

地表面載荷によるワイスコフ体地盤の応力沈下特性

(Stress and Displacement Characteristics of Soil)
(Mass as Weiskopf's Body due to Surface Load)

後藤 恵之輔* (Keinosuke Gotoh)

山内 豊聡** (Toyotoshi Yamanouchi)

キーワード：鉛直荷重／応力／地盤／弾性／沈下
IGC： E1/E2

1. ま え が き

土質工学においては、理論と実際とでギャップの大きい分野が少なくなく、地盤内の応力を求める問題もその一つである。すなわち、地盤内の応力に関しては、従来 Boussinesq 理論に代表される弾性理論により解析がなされているが、この理論では地盤を完全弾性体と見なすため、応力は荷重が指定されれば土の硬軟を問わず一定となって、実際現象と合致しないことが多い。そこで、種々の修正理論が提案されており、その典型例は Fröhlich¹⁾ の応力集中を考慮した理論である。このほかに、応力の閉合領域を考える Strohschneider²⁾ や Kögler³⁾ の理論、Talbot ら⁴⁾ や Иванов⁵⁾、Покровский⁶⁾、Канлауров⁷⁾ による統計的アナログ法を適用するものなどがある。しかし、これらの修正理論は、実際の現象に合わせて地盤モデルを想定したもので、モデルと土質定数あるいは弾性定数との関係が Fröhlich の理論を除いて⁸⁾ 定かではない。

これに対して、Weiskopf⁹⁾ は土をヤング率 E とせん断弾性係数 G の関係が、従来の弾性理論における $E/G = 2(1+\nu)$ (ν : ポアソン比) で表わされるのではなく、 $E/G > 2(1+\nu)$ となる材料と考えて、地盤内応力の 2, 3 次元解析を試みている。Weiskopf の理論は、土のせん断抵抗が土粒子相互の滑動により低下することに着目して、 E/G を新しいパラメータにとる点で、前述の修正理論をも含めた弾性理論と全く趣きを異にするものである。しかし、その解式は、例えば地盤の 2 次元問題を取り扱うに際し平面応力状態を考えるなど、実際への適用性に欠けるうらみがある。

そこで、著者ら¹⁰⁾ は、ヤング率とせん断弾性係数の間

に $E/G > 2(1+\nu)$ の関係がある材料を“ワイスコフ体”と名付けて、その 2 次元理論を展開し、平面ひずみ状態における地盤内応力及び移動壁土圧を取り扱って、これらに及ぼす土のせん断抵抗の影響を明らかにした。一方、3 次元問題については、Misra and Sen¹¹⁾ の研究がある。これは軸対称問題に関する一般解を巧妙に導いたもので、この一般解に基づき、半無限地盤の応力と変位が求められている。しかし、彼らの研究では、土のせん断抵抗が軸対称状態の地盤内応力及び変位に与える影響について、十分に検討し得ていないとはいいがたく、実験との対比についても何ら言及していない欠点がある。

本論は、以上を踏まえて、地盤をワイスコフ体と見なし、軸対称問題における地盤内応力及び変位の特性について述べるものである。すなわち、表面に円形分布荷重を受ける半無限地盤を対象として、(1) 応力及び変位に及ぼすせん断抵抗の影響を詳細に検討し、(2) 本理論と Fröhlich 理論とを比較して、 E/G と応力集中係数の関係を調べると共に、(3) 載荷試験結果を本理論により検証して、理論の適用性と妥当性を吟味する。

応力及び変位式の誘導は、Misra and Sen の一般解に従って行いが、半無限地盤の応力及び変位について全成分の式を導き、かつ、その特値を求める式も、Misra and Sen のように荷重軸上の鉛直応力及び載荷中心と載荷端の沈下量のみにとどまらないなど、上記の検討・比較とあわせて、本論の特色とするところである。

2. 軸対称問題の一般解

ワイスコフ体に関する軸対称問題の一般解は、Misra and Sen¹¹⁾ により次のように導かれている。すなわち、 (r, θ, z) を地表面上の 1 点を原点とする円筒座標とし、 z 軸を下向きにとる。直応力を $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ 、せん断応力を τ_{rz} 、 r 及び z 方向の変位をそれぞれ u, w と記せば、

$$\sigma_z = - \int_0^\infty [f_1(\lambda z) + g_1(\lambda z)] \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1)$$

$$\sigma_r = \int_0^\infty [\alpha^2 f_1(\lambda z) + \beta^2 g_1(\lambda z)] \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda$$

* 九州大学工学部水工土木学科 助教授 (福岡市東区箱崎 6-10-1)

** 九州大学工学部水工土木学科 教授 (福岡市東区箱崎 6-10-1)

この論文に対するディスカッションは昭和 55 年 1 月 1 日までにご投稿ください。

$$-\frac{1}{r} \int_0^\infty h(\lambda z) \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \nu \int_0^\infty [(\alpha^2 - 1) f_1(\lambda z) + (\beta^2 - 1) g_1(\lambda z)] \\ & \times \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda \\ & + \frac{1}{r} \int_0^\infty h(\lambda z) \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3) \end{aligned}$$

$$\tau_{rz} = \int_0^\infty [\alpha f_2(\lambda z) + \beta g_2(\lambda z)] \lambda^3 J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4)$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty h(\lambda z) \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty [\alpha(L-1) f_2(\lambda z) + \beta(M-1) \\ & \times g_2(\lambda z)] \lambda^2 J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6) \end{aligned}$$

ここに, $h(\lambda z) = (L+K) f_1(\lambda z) + (M+K) g_1(\lambda z)$

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda z) \\ f_2(\lambda z) \end{aligned} \right\} = A e^{\alpha \lambda z} \pm B e^{-\alpha \lambda z}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(\lambda z) \\ g_2(\lambda z) \end{aligned} \right\} = C e^{\beta \lambda z} \pm D e^{-\beta \lambda z}$$

$$L = (K-1)/(\alpha^2 - 1), \quad M = -\alpha^2 L$$

$$\alpha = [(2-K') + \sqrt{K'^2 - 4K'}]^{1/2}, \quad \beta = 1/\alpha$$

$$K' = (1-K)/(1-\nu), \quad K = E/G(1+\nu) - 1$$

更に, $J_m(\lambda r)$: m 次の第1種 Bessel 関数, A, B, C, D : 積分定数にして λ の関数, λ : 積分パラメータ。

従って, 問題は積分定数 $A \sim D$ を与条件から決定することに帰着される。

3. 一様地盤の応力及び変位

3.1 解法

地表面上で鉛直荷重を受ける一様な半無限地盤を考える。このとき, 地表面 ($z=0$) 及び無限下方 ($z=\infty$) においては, 次式が成立する。

$$\sigma_z)_{z=0} = q(r) \quad (7)$$

$$\tau_{rz})_{z=0} = 0 \quad (8)$$

$$\sigma_z)_{z=\infty} = \tau_{rz})_{z=\infty} = 0 \quad (9)$$

ここに, $q(r)$: 荷重分布関数。

式(9)を満足するには, 式(1)~(6)における積分定数のうち $A=C=0$ とならねばならない。また, 式(8)に(4)を適用して $B=-\beta/\alpha \cdot D$ の関数を得, 残る未知数 D は式(7)と(1)から次式により求められることとなる。

$$\int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) D \lambda^3 J_0(\lambda r) d\lambda = q(r) \quad (10)$$

3.2 等分布荷重の解

図-1 に示す円形等分布荷重は, 荷重強度と載荷半径をそれぞれ p_0, a として, 次のように展開できる。

$$q(r) = p_0 a \int_0^\infty J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (11)$$

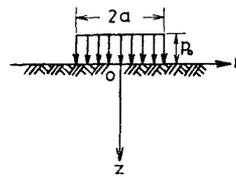


図-1 円形等分布荷重

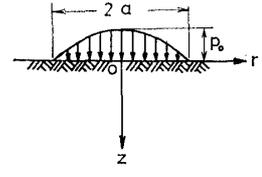


図-2 円形放物線荷重

式(11)を(10)に代入して未定係数 D が求められ, 応力及び変位は次のように決定される。

$$\sigma_z = \frac{p_0 a}{\alpha - \beta} \int_0^\infty (\alpha e^{-\beta \lambda z} - \beta e^{-\alpha \lambda z}) J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{p_0 a}{\alpha - \beta} \left\{ \int_0^\infty (\alpha e^{-\alpha \lambda z} - \beta e^{-\beta \lambda z}) J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \int_0^\infty [(L+K)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (M+K)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{p_0 a}{\alpha - \beta} \left\{ \nu \int_0^\infty [(\alpha^2 - 1)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (\beta^2 - 1)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \right. \\ & \left. \times J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \int_0^\infty [(L+K)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (M+K)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\tau_{rz} = \frac{p_0 a}{\alpha - \beta} \int_0^\infty (e^{-\beta \lambda z} - e^{-\alpha \lambda z}) J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u = & \frac{p_0 a(1+\nu)}{E(\alpha - \beta)} \int_0^\infty [(L+K)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (M+K)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \\ & \times \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{p_0 a(1+\nu)}{E(\alpha - \beta)} \int_0^\infty [(M-1)e^{-\beta \lambda z} - (L-1)e^{-\alpha \lambda z}] \\ & \times \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (17) \end{aligned}$$

式(12)~(17)は $E/G \rightarrow 2(1+\nu)$ の極限において通常弾性体の解となるが, 特に σ_z, τ_{rz} 及び w は次式のように導かれて, Love¹²⁾ の解と一致する。

$$\sigma_z = p_0 a \int_0^\infty (1 + \lambda z) e^{-\lambda z} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (18)$$

$$\tau_{rz} = p_0 a \int_0^\infty \lambda z e^{-\lambda z} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (19)$$

$$\begin{aligned} w = & -\frac{p_0 a(1+\nu)}{E} \int_0^\infty [2(1-\nu) + \lambda z] e^{-\lambda z} \\ & \times \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (20) \end{aligned}$$

式(12)~(17)から, 応力及び変位の特値が次のように求められる。

荷重軸上の鉛直応力;

$$\sigma_z)_{r=0} = p_0 \left[1 + \frac{z/a}{\alpha - \beta} \{ [1 + \alpha^2 (z/a)^2]^{-1/2} - [1 + \beta^2 (z/a)^2]^{-1/2} \} \right] \quad (21)$$

荷重中心の半径方向応力；

$$\sigma_r)_{z=r=0} = p_0 \frac{1+2\nu}{2} \quad (22)$$

荷重端下のせん断応力；

$$\tau_{rz})_{r=a} = \frac{p_0}{2\pi(\alpha - \beta)} \left[k_2 \{ [2 + \beta^2 (z/a)^2] K(k_2) - [4 + \beta^2 (z/a)^2] E(k_2) \} - k_1 \{ [2 + \alpha^2 (z/a)^2] K(k_1) - [4 + \alpha^2 (z/a)^2] E(k_1) \} \right] \quad (23)$$

荷重軸上の沈下量；

$$w)_{r=0} = \frac{p_0 a (1+\nu)}{E(\alpha - \beta)} \left[(M-1) \{ [1 + \beta^2 (z/a)^2]^{1/2} - \beta (z/a) \} - (L-1) \{ [1 + \alpha^2 (z/a)^2]^{1/2} - \alpha (z/a) \} \right] \quad (24)$$

表面の沈下量；

$$w)_{z=0} = \frac{p_0 a (1+\nu)(M-L)}{\pi E(\alpha - \beta)} \left[(1-r/a) K(k) + (1+r/a) E(k) \right] \quad (25)$$

表面の半径方向変位；

$$u)_{z=0} = \frac{p_0 a (1+\nu)(1-2\nu)}{2E} \begin{cases} r/a ; r \leq a \\ a/r ; r \geq a \end{cases} \quad (26)$$

ここに、 $K(k_1)$, $K(k_2)$, $K(k)$ ：第1種完全な円積分， $E(k_1)$, $E(k_2)$, $E(k)$ ：第2種完全な円積分， $k_1 = 2/[4 + \alpha^2 (z/a)^2]^{1/2}$ ， $k_2 = 2/[4 + \beta^2 (z/a)^2]^{1/2}$ ， $k = [4(r/a)] / (1 + r/a)^2]^{1/2}$ 。

式(25)において $E/G \rightarrow 2(1+\nu)$ の極限をとれば，結果は次式となり，通常弾性体に対する Egorov¹³⁾ の解と一致する。

$$w)_{z=0} = -\frac{2p_0 a (1-\nu^2)}{\pi E} \left[(1-r/a) K(k) + (1+r/a) E(k) \right] \quad (27)$$

また，式(25)において $r=0$ ， a とおけば，荷重中心及び荷重端の沈下量がそれぞれ次のように求められる。

$$w)_{z=r=0} = \frac{p_0 a (1+\nu)(M-L)}{E(\alpha - \beta)} \quad (28)$$

$$w)_{z=0, r=a} = \frac{2p_0 a (1+\nu)(M-L)}{\pi E(\alpha - \beta)} \quad (29)$$

従って，荷重中心の沈下量は， E/G のいかに問わず常に荷重端のその $\pi/2 \approx 1.57$ 倍であることがわかる。更に，式(22)，(26) から，荷重中心の半径方向応力並びに表面の半径方向変位も， E/G に関係なく常に一定で，通常弾性体の値（半径方向変位の場合 Schleicher¹⁴⁾ の解）をとることが認められる。

3.3 放物線荷重の解

図-2 に示す円形放物線荷重の場合，荷重分布の展開

式は次のとおりである。

$$q(r) = 2p_0 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (30)$$

ここに， p_0 ：最大荷重強度， a ：荷重半径。

式(30)と(10)から未定係数 D が決定され，従ってこの場合の応力及び変位は次式となる。

$$\sigma_z = \frac{2p_0}{\alpha - \beta} \int_0^\infty (\alpha e^{-\beta \lambda z} - \beta e^{-\alpha \lambda z}) \frac{1}{\lambda} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (31)$$

$$\sigma_r = \frac{2p_0}{\alpha - \beta} \left[\int_0^\infty (\alpha e^{-\alpha \lambda z} - \beta e^{-\beta \lambda z}) \times \frac{1}{\lambda} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda - \frac{1}{r} \int_0^\infty [(L+K)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (M+K)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \frac{1}{\lambda^2} J_2(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \quad (32)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2p_0}{\alpha - \beta} \left[\nu \int_0^\infty [(\alpha^2 - 1)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (\beta^2 - 1)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \times \frac{1}{\lambda} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{1}{r} \int_0^\infty [(L+K)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (M+K)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \frac{1}{\lambda^2} J_2(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \quad (33)$$

$$\tau_{rz} = \frac{2p_0}{\alpha - \beta} \int_0^\infty (e^{-\beta \lambda z} - e^{-\alpha \lambda z}) \frac{1}{\lambda} J_2(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (34)$$

$$u = \frac{2(1+\nu)p_0}{E(\alpha - \beta)} \int_0^\infty [(L+K)\beta e^{-\alpha \lambda z} - (M+K)\alpha e^{-\beta \lambda z}] \frac{1}{\lambda^2} J_2(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (35)$$

$$w = \frac{2(1+\nu)p_0}{E(\alpha - \beta)} \int_0^\infty [(M-1)e^{-\beta \lambda z} - (L-1)e^{-\alpha \lambda z}] \times \frac{1}{\lambda^2} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (36)$$

式(31)～(36)は $E/G \rightarrow 2(1+\nu)$ とするとき通常弾性体の解となるが，特に σ_z と w については，それぞれ Harr and Lovell¹⁵⁾ 及び Schiffman¹⁶⁾ の解である次式が導かれる。

$$\sigma_z = 2p_0 \int_0^\infty (1+\lambda z) e^{-\lambda z} \frac{1}{\lambda} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (37)$$

$$w = -\frac{2(1+\nu)p_0}{E} \int_0^\infty [2(1-\nu) + \lambda z] e^{-\lambda z} \times \frac{1}{\lambda^2} J_2(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (38)$$

式(31)～(36)から応力と変位の特値を導けば，次の結果となる。

荷重軸上の鉛直応力；

$$\sigma_z)_{r=0} = p_0 \left[1 - 2(z/a)^2 + \frac{2(z/a)}{\alpha - \beta} \times \{ [1 + \alpha^2 (z/a)^2]^{1/2} - [1 + \beta^2 (z/a)^2]^{1/2} \} \right] \quad (39)$$

荷重中心の半径方向応力；

$$\sigma_r)_{z=r=0} = p_0 \frac{1+2\nu}{2} \quad (40)$$

表面の沈下量；

$$w)_{z=0} = \frac{4(1+\nu)(M-L)p_0a}{9\pi E(\alpha-\beta)} (1+r/a) \times [(1-r/a)^2 K(k) + (2-r^2/a^2) E(k)] \quad (41)$$

表面の半径方向変位；

$$u)_{z=0} = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)p_0}{E} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} J_2(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (42)$$

ここに、 $K(k)$ 、 $E(k)$ 及び k は式 (25) におけると同義である。

更に、式 (41) を用いて、载荷中心及び载荷端の沈下量が、それぞれ次のように求められる。

$$w)_{z=r=0} = \frac{2(1+\nu)(M-L)p_0a}{3E(\alpha-\beta)} \quad (43)$$

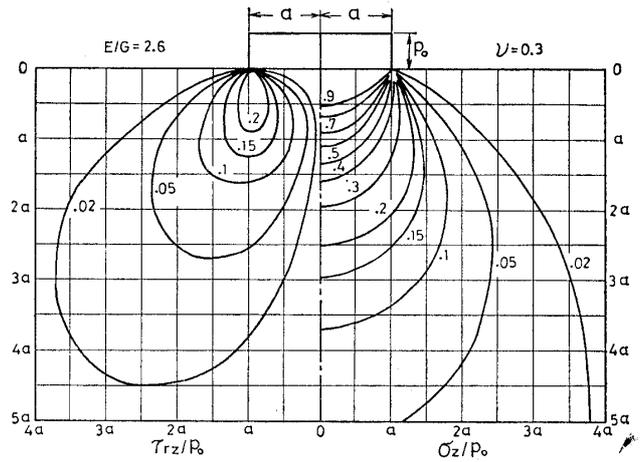
$$w)_{z=0,r=a} = \frac{8(1+\nu)(M-L)p_0a}{9\pi E(\alpha-\beta)} \quad (44)$$

式 (40)~(44) によれば、载荷中心の半径方向応力及び表面半径方向変位は、いずれも E/G と関係なく常に通常弾性体の値をとると同時に、载荷中心の沈下量も、 E/G と無関係に载荷端のその $3\pi/4 \approx 2.55$ 倍となっている。また、载荷中心の半径方向応力を与える式 (40) は、等分布荷重の場合の式 (22) と全く同形である。

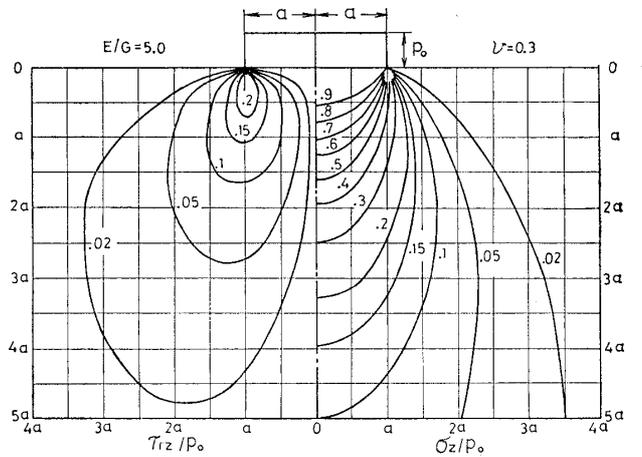
3.4 計算結果と考察

式 (12)~(17) あるいは式 (31)~(36) を用いて応力及び変位を計算する場合、これら諸式を解析的に積分表示し得ればよいが極めて困難なるゆえ、ここでは $J_1(\lambda a)$ の隣り合う零点ごとに区間を設け、各区間に Gauss の 16 点法を適用して、数値積分により解を求めた。数値積分は、ある区間の積分による増分がその区間までの総積分値の 10^{-3} 以下となるまで続けた。この収束判定値が満たされない場合には、21 区間で数値積分を打ち切り、最終 2 回分の答の平均値をもってその場合の解とした。なお、式 (31)~(36) は被積分関数に $J_1(\lambda a)$ を含まぬため、数値積分の収束性が一見良くないようであるが、以上の操作で式 (12)~(17) と同様の精度をもつ解の得られることを確認している。

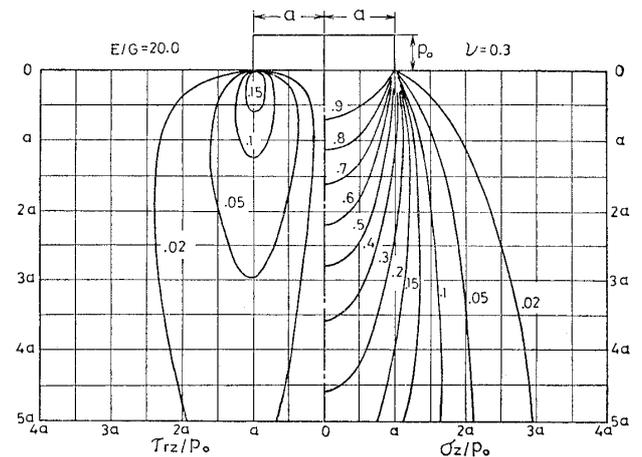
応力と変位の特性を、まず円形等分布荷重の場合について述べる。図-3 は鉛直応力 σ_z 及びせん断応力 τ_{rz} の等値線である。ポアソン比は $\nu=0.3$ とし、 $E/G=2.6$ は通常の弾性体を意味する。この図から明らかなように、両応力とも E/G の増加すなわちせん断抵抗の低下につれて、側方へ余り波及せずより深部へ伝達されるようになる。この結果は、ゆるい砂地盤や軟弱な粘土地盤において、応力の影響範囲が従来の理論から考えられている深さ以上に及ぶことを示唆するものとして、興味深



(a) $E/G=2.6$



(b) $E/G=5.0$



(c) $E/G=20.0$

図-3 鉛直応力及びせん断応力の等値線，円形等分布荷重の場合

い。

図-4 に荷重軸上の鉛直応力の深さ方向分布を示す。鉛直応力は E/G の大なるほど大きく、砂地盤がゆるく粘土地盤が軟弱なほど応力の集中が起きて、荷重の分散効果の低下することが顕著に示されている。荷重軸上の鉛直応力とポアソン比の関係を示せば、図-5 のよう

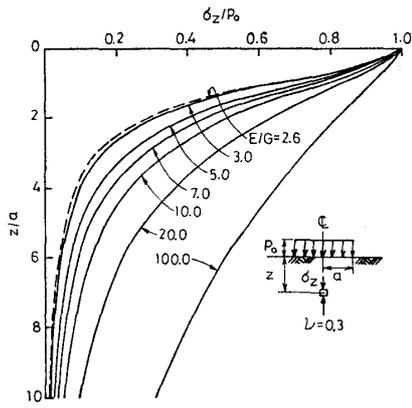


図-4 荷重軸上の鉛直応力の深さ方向分布, 円形等分布荷重の場合

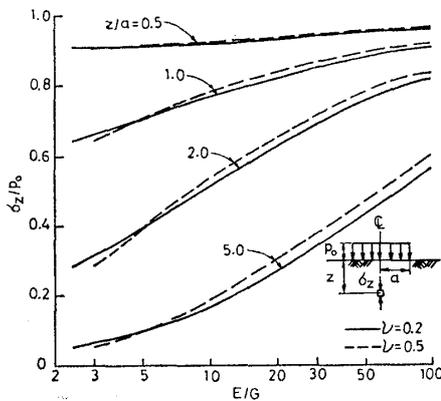


図-5 荷重軸上の鉛直応力とポアソン比の関係, 円形等分布荷重の場合

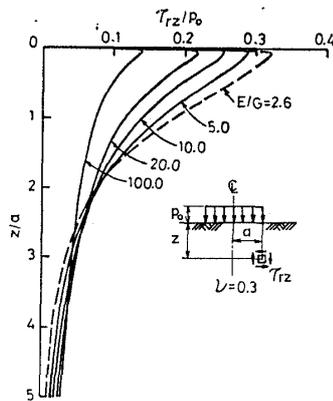


図-6 荷重端下のせん断応力の深さ方向分布, 円形等分布荷重の場合

になる。鉛直応力は E/G が5より小なるときポアソン比の増加と共に減少し、大なるときは逆に増加するが、ポアソン比による鉛直応力の差異はほとんどないと考えて差し支えない。

図-6,7 はそれぞれ荷重端下におけるせん断応力 τ_{rz} の深さ方向分布、及びポアソン比による変化を示すものである。図-6 から明らかなように、荷重端下のせん断応力は、 $E/G \leq 20.0$ 、 $z \leq 2a$ の範囲で、 E/G の増加、すなわちせん断抵抗が低下するに伴い減少し、 $z > 2a$ でこ

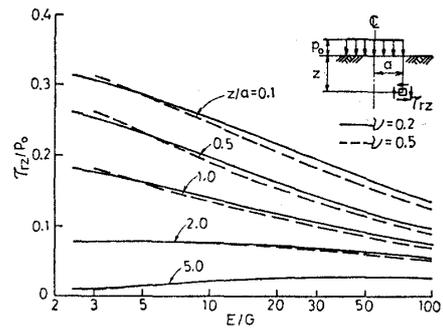


図-7 荷重端下のせん断応力とポアソン比の関係, 円形等分布荷重の場合

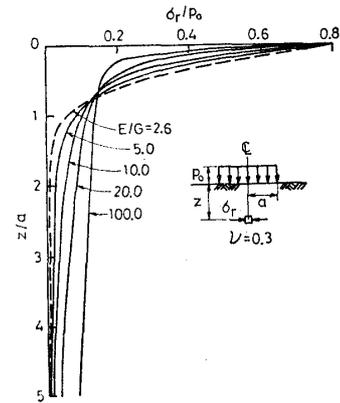


図-8 荷重軸上の半径方向応力の深さ方向分布, 円形等分布荷重の場合

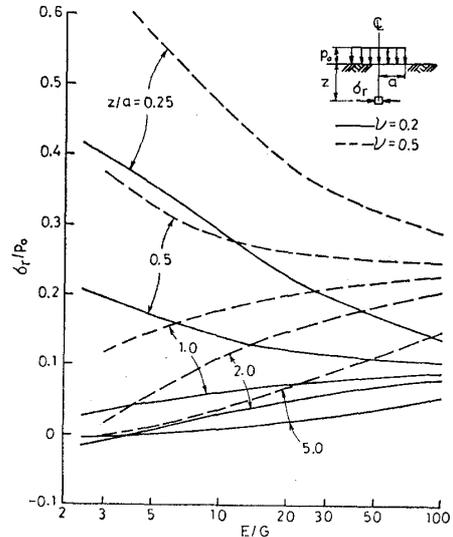


図-9 荷重軸上の半径方向応力とポアソン比の関係, 円形等分布荷重の場合

れと逆の傾向にある。図-7 においては、鉛直応力と同様に、せん断応力もポアソン比の影響をほとんど受けなことが認められる。

荷重軸上の半径方向応力 σ_r について、その深さ方向分布を 図-8 に、ポアソン比による変化を 図-9 に、それぞれ示す。図-8 に見られるように、半径方向応力と E/G の関係は $z=0.75a$ を境として異なり、 $z < 0.75a$ のとき E/G が大なるほど半径方向応力は小さく、 $z > 0.75a$ ではその逆となっている。鉛直応力及びせん断応

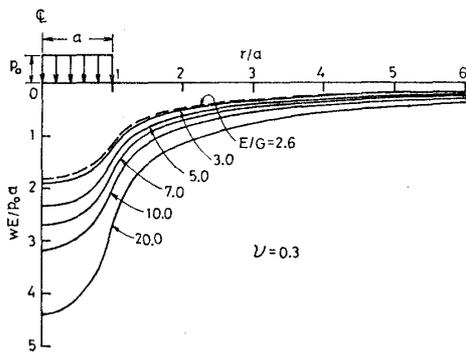


図-10 表面沈下量の E/G による変化, 円形等分布荷重の場合

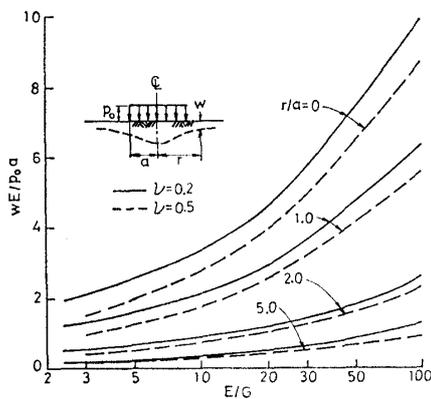


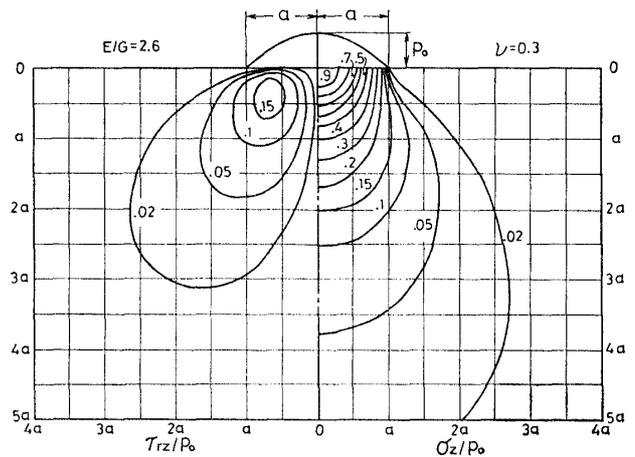
図-11 表面沈下量とポアソン比の関係, 円形等分布荷重の場合

力がポアソン比の影響を余り受けないことは前述のとおりであるが、半径方向応力はこの限りでなく、図-9 から明らかのように、ポアソン比が大きくなるにつれて増大する傾向にある。

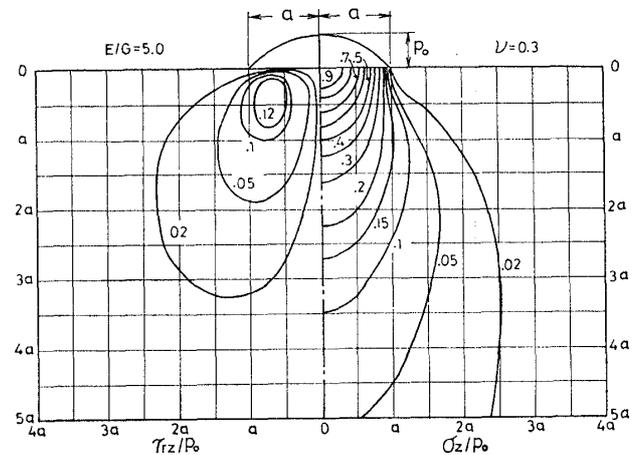
表面沈下量 w は図-10, 11 のように求められる。図-10 を参照すれば、表面沈下量は E/G とともに増加するが、この傾向は荷重中心近傍において著しい。表面沈下量が E/G のいかに問わずポアソン比の増加につれて減少することは、図-11 に見られるとおりである。

次に、円形放物線荷重の場合について述べる。図-12 は鉛直応力 σ_z 及びせん断応力 τ_{rz} の等値線であり、両応力とも E/G の増加すなわちせん断抵抗の低下に伴って、側方へ余り波及せず深部へより伝達されることがわかる。しかし、せん断応力の最大値の生ずる位置は E/G に関係なく不変で、ほぼ $(r, z) = (0.7a, 0.3a)$ にある。

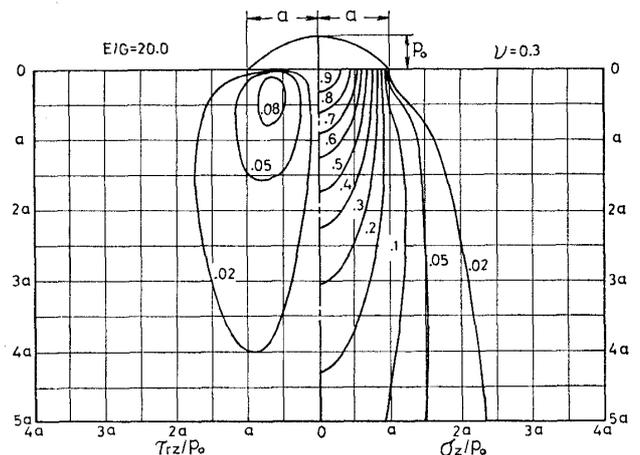
荷重軸上における鉛直応力 σ_z と半径方向応力 σ_r の深さ方向分布並びにポアソン比による変化を、図-13~16 に示す。鉛直応力が E/G の大なるほど大きく、せん断抵抗の減少に従い応力が集中して、荷重の分散効果の低下することは、図-13 から明らかである。しかし、半径方向応力と E/G の関係は、図-15 に示されるように深さによって異なり、 $z < 0.5a$ のとき E/G の大なるほど半径方向応力は小さく、 $z > 0.5a$ ではその逆である。



(a) $E/G=2.6$



(b) $E/G=5.0$



(c) $E/G=20.0$

図-12 鉛直応力及びせん断応力の等値線, 円形放物線荷重の場合

また、図-14 と図-16 とから、鉛直応力とポアソン比の関係は $E/G=5$ を境として逆転するが、ポアソン比の鉛直応力に与える影響は小さいこと、これに対して半径方向応力はポアソン比の影響をかなり受けて、ポアソン比と共に増加することが、それぞれうかがわれる。

図-17, 18 は表面沈下量 w の E/G 及びポアソン比によ

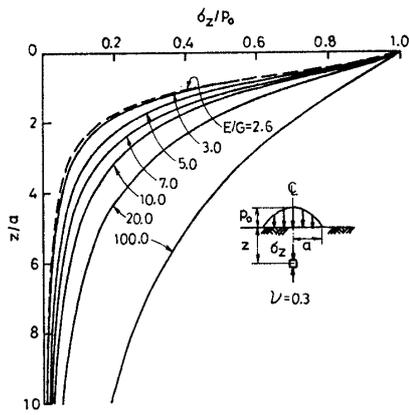


図-13 荷重軸上の鉛直応力の深さ方向分布, 円形放物線荷重の場合

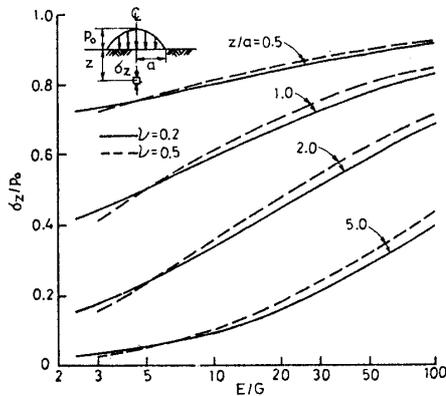


図-14 荷重軸上の鉛直応力とポアソン比の関係, 円形放物線荷重の場合

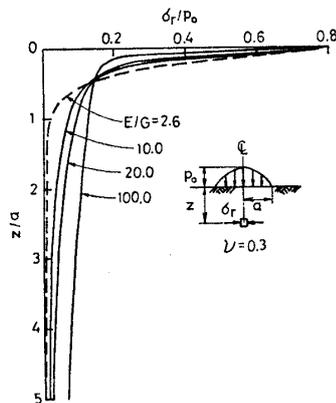


図-15 荷重軸上の半径方向応力の深さ方向分布, 円形放物線荷重の場合

る変化を示すものである。表面沈下量は E/G が増加しポアソン比が減少するにつれて増大するが、特に载荷中心近傍において E/G の増加と共に大きな沈下の生ずることが特徴的といえる。

4. ワイスコフ体理論と Fröhlich 理論との比較

円形等分布荷重及び放物線荷重を対象として、ワイスコフ体理論と Fröhlich 理論とを比較する。なお、Fröhlich 理論では変位を求めることができないため、比較は

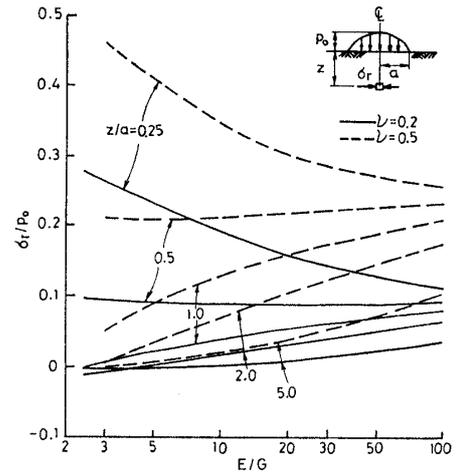


図-16 荷重軸上の半径方向応力とポアソン比の関係, 円形放物線荷重の場合

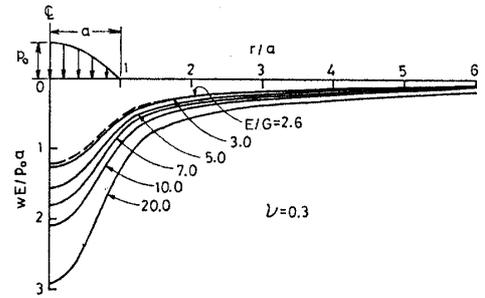


図-17 表面沈下量の E/G による変化, 円形放物線荷重の場合

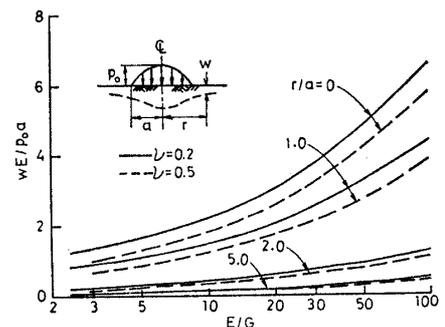


図-18 表面沈下量とポアソン比の関係, 円形放物線荷重の場合

応力のみについてである。

Fröhlich¹⁷⁾ によれば、円形等分布荷重に対する荷重軸上の鉛直応力は次のように導かれている。

$$\sigma_z)_{r=0} = p_0(1 - \cos^n \xi) \quad (45)$$

ここに、 n : 応力集中係数、 $\xi = \tan^{-1}(a/z)$

式 (45) の計算結果を、ワイスコフ体理論による値と併記して 図-19 (a) に示す。計算に取り上げた応力集中係数の範囲は $n=3.0 \sim 7.0$ であり、 E/G の値もこれと同じくとした。ポアソン比を $\nu=0.5$ としているため、

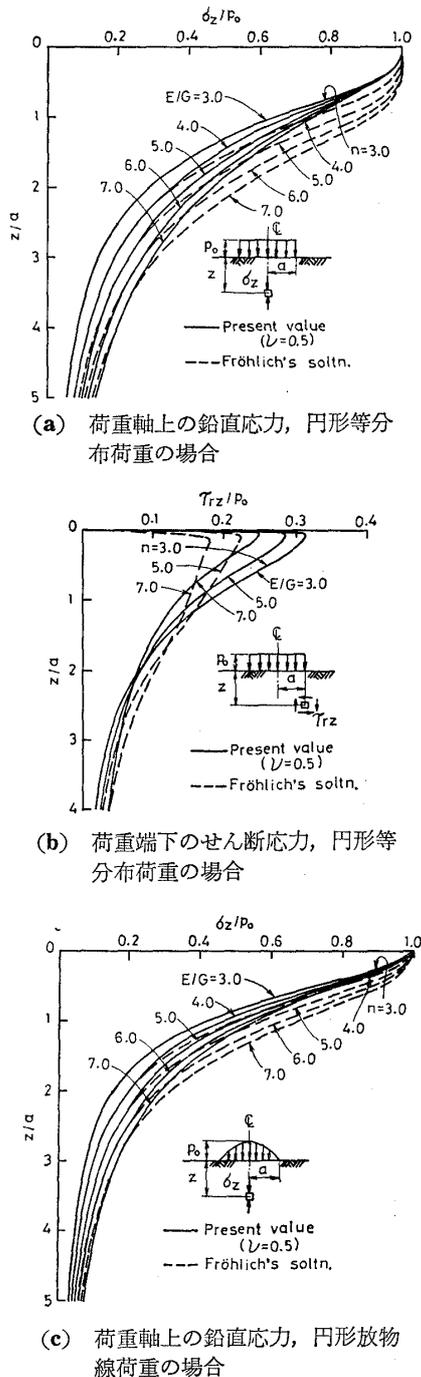


図-19 ワイスコフ体理論と Fröhlich 理論の比較

$E/G=3.0$ は通常の弾性体を意味し、このときの応力値は $n=3.0$ のそれと同一である。ワイスコフ体の解を E/G と同じ値の応力集中係数に対する Fröhlich 解と比べれば、 $z \leq (2 \sim 3)a$ では後者の方が常に大きく、 $z > (2 \sim 3)a$ のとき両者はほとんど一致している。そして、その一致深度は E/G もしくは n の増加するほど深くなる。

図-19 (b) は同じ円形等分布荷重の場合について、荷重端下のせん断応力を本法の解と Fröhlich 解¹⁹⁾ とで比較するものである。鉛直応力の場合とは逆に、 $z \leq a$ のときワイスコフ体理論の方が大きく、 $z > a$ では Fröhlich 解の方が大きいものの、両値に余り差異は認められ

ない。

荷重軸上の鉛直応力は、円形放物線荷重の場合、図-19 (c) のようになる。図中、Fröhlich 解は次式¹⁹⁾ から求めた。

$$\sigma_z|_{r=0} = p_0 \left\{ 1 - \cos^n \xi - \frac{\cot^2 \xi}{n-2} \times [2 - n \cos^{n-2} \xi + (n-2) \cos^n \xi] \right\} \quad (46)$$

ポアソン比を $\nu=0.5$ とし、 $n=E/G=3.0$ は通常の弾性体を表わす。図から明らかのように、Fröhlich 解は $z \leq (2 \sim 2.5)a$ のとき常にワイスコフ体理論より大きい、 $z > (2 \sim 2.5)a$ ではほとんど一致し、その一致深度は E/G または n の大なるほど深くなる。

5. ワイスコフ体理論による載荷試験結果の検討

5.1 等分布載荷試験

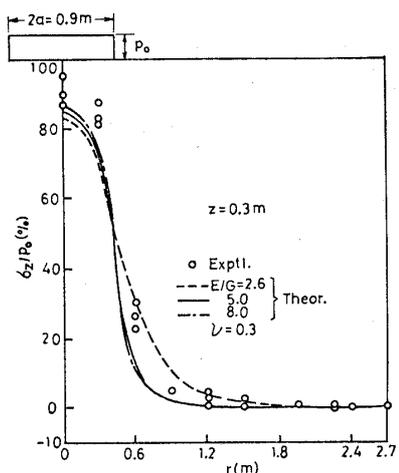
Turnbull ら²⁰⁾ が一様な砂地盤に対して行った現場実験の結果に、ワイスコフ体の理論を適用してみる。荷重は地表面上の円形等分布荷重である。

各深さにおける鉛直応力の半径方向分布を、荷重半径を一定 ($a=0.45\text{m}$) にして図-20 に示す。また、一定深度 ($z=0.3\text{m}$) における沈下量の半径方向分布を荷重半径を変化させて示せば、図-21 のようになる。いずれの図においても、ポアソン比は $\nu=0.3$ とし、図-21 のヤング率は $E=2800\text{ kg/cm}^2$ である。

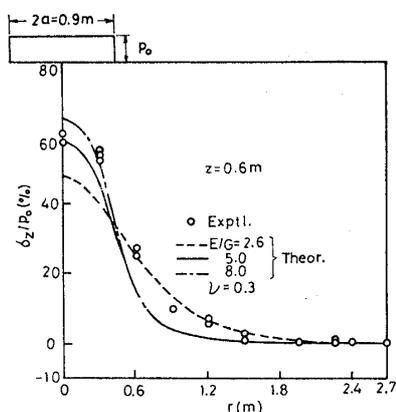
図-20 に見られるように、 $r > a$ では $E/G=2.6$ が、 $r < a$ では $E/G=5.0 \sim 8.0$ がほぼ実測値と一致するが、この結果は荷重板直下で応力集中の生じていることを示すものである。しかし、 E/G が半径方向に不変として論を進めれば、深度が大きくなるにつれて理論値と実測値との相関は良くなる傾向にあり、特に図-20 (c) では $E/G=5.0$ で両者はかなり良く一致している。

E/G が半径方向で異なることは図-21 においても認められ、 $r > a$ で $E/G=2.6$ が、 $r < a$ で $E/G=5.0 \sim 8.0$ がそれぞれ実測値に近い値を与えている。鉛直応力と同様に、この場合にも E/G の半径方向不変を考えれば、荷重半径の減少に伴って理論値と実測値の差異は小さくなる傾向がうかがわれる。そして、 $E/G=8.0$ とするとき実測値とかなり良く一致する解が得られることは、図-21 (c) から明らかである。

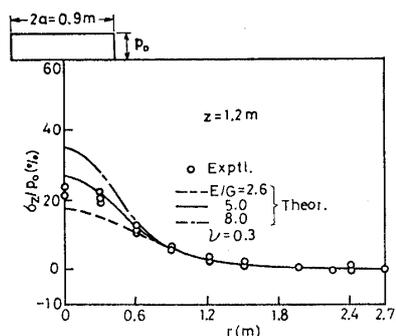
Turnbull ら²⁰⁾ は、実験結果を検証するに、応力に対して Fröhlich の応力集中理論を用い、沈下量に対してはヤング率を2倍まで変化させて Boussinesq 理論を適用している。同一の土に対してヤング率を2倍も変化させているのもさることながら、応力と変位とで適用理論が異なるのは合理性を欠くといつてよい。これに対して、ワイスコフ体理論では、上述のように実測値と一致する



(a) $z=0.3\text{ m}$



(b) $z=0.6\text{ m}$



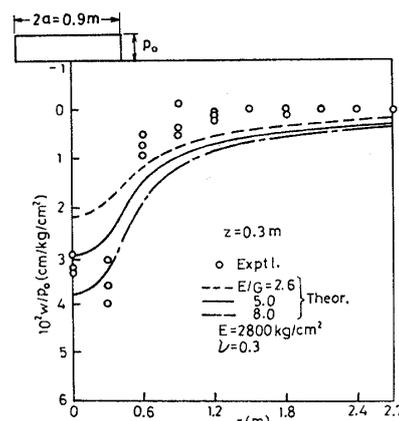
(c) $z=1.2\text{ m}$

図-20 等分布載荷試験による鉛直応力の半径方向分布

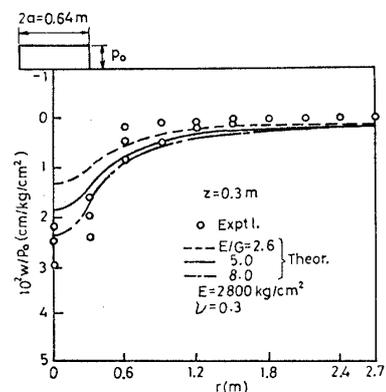
解を与える E/G が応力及び変位に対して異なることがあるものの、応力と変位とを全く同等に取り扱うことのできる特色を持つ。

5.2 剛性載荷試験

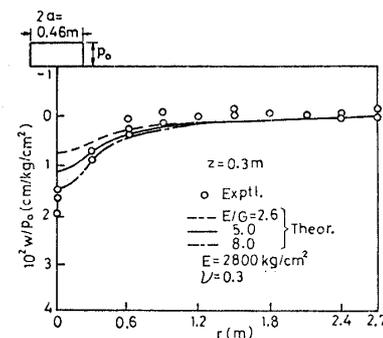
地盤の剛性載荷試験は多くの研究者により実施されているが、ここではゆるい砂と締まった砂に対する市原²¹⁾の実験結果を取り上げ、ワイスコフ体理論と比較する。得られた結果のうち、荷重軸上の鉛直応力を平均接地圧 p_a に対する比として、図-22 にプロットする。図中、



(a) $a=0.45\text{ m}$



(b) $a=0.32\text{ m}$



(c) $a=0.23\text{ m}$

図-21 等分布載荷試験による沈下量の半径方向分布

実線はワイスコフ体理論による解であり、載荷板（円形）の接地圧分布を放物線と見なして、式 (39) によって求めた。ポアソン比は $\nu=0.3$ である。

図-22 を参照して、締まった砂に対しては $E/G=2.6$ が、ゆるい砂に対しては $E/G=7.0$ が、それぞれ実測値と良く一致することが認められる。この結果は、締まった砂では E/G が小さくて弾性体の値の $2(1+\nu)$ に近く、ゆるい砂ではこれよりかなり大きな値をとる、とする本理論の妥当性を裏付けるものと評価できる。

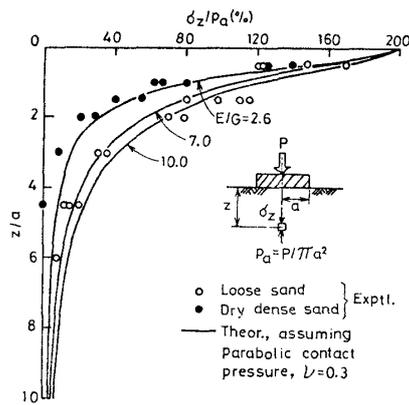


図-22 剛性載荷試験による荷重軸上の鉛直応力

6. 結 論

得られた成果を列挙すれば、次のとおりである。

(1) 地盤内の応力は鉛直応力及びせん断応力のいずれも、 E/G の増加すなわちせん断抵抗の低下につれて、側方へ余り波及せず深部へより伝達されるようになる。この結果は、ゆるい砂地盤や軟弱な粘土地盤において、応力の影響範囲が従来の理論による深さ以上に及ぶことを示唆するものと考えられる。

(2) 荷重軸上の鉛直応力は E/G の大なるほど大きく、砂地盤がゆるく粘土地盤が軟弱なほど応力の集中が起きて、荷重の分散効果は低下する。

(3) 鉛直応力とせん断応力のポアソン比による変化は、 E/G の値のいかんを問わずほとんどないが、半径方向応力はこの限りでなく、ポアソン比と共に増大する傾向にある。

(4) 表面沈下量は E/G が増加しポアソン比が減少するにつれて増大する。

(5) 載荷中心の沈下量は、 E/G のいかんを問わず常に載荷端のその一定倍(円形等分布荷重の場合 1.57 倍、円形放物線荷重の場合 2.55 倍)であり、表面の半径方向変位も E/G に関係なく常に通常弾性体の値をとる。

(6) 本理論を Fröhlich の応力集中理論と比較すれば、鉛直応力については、 $z \leq (2 \sim 3)a$ で後者の方が常に大きく、 $z > (2 \sim 3)a$ のとき両者はほとんど一致する。この傾向は本論で取り上げた荷重形式のいかんを問わず適用できる。

(7) 円形等分布荷重によるせん断応力については、 $z \leq a$ のときワイスコフ体理論の方が大きく、 $z > a$ では逆に Fröhlich 解の方が大きいものの、両値に余り差異は認められない。

(8) 一様な砂地盤の等分布載荷試験結果を検証して、本理論値と実測値の相関は、比較深度が大きいか載荷半径が小さくなるにつれて良くなる傾向にあり、鉛直

応力については $E/G=5.0$ 、沈下量については $E/G=8.0$ とするとき良い一致が見られた。

(9) 一様な砂地盤の剛性載荷試験結果との比較により、鉛直応力に関して締まった砂では $E/G=2.6$ 、ゆるい砂では $E/G=7.0$ がそれぞれ実測値とよく一致し、本理論の妥当性が裏付けられた。

地盤内の応力及び変位を解析する場合、従来、応力に対して Fröhlich 理論を、変位に対して Boussinesq 理論をそれぞれ別個に適用することが多く、合理性を欠いていた。これに対して、ワイスコフ体理論では、上述のように実測値と一致する解を与える E/G が応力と変位とで異なることがあるものの、両値を全く同等に取り扱うことができ、これが本理論の大きな特徴の一つとなっている。

ワイスコフ体理論の適用性、妥当性を吟味するには、試験結果との比較が重要であるが、本論では 2 例といまだ十分でなく、今後の研究にまたれるところである。

記号説明

A, B, C, D = 積分定数

a = 載荷半径

E = ヤング率

$E(k), E(k_1), E(k_2)$ = 第 2 種完全だ円積分

e = 自然対数の底

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda z) \\ f_2(\lambda z) \end{aligned} \right\} = A e^{\alpha \lambda z} \pm B e^{-\alpha \lambda z}$$

G = せん断弾性係数

$$\left. \begin{aligned} g_1(\lambda z) \\ g_2(\lambda z) \end{aligned} \right\} = C e^{\beta \lambda z} \pm D e^{-\beta \lambda z}$$

$$h(\lambda z) = (L+K)f_1(\lambda z) + (M+K)g_1(\lambda z)$$

$J_m(\lambda r)$ = m 次の第 1 種 Bessel 関数

$$K = E/G(1+\nu) - 1$$

$$K' = (1-K)/(1-\nu)$$

$K(k), K(k_1), K(k_2)$ = 第 1 種完全だ円積分

$$k = [4(r/a)/(1+r/a)^2]^{1/2}$$

$$k_1 = 2/[4+\alpha^2(z/a)^2]^{1/2}$$

$$k_2 = 2/[4+\beta^2(z/a)^2]^{1/2}$$

$$L = (K-1)/(\alpha^2-1)$$

$$M = -\alpha^2 L$$

n = 応力集中係数

P = 集中荷重

p_0 = 平均接地圧

p_0 = 等分布荷重強度、放物線荷重の最大荷重強度

$q(r)$ = 荷重分布関数

r, θ, z = 円筒座標

u, w = 変位

$$\alpha = [(2-K' + \sqrt{K'^2 - 4K'})/2]^{1/2}$$

$$\beta = 1/\alpha$$

λ = 積分パラメータ

ν = ポアソン比

$$\xi = \tan^{-1}(a/z)$$

π = 円周率

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ = 直応力

τ_{rz} = せん断応力

∞ = 無限大

参考文献

- 1) Fröhlich, O. K. (1934) : Druckverteilung im Baugrunde, Springer-Verlag, s. 21-s. 82.

- 2) 赤井浩一 (1969) : 「土の支持力と沈下」, 山海堂, pp. 73~74.
- 3) Kögler, F. (1928) : "Druckverteilung im Baugrunde, II. Rechnerische Verfahren zu ihrer Ermittlung auf Grund neuerer Versuchsergebnisse," Bautechn., 6 Jg., Heft 15, s. 205-s. 209.
- 4) Talbot, A. N., et al. (1919-20) : "Second progress report of the special committee to report on stresses in railroad truck," Trans. ASCE, Vol. 83, pp. 1409-1580.
- 5)~7) M. H. ゴールドシュテイン (大草重康訳) (1973) : 「新しい土質力学 I」, 森北出版, pp. 283~288.
- 8) Ohde, J. (1939) : "Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund," Bauing., 20 Jg., Heft 33/34, s. 451-s. 459.
- 9) Weiskopf, W. H. (1945) : "Stresses in soils under a foundation," J. Franklin Inst., Vol. 239, pp. 445-465.
- 10) 後藤恵之輔・山内豊聡 (1978) : ワイスコフ体としての地盤の2次元問題について, 「土質工学会論文報告集」, Vol. 18, No. 2, pp. 47~58.
- 11) Misra, B. and Sen, B. R. (1975) : "Stresses and displacements in granular materials due to surface load," Int. J. Eng. Sci., Vol. 13, No. 7/8, pp. 743-761.
- 12) 最上武雄 (1969) : 「土質力学」, 技報堂, p. 233.
- 13) Harr, M. E. (1966) : Foundations of Theoretical Soil Mechanics, McGraw-Hill Book Co., p. 88.
- 14) Schleicher, F. (1926) : "Zur Theorie des Baugrundes," Bauing., 7 Jg., Heft 48, s. 931-s. 935 ; Heft 49, s. 949-s. 952.
- 15) Harr, M. E. and Lovell, C. W., Jr. (1963) : "Vertical stresses under certain axisymmetrical loadings," Highway Res. Rec., No. 39, pp. 68-77.
- 16) Schiffman, R. L. (1963) : Discussion on "Vertical stresses under certain axisymmetrical loadings," by M. E. Harr and C. W. Lovell, Jr., *ibid.*, pp. 78-81. (式 (7b) の右辺に誤植がある)
- 17) 前出 1), s. 50.
- 18) 勝見 雅 (1977) : 地表面に円形分布荷重が作用した場合の任意点における地盤内応力, 「土と基礎」, Vol. 25, No. 5, pp. 57~60.
- 19) 前出 1), s. 52, 式 (8) を変形.
- 20) Turnbull, W. J., Maxwell, A. A., and Ahlvin, R. G. (1961) : "Stresses and deflections in homogeneous soil masses," Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Vol. 2, pp. 337-345.
- 21) 市原松平 (1955) : 剛性載荷板荷重による砂層中の鉛直増加土圧の分布について, 「土木学会誌」, Vol. 40, No. 4, pp. 153~159.

(原稿受付, 1978. 6. 28)