta+\pi/2}\cos(\alpha-\theta)\,d\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}E(\beta)(1+\cos2\beta)\,d\beta\\&=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}E(\beta)(1+\cos2\beta)\,d\beta\\&=4\int_{0}^{\pi/2}E(\beta)(1+\cos2\beta)\,d\beta\end{aligned} \tag{29}$$

である。なお，$E(\beta)$ は $E(\beta)=E(-\beta)$ であり，かつ

$$\int_0^{\pi/2}E(\beta)\cos\beta\,d\beta=\frac{1}{4\pi} \tag{30}$$

を満たす。

また，軸方向に対しても，添字を $3\to a$, $Z\to a$ および $K\to A$ とおきかえれば，C_a は式 (10)，(22) および (23) により次のように与えられる。

$$C_a=\frac{1}{\Delta S_a}\sum_{A=1}^{n_a}\sin\beta_A{}^a=\bar{n}_aH_a \tag{31}$$

ここに，

$$H_a=2\pi\int_0^{\pi/2}E(\beta)\sin2\beta\,d\beta \tag{32}$$

以上，法線射影度について詳察したが，以下では具体的な応力比-構造式を導びく準備として，粒子接触面外法線と粒子間力の方向について考察しておく。

さて，$\boldsymbol{\nu}$ の $X-Y$ 面への射影ベクトル $\boldsymbol{\nu}'$ と同方向の単位ベクトル

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\sin\alpha\,\boldsymbol{j} \tag{33}$$

を導入すれば，$\boldsymbol{f}$ は式（8）および $C_1=C_2=C_l$, $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_l$ であることを考慮して，次のように表わしうる。

$$\boldsymbol{f}=A_l\cos\beta\,\bar{\boldsymbol{\nu}}+A_a\sin\beta\,\boldsymbol{k} \tag{34}$$

ここに，

$$A_l=\sigma_l/C_l,\ A_a=\sigma_a/C_a \tag{35}$$

しかるに，$A_l<0$ であることを考慮すれば，$\boldsymbol{f}$ の $X-Y$ 面への射影ベクトル $\boldsymbol{f}'$ は $\boldsymbol{\nu}'$ あるいは $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ と同方向で向きが反対であることがわかる。すなわち

$$\alpha'=\alpha\pm(2m-1)\pi,\ m：整数 \tag{36}$$

である。また，式（6）および (34) における $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{k}$ 方向の成分を比較し，$A_a<0$ であることに留意すれば，

$$\beta\cdot\beta'\leqq0 \tag{37}$$

すなわち，β と β' は異符号でなければならない。

式 (36) および (37) を条件式 (7) に用いれば，

$$|\beta|-\phi_\mu \leqq |\beta'| \leqq |\beta|+\phi_\mu \tag{38}$$

でなければならないことになる。

また，$\boldsymbol{f}$ の $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ および $\boldsymbol{k}$ 方向の成分をそれぞれ f_l および f_a と記せば，これらは式 (6)，(33)，(36) および (34) より

$$\left.\begin{aligned} f_l&=-|\boldsymbol{f}|\cos\beta'=A_l\cos\beta \\ f_a&=|\boldsymbol{f}|\sin\beta'=A_a\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

であり，これらの比は次式で与えられる。

$$\frac{f_a}{f_l}=-\tan\beta'=\frac{A_a}{A_l}\tan\beta \tag{40}$$

以上に得られた式 (38) および (40) より，$|\beta|\neq 0$ および $\pi/2$ のとき

$$\left.\begin{aligned} &A_a/A_l>1 \text{ の場合：} \\ &\quad |f_a/f_l|>\tan|\beta|,\ |\beta|<|\beta'|\leqq|\beta|+\phi_\mu \\ &A_a/A_l=1 \text{ の場合：} \\ &\quad |f_a/f_l|=\tan|\beta|,\ |\beta'|=|\beta| \\ &A_a/A_l<1 \text{ の場合：} \\ &\quad |f_a/f_l|<\tan|\beta|,\ |\beta|-\phi_\mu<|\beta'|\leqq|\beta| \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

であり，また，$|\beta|=0$ および $\pi/2$ のときには A_a/A_l 値によらず

$$\left.\begin{aligned} &\beta=0 \text{ のとき } |f_a/f_l|=0,\ |\beta'|=0 \\ &|\beta|=\pi/2 \text{ のとき } |f_a/f_l|=\infty,\ |\beta'|=\pi/2 \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

となる (図-3 参照)。

ところで，粒子が互いに粒子間距離の軸方向成分を減少せしめるようにすべる場合には，軸方向の圧縮に寄与するので，このような相互スベリを“圧縮スベリ”と称し，逆に粒子間距離の軸方向成分を増大せしめるようなスベリを“伸張スベリ”と称すれば，式 (41) さらには (42) より $A_a/A_l>1$ の場合には $|\beta'|>|\beta|$ であるので，圧縮スベリのみが生じ得，$A_a/A_l<1$ の場合には $|\beta'|<|\beta|$ であるので，伸張スベリのみが生じうることがわかる。すなわち，軸対称圧縮状態においては $A_a/A_l>1$ でなければならず，他方，軸対称伸張状態においては

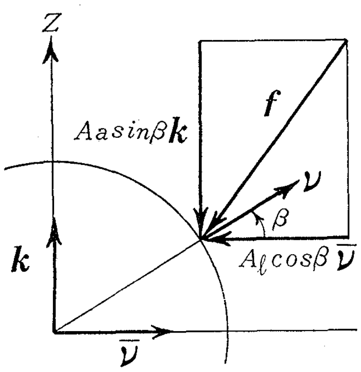

図-3 軸対称状態における粒子間力 (圧縮 $A_a/A_l>1$ の場合)

$A_a/A_l<1$ でなければならない。なお，$A_a/A_l=1$ の場合には等方応力状態となるが，本状態においては，式 (41) および (42) より，粒子の相互スベリは生じ得ないことがわかる。

以下では，軸対称圧縮および伸張状態について，粒子が相互スベリを生じている状態における A_a/A_l 値，スベリ接触点における β 値などについて考察し，具体的な応力比-構造式を導びいておく。

i） 軸対称圧縮状態 ($\sigma_a/\sigma_l>1$, $A_a/A_l>1$)

式 (41) より $|\beta|=0$ および $|\pi/2|$ のときには式 (38) は不等式となり，スベリを生じえないことはいうまでもない。

ところで，$0<|\beta|<\pi/2$ のときには，$A_a/A_l>1$ であることを考慮して，式 (41) および (42) より

$$\frac{A_a}{A_l}\tan|\beta|\leqq\tan(|\beta|+\phi_\mu) \tag{43}$$

が保証されねばならない。しかるに，$\pi/2-\phi_\mu\leqq|\beta|<|\pi/2|$ のときには，式 (43) の不等号が成り立ち，スベリは生じ得ない。結局，$0<|\beta|<\pi/2-\phi_\mu$ において，

$$\frac{A_a}{A_l}\leqq\frac{\tan(|\beta|+\phi_\mu)}{\tan|\beta|} \tag{44}$$

が保証されねばならない。すなわち，補足条件一Cにより，$0<|\beta|<\pi/2-\phi_\mu$ の範囲のすべての β 値に対して，式 (44) が満たされねばならない。さて，圧縮スベリ接触点における β 値を β_{sc} と記せば，そこにおいては式 (44) の等号，すなわち

$$\frac{A_a}{A_l}=\frac{\sigma_a/C_a}{\sigma_l/C_l}=\frac{\sigma_a/(\bar{n}_a\cdot H_a)}{\sigma_l/(\bar{n}_l\cdot H_l)}=\frac{\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)}{\tan|\beta_{sc}|} \tag{45}$$

が成立しなければならない。ゆえに，β_{sc} は $0<|\beta|<\pi/2-\phi_\mu$ の範囲の β 値の中で式 (44) の右辺を最小にせしめるものでなければならない。以上により，軸対称圧縮状態において，次の関係が成立する。

$$|\beta_{sc}|=\pi/4-\phi_\mu/2 \tag{46}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{C_a}{C_l}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_\mu}{2}\right)=\frac{\bar{n}_a\cdot H_a}{\bar{n}_l\cdot H_l}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_\mu}{2}\right) \tag{47}$$

ii） 軸対称伸張状態 ($\sigma_a/\sigma_l<1$, $A_a/A_l<1$)

$|\beta|=0$ および $\pi/2$ においては，式 (38) において不等号が成り立つことは先に述べたとおりである。$0<|\beta|<\pi/2$ のときには

$$\tan(|\beta|-\phi_\mu)\leqq\frac{A_a}{A_l}\tan|\beta| \tag{48}$$

が満たされねばならないが，$0<|\beta|\leqq\phi_\mu$ のときには明らかに本式の不等号が成り立つ。しかるに，$\phi_\mu<|\beta|<\pi/2$ において

$$\frac{A_a}{A_l}\geqq\frac{\tan(|\beta|-\phi_\mu)}{\tan|\beta|} \tag{49}$$

が保証されねばならない。伸張スベリ接触点における β 値を β_{se} と記せば，β_{se} は上記の範囲における β 値のうちで，式（49）の右辺を最大にせしめるものでなければならない。以上により，次の関係が成立する。

$$|\beta_{se}|=\pi/4-\phi_\mu/2 \tag{50}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{C_a}{C_l}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi_\mu}{2}\right)=\frac{\bar{n}_aH_a}{\bar{n}_lH_l}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi_\mu}{2}\right) \tag{51}$$

なお，以上の結論は，式（17）に $A_1=A_2=A_l$ および $A_3=A_a$ とおき，$|\beta|\doteqdot0$ および $\pi/2-\phi_\mu$ として得られる関係

$$\sin^2\beta(\sin^2\beta-\cos^2\phi_\mu)\left\{\frac{A_a}{A_l}-\frac{\tan(|\beta|+\phi_\mu)}{\tan|\beta|}\right\}\left\{\frac{A_a}{A_l}-\frac{\tan(|\beta|-\phi_\mu)}{\tan|\beta|}\right\}\geqq0 \tag{52}$$

を用いても同様に導びき得る。

3.4 平面ヒズミ状態について

前節と同様に，材料の力学的等方性を仮定すれば，無ヒズミの主軸は応力の主軸にもなる。さらに，次の仮定を設ける。

仮定—D：“平面ヒズミ状態においては，粒子の相互スベリは無ヒズミの主軸に垂直な方向にのみ生じる”。

$|\sigma_3|>|\sigma_1|$ とし，無ヒズミの主軸を σ_2 軸方向に選べば，仮定—Dにより σ_2 軸に垂直な方向を有する粒子間力の作用する粒子面上（$\alpha=0$）において，3.3 で軸対称状態に対して述べたと同様の議論が成り立ち，次式が得られる。

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=\frac{C_3}{C_1}\frac{\tan(|\beta_{sp}|+\phi_\mu)}{\tan|\beta_{sp}|} \tag{53}$$

ここに，β_{sp} はスベリ接触点における β 値であるが，

$$|\beta_{sp}|=\pi/4-\phi_\mu/2 \tag{54}$$

であり，これにより，式（53）は次式となる。

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=\frac{C_3}{C_1}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_\mu}{2}\right) \tag{55}$$

3.5 小田の提案式について

小田[3] は仮定—Bと類似の概念に基づき，さらに，巨視的応力状態一様な領域において個々の粒子接触面積はすべて同一で，かつ，三つの主応力面における単位面積当たりの接触数は同等であるとして，軸対称圧縮状態に対して，次式が成り立つとしている。

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{S_a'}{S_l'}\frac{\tan(\beta_{sc}+\phi_\mu)}{\tan\beta_{sc}}=\frac{H_a}{H_l}\frac{\tan(\beta_{sc}+\phi_\mu)}{\tan\beta_{sc}} \tag{56}$$

ここに，粒子接触面積を $\varDelta S$，主応力面における単位面積当たりの接触数を $\bar{n}_p(=\bar{n}_l=\bar{n}_a)$ として

$$S_l'=\bar{n}_p\cdot\varDelta S\cdot H_l,\quad S_a'=\bar{n}_p\cdot\varDelta S\cdot H_a \tag{57}$$

であり*，S_l' および S_a' をそれぞれ側圧および軸圧の作用面における単位面積当たりの粒子接触面の透影面積の和であるとしている。

さらに，小田は β_{sc} の具体値は $\beta_{sc}=\pi/4-\phi_\mu/2$ であるとして，式（56）より

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{S_a'}{S_l'}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_\mu}{2}\right)=\frac{H_a}{H_l}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_\mu}{2}\right) \tag{58}$$

を主張している。

以下においては，前編で明らかにした諸論に基づいて，上記の小田の所論の疑問点について述べておく。

i）基本仮定について　小田は式（56）を導びくに当たって，接触面積という量を導入し，“巨視的応力状態一様な領域においては，粒子面に作用する力のある主応力方向の成分は接触面のその主応力面への射影面積に比例する”と考えたと解される。しかるに，Coulomb の乾性摩擦で意義づけられる非粘着性材料に対して，接触面積という量を取り入れることに特別の意義があると思われず，むしろ，点接触であると考えてさしつかえないと思われる。さらに，個々の接触面積をすべて同一とするならば，その必要性はまったく失われて小田の仮定は前編に述べた仮定—Bに帰着し，力学的に本質的な意義を有するのは仮定—Bであると思われる。

ii）主応力面における単位面積当たりの粒子接触数について　我々は巨視的応力状態その他の外的条件（さらにはこれらの履歴状態）が同一な領域においては材料構造は homogeneous であるという基本前提に基づいて，巨視的議論を進め，さらには巨視的構成則を規定することはいうまでもない。ところで，小田は homogeneous fabric においては $\bar{n}_X=\bar{n}_Y=\bar{n}_Z$ であるとして上記の式（56）を呈出しているが，homogeneous は位置によらず応力，ヒズミ，構造状態などに関する巨視的パラメーターが同一であることを意味することはいうまでもなく，$\bar{n}_X$，$\bar{n}_Y$ および $\bar{n}_Z$ の間の等値性は方向に関連し，一般に $\bar{n}_X=\bar{n}_Y=\bar{n}_Z$ としうるのは isotropic fabric においてである。他方，mechanically isotropic materials においては，等方応力状態では $\bar{n}_X=\bar{n}_Y=\bar{n}_Z$ となるが，一般応力状態ではこれらは異なり，また，軸対称応力状態では $\bar{n}_X=\bar{n}_Y(=\bar{n}_l)\doteqdot\bar{n}_Z(=\bar{n}_a)$ である。したがって，一般に $\bar{n}_X=\bar{n}_Y=\bar{n}_Z$ とおくには他の何らかの特有な論拠を要するが，このような論拠が明らかでない限り，式（56）におけるように $\bar{n}_l=\bar{n}_a$ と簡略化せずに，前編で示したように，式（47）より

* 小田は，文献 2）においては単位立方体中に存在する総粒子接触点数 m により，$S_l'=m\cdot\varDelta S\cdot H_l$，$S_a'=m\cdot\varDelta S\cdot H_a$ としているが，誤解であろう。

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{C_a}{C_l}\frac{\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)}{\tan|\beta_{sc}|}=\frac{\bar{n}_a H_a}{\bar{n}_l H_l}\cdot\frac{\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)}{\tan|\beta_{sc}|} \tag{59}$$

を規定しておくべきであろう。なお，粒子接触面積 $\varDelta S$ は同一であるとし，側圧および軸圧の作用における単位面積当たりの接触面の透影和 S_l および S_a を導入して形式的に式 (59) を書き改めれば，次のようになる。

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{S_a}{S_l}\frac{\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)}{\tan|\beta_{sc}|} \tag{60}$$

ここに，

$$S_l=\bar{n}_l\cdot\varDelta S\cdot H_l,\quad S_a=\bar{n}_a\cdot\varDelta S\cdot H_a \tag{61}$$

iii) β_{sc} 値について　小田は $\beta_{sc}=\pi/4-\phi_\mu/2$ のとき式 (56) で規定される応力比が最小になると述べているが，何故に具体的な β_{sc} 値として $\pi/4-\phi_\mu/2$ を採用すべきかいうことに関しては，明確な論拠を与えていない。しかるに，式 (56) の右辺の最小値が実際の応力比に等しいということを仮定したとも思われるが，変形が充分，進行しうる状態においては $\beta=\beta_{sc}$ を満たす接触点（スベリ接触点）は充分数，存在し，$E(\beta)\cos\beta\, d\beta$ は $\beta_{sc}-0<\beta<\beta_{sc}+0$ に対して有限値をとる。したがって，n_l および n_a のうちのスベリ接触数をそれぞれ n_{ls} および n_{as}，また，$\bar{n}_l$ および $\bar{n}_a$ のうちのスベリ接触数を $\bar{n}_{ls}$ および $\bar{n}_{as}$ とすれば，式 (27)～(32) より

$$\left.\begin{aligned}H_l&=\frac{1}{\bar{n}_l}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\varDelta S_l}\left(n_{ls}\cos\beta_{sc}+\sum_{L=1}^{n_l-n_{ls}}\cos\beta_L{}^l\right)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\bar{n}_{ls}}{\bar{n}_l}\cos\beta_{sc}+4\int_0^{|\beta_{sc}|-0}E(\beta)(1+\cos 2\beta)\,d\beta\\&\qquad+4\int_{|\beta_{sc}|+0}^{\pi/2}E(\beta)(1+\cos 2\beta)\,d\beta\\H_a&=\frac{1}{\bar{n}_a}\cdot\frac{1}{\varDelta S_a}\left(n_{as}\sin|\beta_{sc}|+\sum_{A=1}^{n_a-n_{as}}\sin\beta_A{}^a\right)\\&=\frac{\bar{n}_{as}}{\bar{n}_a}\sin|\beta_{sc}|+2\pi\int_0^{|\beta_{sc}|-0}E(\beta)\sin 2\beta\,d\beta\\&\qquad+2\pi\int_{|\beta_{cs}|+0}^{\pi/2}E(\beta)\sin 2\beta\,d\beta\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

と表わしうる。これらは β_{sc} のみの関数でないことはいうまでもないが，仮りに，形式的にそうみなしても，式 (56) あるいは (59) の $\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)/\tan|\beta_{sc}|$ の部分のみが最小であるとき，これらの式の右辺自体が最小となるとは限らない。むしろ，$(\sigma_a/C_a)/(\sigma_l/C_l)=\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)/\tan|\beta_{sc}|$ あるいは，接触応力比とでもいうべき量 $(\sigma_a/S_a)/(\sigma_l/S_l)=\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)/\tan|\beta_{sc}|$ が最小であるという仮説に基づく場合には，形式的に矛盾は生じない。しかし，本場合にも，β_{sc} に対してこれらと同形で関連するエネルギー率比

$$-\frac{\sigma_a d\varepsilon_a}{2\sigma_l d\varepsilon_l}=\frac{\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu)}{\tan|\beta_{sc}|} \tag{63}$$

ε_l：側方ヒズミ，ε_a：軸ヒズミ

が最小であるという仮説に基づいて，Rowe[10] が β_{sc} の具体値を論じた場合におけると同様に，これらの基本仮説自体に物理的に自然な何らかの説明なしには受け入れがたい面を有していることは否めない。

仮定—Bに立脚し，ごく自然な補足条件—Cに着目して，3. 章で示した所論は，従前とは異なる立場で，$|\beta_{sc}|=\pi/4-\phi_\mu/2$ および $|\beta_{se}|=\pi/4+\phi_\mu/2$ に対する理論形式上，矛盾のない新たな論拠を与えるものである。

3.6 Rowe の応力比-スベリ接触数関係式との関連について

Rowe[9] は数粒子が団粒を形成し，これらの団粒相互の接触点においては同一の方向の相互スベリが生じていると仮定して，力の釣合い関係から，平面ヒズミ状態に対して，応力比とスベリ接触数比の関係を次のように与えている。

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=\frac{\bar{n}_{3s}}{\bar{n}_{1s}}\tan(|\beta_{sp}|+\phi_\mu) \tag{64}$$

ここに，$\bar{n}_{1s}$ および $\bar{n}_{3s}$ はそれぞれ $\bar{n}_1$ および $\bar{n}_3$ のうちのスベリ接触の数である。

さて，式 (64) は，前編の所論において，形式的に一粒子を団粒とみなし，補足条件—Cを無視してこれらがすべてスベリ接触しているとし，$\beta=\beta_{sp}$ および $\bar{n}_1=\bar{n}_{1s}$，$\bar{n}_3=\bar{n}_{3s}$ とおいて，式 (22)～(24) から得られる

$$C_1=\bar{n}_{1s}H_1=\bar{n}_{1s}\cos\beta_{sp},\quad C_3=\bar{n}_{3s}H_3=\bar{n}_{3s}\sin\beta_{sp} \tag{65}$$

を式 (55) に用いることにより導びき得る。

なお，Rowe は軸対称状態については触れていないが，圧縮状態においては，$\beta=\beta_{sc}$ および $\bar{n}_l=\bar{n}_{ls}$，$\bar{n}_a=\bar{n}_{as}$ とおいて式 (27)～(32) あるいは式 (62) より得られる。

$$\left.\begin{aligned}C_l&=\bar{n}_{ls}H_l=\bar{n}_{ls}\cdot(2/\pi)\cos\beta_{sc}\\C_a&=\bar{n}_{as}H_a=\bar{n}_{as}\sin\beta_{sc}\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

を式 (45) に用いて，次式を得る。

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{\pi}{2}\frac{\bar{n}_{as}}{\bar{n}_{ls}}\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu) \tag{67}$$

また，同様に，式 (51) より伸張状態に対して

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{\pi}{2}\frac{\bar{n}_{as}}{\bar{n}_{ls}}\tan(|\beta_{se}|-\phi_\mu) \tag{68}$$

を得る。

なお，本節で述べた諸式は小田の式 (56) からは得られないが，これは小田が式 (56) を導びくさいに $\bar{n}_l=\bar{n}_a$ とおいたからにほかならない。

4. 諸提案式の適否および問題点についての検討

3. 章で小田の仮説に基づく応力比-構造式について，その導出過程に立ち返って理論的根拠を明確にし，その

理論形式上，矛盾のない諸式を与えた。本編では，先に提案されている Horne 式を含めて，これらの諸式の適否について論じておく。

さて，すでに古く，Horne[1]は等径球集合体に関して，粒子相互スベリに基づく巨視的ヒズミの定義式を与え，これに基づいて，軸対称圧縮状態に対して

$$\frac{d\varepsilon_l}{d\varepsilon_a}=-\frac{2}{\pi}\frac{H_a}{H_l}\tan|\beta_{sc}| \tag{69}$$

を導いた。さらに，本式に式 (63) を考慮して，応力比-構造式

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_l}=\frac{4}{\pi}\frac{H_a}{H_l}\tan(|\beta_{sc}|+\phi_\mu) \tag{70}$$

を与えている。なお，軸対称伸張状態においては

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_l}{d\varepsilon_a}&=-\frac{2}{\pi}\frac{H_a}{H_l}\tan|\beta_{se}|\\ \frac{\sigma_a}{\sigma_l}&=\frac{4}{\pi}\frac{H_a}{H_l}\tan(|\beta_{se}|-\phi_\mu)\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

が成り立ち，また，平面ヒズミ状態においては，3.4 におけると同様に，仮定—Dを採用すれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_3}&=-\frac{H_1}{H_3}\tan|\beta_{sp}|\\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1}&=\frac{H_3}{H_1}\tan(|\beta_{sp}|+\phi_\mu)\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

が成り立つと考えられる。なお，等径球団粒が形成されるとすれば，3.6 と同様の考えにより $\bar{n}_{3s}/\bar{n}_{1s}=H_3/H_1=\tan|\beta_{sp}|$ であるので，式 (72) は Rowe 式 (64) と矛盾しないものである。

ところで，小田式 (56) と Horne 式 (70) の評価に際して Dickin & King[8] は式 (63) および (70) より，$|\beta_{sc}|=\pi/4-\phi_\mu/2$ として得られる*

$$\frac{H_a}{H_l}=\frac{4}{\pi}\sqrt{-2\frac{\sigma_a}{\sigma_l}\frac{d\varepsilon_l}{d\varepsilon_a}} \tag{73}$$

に，軸対称圧縮試験により実測されたσ_l，σ_a，$d\varepsilon_l$ および $d\varepsilon_a$ 値を代入して算定される H_a/H_l 値とピーク前の σ_a/σ_l の関係は式 (70) を満たし，小田の式には適合しないと結論している。しかるに，式 (73) を式 (56) に用いること自体，片手落ちであることもさることながら，式 (73) を式 (70) に用いて得られるのは Rowe の stress-dilatancy 関係式 (63) そのものであり，本関係式を再検討したにすぎず，きわめて初歩的な誤解であろう。

これらの応力比-構造式の妥当性の評価においては，微視量と巨視量を関連づける基準となりうる諸論が確立されていない現在，小田が行なっているように，直接，H_a および H_l の微視的実測に基づかざるを得ないといえる。しかし，客観的に，これらのいずれがより適切であるかを即断するに足り得る厳密な実測値は得られていない。

さて，巨視的ヒズミに直接，関連する微視的要素は内部構造および内部変位（粒子相互スベリ）であるのに対し，巨視的応力に関連するのは内部構造および粒子間力である。ところで，Horne がスベリ接触角すなわち相互スベリ方向を唯一，一定に限定することにより，内部変位が陽に表われない形式で，ヒズミの比に対して内部構造を関係づけたのに対して，小田は粒子間力の方向および大きさに制限条件を課すことにより，粒子間力が陽に表われない形式で，応力の比に対して内部構造を関連づけたと解しうる。しかるに，後者においても，結果的にスベリ接触角を唯一，一定に限定することをかえりみれば，粒子間力に関する小田の単純化仮説（あるいは 3.1 の仮定—B）は Rowe のスベリ接触角に対する一つの論拠を与える興味ある概念である一方，一般性を二重に拘束する幾分，大担な仮説であると思われるとともに，本仮説を採用すべき必然性はないと思われる。

他方，Rowe の stress-dilatancy 式 (63)，Horne のヒズミ増分比-構造式 (69)，およびこれらに基づいて得られる応力比-構造式 (70) は，スベリ接触角を唯一，一定と認めれば（小田式についても同様），他の特殊な仮定を要さずに成立する。しかしながら，なお，Rowe の stress-dilatancy 式に対して実験的に確認されているように，本式およびこれに基づく式 (70) が現実の挙動に適合しうるのはピーク応力以前の各粒子の相互スベリが少数，微量な巨視的に弾，塑性過渡状態とみなしうる狭小領域に限定されると解される。その理論構成上の欠陥の主因はスベリ接触角が唯一，一定であることを前提としていることにあると思われる。今後，本条件に拘束されないさらに精緻な諸論を展開していかねばならない。

5. 結　　論

以上，巨視的応力と粒子間力の関係などについて一般的考察を行なうとともに，先に小田が提案した粒子間力に関する単純化仮説に基づく応力比-構造式を，その基本仮定，導出過程に立ち返って省察し，軸対称圧縮，伸張状態および平面ヒズミ状態における理論形式上，矛盾のない諸式を与えた。なお，当然のことながら，これらの諸式は同じく力の釣合関係から得られた Rowe の団粒形成仮説に基づく応力比-スベリ接触数比関係式とも矛盾しないものである。また，小田の仮説に，粒子接触面法線はあらゆる方向に存在するという，ごく自然な条件を考慮することにより，Rowe が提唱していたスベリ接触角に対する新たな論拠が得られた。

しかし，これらの諸式はスベリ接触角が一定という条件のみならず，粒子間力に関する特殊な条件に制約され

* 文献 8) には $S_Z/S_X=(\sigma_3/\sigma_1)(1-dv/d\varepsilon_3)4/\pi$ と記してあるが，誤植であろう。

るものである。他方，Rowe-Horne の一連の諸論はスベリ接触角一定条件下で成立し得，むしろ，スベリ接触角を唯一，一定とする前提下の諸論は，Rowe より Horne に至って，一応の成果を収めたとして評価し得，また，小田の仮定（あるいは仮定一B）さらにはこれに基づいて得られた諸式がより適切であると主張すべき論拠は見当たらないように思われる。

ところで，Rowe-Horne の諸論においてもなお，これらが粒状体の現実の挙動に充分，適合し得るのは粒子の相互スベリが微弱な狭小領域におけるに過ぎない。その主因はスベリ接触角を唯一，一定に制約していることにあると思われ，本条件にとらわれない妥当な概念を見い出していかねばならない。

さらに，微視的考察に基づく従来の諸式は，含まれるパラメーターが比の形式に与えられ，応力あるいはヒズミ増分そのものに関して他方から一方をは握し得る形式のいわゆる応力-ヒズミ構成則ではない。本則の導出には塑性変形基礎論が不可欠であることはいうまでもないが，本論の活用により，本来の目標である応力-ヒズミ構成則の導出，あるいはその適否の検討を進めねばならない。

本文については，東工大山口柏樹博士より懇篤なご助言を賜った。付記して深謝の意を表わしたい。

記号説明

A_i＝粒子間力の主応力方向の成分に対する比例係数
C_i＝主応力面への法線射影度
$E(\alpha, \beta)=\nu_j$ の方向の立体角に応じる確率密度関数
f_j＝粒子間力
H_i＝粒子配列構造を規定するパラメーター
$n_i=\Delta S_i'$ における粒子接触数
$\bar{n}_i=\Delta S_i$ における単位面積当たりの粒子接触数
S_i＝単位面積当たりの粒子接触面積の透影和
S_i'＝小田が主張している単位面積当たりの粒子接触面積の透影和
ΔS_i＝微小面積素
$\Delta S_i'=\Delta S_i$ に応じる粒子接触点を通る微小曲面素
$\alpha, \beta=\nu_j$ の方向を規定する角
$\alpha', \beta'=f_j$ の方向を規定する角
ε_a, ε_l＝軸ヒズミおよび側方ヒズミ
ϕ_μ＝粒子間摩擦角
σ_{ij}＝応力

参考文献

1) Horne, M. R. (1965): "The behavior of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles," Proc., Roy. Soc. London, Ser. A, Part 1 and 2, Vol. 286, pp. 62-97.
2) Oda, M. (1972): "The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand," Soils and Foundations, Vol. 12, No. 2, pp. 1-18.
3) Oda, M. (1972): "Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests," Soils and Foundations, Vol. 12, No. 4, pp. 45-63.
4) Matsuoka, H. (1973): Discussion of Reference 2), Soils and Foundations Vol. 13, No. 1, pp. 106-110.
5) Rowe, P. W. (1973): Discussion of Reference 2), Soils and Foundations, Vol. 13, No. 2, pp. 94.
6) Ismail, H. A. (1973): Discussion of Reference 2), Soils and Foundations, Vol. 13, No. 2, pp. 95-97.
7) Tatsuoka, F. (1973): Discussion of Reference 3), Soils and Foundations, Vol. 13, No. 3, pp. 69-73.
8) Dickin, E. A. and G. J. W. King (1974): Discussion of Reference 3), Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, pp. 79-82.
9) Rowe, P. W. (1972): "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soils," Stress-strain Behavior of Soils (Roscoe Memor. Symp.), G. T. Foulis & Co. Ltd., pp. 143-194.
10) Rowe. P. W. (1962): "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assemblage of particles in contact," Proc., Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 269, pp. 500-527.

(原稿受付，1974. 10. 4)