土質工学会論文報告集
Vol. 19, No. 4, Dec. 1979

埋設管の動的地盤ばね定数に関する理論的考察

(A Theoretical Study on the Dynamic Modulus of Earth Reaction for Buried Pipe)

鵜飼恵三* (Keizo Ugai)
山口柏樹** (Hakuju Yamaguchi)

キーワーズ：地震／地盤係数／弾性／動的／波動
IGC: E8

1. 緒論

地中埋設管の地震時挙動を解析する場合，管路を弾性もしくは弾塑性床上のはりと仮定して計算を進めることが多い[1),2)]。地盤と管との間のばね定数（地盤反力係数）として静的な実験より得られた値がよく使われるが，静的な実測値の使用が有効であるかどうかは明確にされていない。静的な実測値を用いる場合の問題点として，例えば管径，地震波の波長・周期，及び地盤の弾性定数などとの関係が不明確であることが挙げられる。実際には，いくつかの文献[1),2)]において動的なばね定数も実験的に得られているが，後に示すように，静的な実測値に比べて特異な値をとる場合があるため実測値の信頼性に不安が残る。

本論文では，地盤と管との間の動的なばね定数を，弾性波動論的手法に基づいて簡単な形で導出し，動的なばね定数に関するいくつかの特徴的な性質を見いだすとともに，他の文献[1),2),3),4)]の動的もしくは静的な実測値と比較した。また，動的なばね定数に対する埋設深の影響に関する考察を別の機会に行っている[5)]ので，その結果を引用し簡単な説明を加えた。静的な実測値と動的な理論解とを直接比較すること自体に問題はあるが，静的な実測値が現実の地震応答計算に使われている以上，両者の値を比較し，考察を加えておくことは必要であると考える。また，地震応答計算結果として出力される管のひずみなどが両者の値の差違によりどの程度影響されるかを調べるのも重要なことである。著者の一人は，既に無限長管について，軸方向の管のすべりを考慮する場合にはばね定数の大きさが数倍異なっても管の軸ひずみの大きさはほとんど変化しないことを示している[6)]。したがって，動的な理論解と静的な実測値との差違がこのような範囲内におさまれば，ばね定数としてどちらを用いても応答計算上問題はないことになる。本論文ではこの点についても若干の考察を行った。

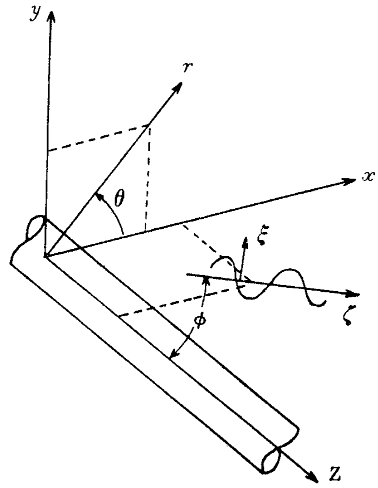
2. 入力地震波

入力地震波としては，一般にS波・P波・表面波（レーレー波・ラブ波）が考えられる[7)]。『埋設パイプラインのひずみ観測・地震時土のひずみ観測によれば，加速度最大の時点でひずみ最大とならず表面波の部分で最大となる[1)]』と桜井が述べているように，表面波は埋設管の地震時挙動に関して重要な意味をもつが，地盤の多層構造を含めたかたちで理論解を導くことは不可能にちかい。しかしながら，弾性波動論の手法を取り入れつつ表面波に対する近似解を求めることは可能である。それは，表面波の速度を c として，変位が $U_g e^{ik(z-ct)}$ で表せる平面波が入射する場合を全無限地盤内の埋設管の問題として解く方法である。この方法は，$c \fallingdotseq v_s$ もしくは $c \fallingdotseq v_p$（v_s, v_p は S波，P波速度）のとき，想定した入射波が波動方程式を満たさないので問題がある。これは，表面波を，深さ方向に変位振幅が変化するにもかかわらず振幅一定な平面波と仮定したことによるが，深さ方向の振幅の変化は水平に敷設された埋設管の挙動にほとんど影響を与えないと思われるので上述の方法は一つの近似解を与えるであろう。表面波をこのように仮定すると，S波，P波も含めて，地震波は，横波か縦波，もしくは両波の和（例えば，レーレー波の場合には変位を波の進行方向及び進行直角方向の2成分に分けることにより縦波と横波の和として表せる）として表せる。本論文ではこれら2種類の波が入射する場合について各々解を求めた。なお，管は無限長とし入射波は定常正弦波とした。

3. 横波が入射する場合の解析

埋設管の地震時挙動に関する研究は多いが，管と地盤

* 新潟大学工学部土木工学科　助手（長岡市学校町一丁目）
** 東京工業大学工学部土木工学科　教授（目黒区大岡山 2-12-1）
・この論文に対するディスカッションは昭和55年10月1日までにご投稿下さい。



Z 軸：管軸方向

ζ 軸：入射波の伝播方向

図-1 管と入射波の位置関係

との動的相互作用を考慮した研究は数少ない。後藤ら[9]は横波が管軸方向に伝播する場合を2次元的に解析しているが入射角の影響は考慮されていない。本章では全無限地盤内に埋設された無限長管を想定し，管軸に対し斜め方向から平面定常正弦横波が入射する場合を3次元弾性波動論により解析した。入射波の伝播方向と管軸方向との成す角度が一定であるとき，入射波の管軸方向の振動成分は振動が波の伝播方向と管軸を含む面内で生じるときに最大となる[10]。したがって，管内に生じるひずみもこのときに最大となることが推測されるので解析ではこのような場合を対象とした。解析の手順を簡単に説明すると次のようである。まず，管を無限長の弾性はりと仮定し，管全体の変位が横方向変位と軸方向変位の二つのみによって規定されるものと考え，管外面上で強制変位を受けるような全無限弾性体内の波動伝播問題[11]として地盤の変位解（円筒座標表示）を求める。

$$u_R=E_2\sum_{m=0}^{\infty}\Big[A_m\frac{m}{\eta}H_m^{(1)}(\lambda\eta)+B_m\frac{\partial H_m^{(1)}(\lambda\eta)}{\partial\eta}-C_m i\tan\phi\frac{\partial H_m^{(1)}(\kappa\eta)}{\partial\eta}+U_g\cos\phi\frac{\varepsilon_m}{2}i^{m-1}\{J_{m-1}(\eta)-J_{m+1}(\eta)\}\Big]\cos\theta$$

u_θ，u_z の表示式は省略。

ここで，$E_2=e^{i(k\cos\phi z-\omega t)}$，$\eta=kr\sin\phi$，$\varepsilon_m=1$ $(m=0)$，$2(m\neq0)$。A_m，B_m，C_m は任意定数であり，管外面上での境界条件より定まる。次にこの解を用いて管外面上に作用する軸方向及び軸直角方向の力を算出する。軸方向の場合について例を示すと，単位管長当たりの軸方向力 f_a は

$$f_a=\int_0^{2\pi}\tau_{rz|r=a}\cdot ad\theta=-K_a[u_a+u_\xi\sin\phi\cdot S_a]$$

となる。u_a，u_ξ は管の軸方向変位，入射波の変位を表し，K_a，S_a は，（1），（8）式により表される。f_a は管に作用する強制振動力であるので管の振動方程式は次のようになる。

$$\rho' A\frac{\partial^2u_a}{\partial t^2}-EA\frac{\partial^2u_a}{\partial z^2}=-K_a(u_a+u_\xi\sin\phi\cdot S_a)$$

$S_a=1$ の場合，上式は床の運動が $u_\xi\sin\phi$ であり，弾性床のばね定数が K_a であるような弾性床上のはりの軸方向振動方程式を表す。後述するように，実際上，S_a は1に等しいとみなせるため，上式は後述の（3）式のようになる。この振動方程式を解くことにより，管の応答変位・ひずみが得られる。解析の結果を以下に述べる。

3.1 軸方向のばね定数及び管の応答変位

単位管長当たりの軸方向動的ばね定数 K_a は次のように表される。

$$K_a=2\pi\mu\eta_0\nu^2\Big/\Big\{\cos^2\phi\frac{H_0^{(1)}(\kappa\eta_0)}{\kappa H_1^{(1)}(\kappa\eta_0)}+\sin^2\phi\frac{\lambda H_0^{(1)}(\lambda\eta_0)}{H_1^{(1)}(\lambda\eta_0)}\Big\} \qquad (1)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}&\eta_0=ka\sin\phi,\quad \lambda^2=(\nu^2-\cos^2\phi)/\sin^2\phi\\&\kappa^2=(\nu^2-\beta^2\cos^2\phi)/(\beta^2\sin^2\phi),\quad \nu=c/v_s\\&\beta=v_p/v_s=\sqrt{2(1-\sigma)/(1-2\sigma)},\\&v_p=\sqrt{(\lambda_L+2\mu)/\rho},\quad v_s=\sqrt{\mu/\rho}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

記号は，ϕ：入射波の伝播方向と管軸方向との成す角，c・k：入射波の速度・波数，a：管外半径，σ・λ_L・μ・ρ：地盤のポアソン比・ラメの定数・せん断弾性係数・密度，$H_0^{(1)}$・$H_1^{(1)}$：第1種ハンケル関数，である。

上式の K_a を用いると管の軸方向の振動方程式は次のように表される。

$$\rho' A\frac{\partial^2u_a}{\partial t^2}-EA\frac{\partial^2u_a}{\partial z^2}=-K_a(u_a+u_\xi\sin\phi) \qquad (3)$$

記号は，u_a：管の軸方向変位，u_ξ：入射横波の変位，ρ'・A・E：管の密度・実断面積・ヤング率，である。u_a，u_ξ の正方向は，各々 z 軸，ξ 軸の正方向にとった。

定常振動を考えているので u_a，u_ξ は次のようになる。

$$u_a=U_ae^{i(k\cos\phi z-\omega t)},\quad u_\xi=U_ge^{i(k\cos\phi z-\omega t)} \qquad (4)$$

ここで，U_a，U_g は変位振幅を表す。

（4）式を（3）式に代入して，管の軸方向変位振幅 U_a 及び軸ひずみ振幅 ε_a を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}U_a/U_g&=-K_a\sin\phi/(EAk^2\cos^2\phi-\rho' A\omega^2+K_a)\\&=-K_{a0}\sin\phi/[(ka)^2\{1-(b/a)^2\}\\&\quad\times\{(1+\sigma')\mu'/\mu\cdot\cos^2\phi\\&\quad-\rho'/(2\rho)\}+K_{a0}]\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\varepsilon_a/U_g/a=ikaU_a/U_g \qquad (6)$$

ここで $$K_{a0}=K_a/(2\pi\mu) \qquad (7)$$

記号は，b・σ'・μ'：管の内半径・ポアソン比・せん断弾性係数，である。

なお，波長と管外半径との比 L/a が小さい場合には，厳密には（3）～（6）式中の U_g に次式で表される補正係数 S_a を掛けねばならない。

$$S_a=J_0(\eta_0)+J_1(\eta_0)/\nu^2\cdot\{(\lambda^2-1)H_0^{(1)}(\kappa\eta_0)\times\cos^2\phi/\kappa/H_1^{(1)}(\kappa\eta_0)-\lambda H_0^{(1)}(\lambda\eta_0)/H_1^{(1)}(\lambda\eta_0)\} \quad (8)$$

ここで，J_0，J_1 は第1種のベッセル関数である。

上式を種々の条件のもとで計算した結果，$0°\leqq\phi\leqq 80°$，$0.1\leqq\sigma\leqq 0.495$，$1\leqq c/v_s\leqq 8$ の場合には，$L/a\geqq 30$ のとき $|S_a|$ の値は 0.95～1.05 の範囲内におさまり，$L/a\geqq 100$ のときにはほぼ 1.00 に等しくなることが分かった。通常の地震波では $L/a>30$ であるので，（3）～（6）式は通常の地震応答解析に使用できよう。

L/a が非常に大きい場合，（5），（6）式は次のようになる。

$$U_a/U_g\fallingdotseq-\sin\phi,\quad \varepsilon_a/U_g/a\fallingdotseq-ika\cos\phi\sin\phi \quad (9)$$

したがって，軸ひずみは $\phi=45°$ で最大となる。

管軸方向の見かけ上の波速を $c'(=c/\cos\phi)$，見かけ上の波数を $k'(=k\cos\phi)$ とすると（1）式は次のように表される。

$$K_a=2\pi\mu(k'a)^2(c'/v_s)^2/[F(g'a)+F(h'a)/\{(c'/v_p)^2-1\}] \quad (10)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}F(x)&=xH_0^{(1)}(x)/H_1^{(1)}(x)\\(h'a)^2&=(k'a/v_p)^2(c'^2-v_p^2)\\(g'a)^2&=(k'a/v_s)^2(c'^2-v_s^2)\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

(11) 式は波速 c'，波数 k' の縦波が管軸方向に伝播すると仮定した解析より得られる式[9]に一致する。

3.2 軸直角方向のばね定数及び管の応答変位

単位管長当たりの軸直角方向ばね定数 K_p は，入射波の性質，解析上の次元数（2次元もしくは3次元）及び管外壁上に作用する軸方向のせん断応力 τ_{rz} による曲げモーメント m_p を考慮するか否か[11]，によって式の形が異なる。このことは，軸方向のばね定数 K_a が(11)式によるものしか存在しないことと好対照をなしている。ここでは，K_p を以下の3項に分けてまとめてみた。

（i） 横波が角度ϕを成して入射する場合（ただし，同時に $c=v_s$ 及び $\phi=0°$ とはならないものとする）

m_p を考慮しない場合の K_p を K_{p1}，考慮する場合の K_p を K_{p1m} で表すと次のようになる。

$$K_{p1}=\pi\mu\lambda^2\eta_0^2A_{p1}/\{P(Q\lambda^2\sin^2\phi+P\cos^2\phi)-\nu^2\} \quad (12)$$

$$K_{p1m}=\pi\mu\lambda^2\eta_0^2A_{p1m}/\{P(Q\lambda^2\sin^2\phi+P\cos^2\phi)-\nu^2\} \quad (13)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}P&=\eta_0\partial H_1^{(1)}(\lambda\eta_0)/\partial\eta_0/H_1^{(1)}(\lambda\eta_0)\\Q&=\eta_0\partial H_1^{(1)}(\kappa\eta_0)/\partial\eta/H_1^{(1)}(\kappa\eta_0)\\A_{p1}&=-2(\nu^2+\cos^2\phi)+(\nu^2+2\cos^2\phi)P\\&\quad+(\lambda^2\sin^2\phi-\cos^2\phi)Q+2PQ\cos^2\phi\\&\quad+\cos^2\phi(1-\cos^2\phi/\lambda^2/\sin^2\phi)(1-P^2)\\A_{p1m}&=-2\nu^2-\cos^2\phi-\cos^2\phi(\nu^2+\cos^2\phi)/\\&\quad\lambda^2/\sin^2\phi+(\nu^2+4\cos^2\phi)P\\&\quad+(\lambda^2\sin^2\phi+\cos^4\phi/\lambda^2/\sin^2\phi-2\cos^2\phi)Q\\&\quad+4PQ\cos^2\phi\\&\quad-(\cos^4\phi/\lambda^2/\sin^2\phi+\sin^2\phi)P^2Q\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$ka\to\infty$ のとき $A_{p1m}\to A_{p1}$ となる。したがって，波長と管外半径との比 L/a がかなり大きくなると m_p の影響は無視できるようになる。なお，(12)，(13)式ともに，管軸方向の見かけ上の波速 c' 及び波数 k' を用いて ϕ を含まないより簡単な形に書き直すことができる(式は省略)。

（ii） S波（$c/v_s=1$）が管軸方向（$\phi=0°$）に伝播する場合

S波が管軸方向に伝播すると仮定して3次元解析を行うと，境界条件の数が未定係数の数より多くなり，その結果管外面上での管の軸方向変位と地盤の変位とが一致するという条件を満たさなくなる。したがって，$c/v_s=1$ かつ $\phi=0°$ の場合には前項の (12)，(13) 式は使えなくなるため，新たにS波が管軸方向に伝播する場合の解析から始めて K_p を計算しなおすと，m_p を考慮しない場合，する場合について次のようになる。

$$K_{p2}=2\pi\mu(ka)^2K_1(\alpha a)/\{\alpha aK_0(\alpha a)\} \quad (15)$$

$$K_{p2m}=\pi\mu(ka)^2[3+4K_1(\alpha a)/\{\alpha aK_0(\alpha a)\}] \quad (16)$$

ここで，K_0, K_1 は第2種の変形ベッセル関数であり，$\alpha a=ka/\sqrt{2(1-\sigma)}$ である。L/a が大きい場合には

$$K_{p2m}\to 2K_{p2}\quad (L/a\to\infty) \quad (17)$$

が成り立ち，K_{p2m} は K_{p2} の2倍に等しくなる。

（iii） 横波が管軸方向に伝播する場合の2次元解

前2項で求めた解は3次元弾性論に基づくものであった。後藤ら[9]は速度 c の横波が管軸方向に伝播する場合を2次元弾性論（軸方向変位 u_z を無視）により解析している。この場合，K_p は次のようになる。

$$K_{p3}=\pi\mu q^2a^2\{4-F(pa)-F(qa)\}/\{F(pa)+F(qa)-F(pa)F(qa)\} \quad (18)$$

ここで，

$$(pa)^2=(ka/v_p)^2(c^2-v_s^2),\quad (qa)^2=(ka/v_s)^2(c^2-v_s^2)$$

であり，$F(x)$ は (11) 式で定義される。

上述のうちのいずれかの K_p を用いると管の軸直角方向の振動方程式は次のように表せる。

$$\rho' A\frac{\partial^2u_p}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4u_p}{\partial z^4}=-K_p(u_p-u_\xi\cos\phi) \quad (19)$$

ここで，u_p：管の軸直角方向変位，I：管の断面2次モーメントである。

定常振動を考えているので u_p は次のようになる。

$$u_p=U_p e^{i(k\cos\phi z-\omega t)} \tag{20}$$

（4）式中の第2式と上式を（19）式に代入して，管の軸直角方向変位振幅 U_p 及び管外面（$r=a$）での管の曲げひずみ振幅 ε_p を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}U_p/U_g&=K_p\cos\phi/(EIk^4\cos^4\phi-\rho' A\omega^2+K_p)\\&=K_{p0}\cos\phi/[(1+\sigma')(\mu'/\mu)\\&\quad\times(ka\cos\phi)^4\{1-(b/a)^4\}/2\\&\quad-(\rho'/\rho)(ka)^2\{1-(b/a)^2\}+K_{p0}]\end{aligned} \tag{21}$$

$$\varepsilon_p/(U_g/a)=-(ka)^2\cos^2\phi U_p/U_g \tag{22}$$

ここで，$K_{p0}=K_p/(2\pi\mu)$ (23)

軸方向振動の場合と同様に，L/a が小さい場合，厳密には（19）～（22）式中の U_g に補正係数 S_p を掛ける必要がある（式は省略）が，種々の条件のもとで計算した結果 S_p は前述の S_a と同様な性質を示し，実際上（19）～（22）式をそのまま使用できることが分かった。これは軸方向振動の場合と同様な結果であるが，軸直角方向の場合の方が誤差が小さいようである。

L/a が非常に大きいとき上式は次のようになる。

$$U_p/U_g\fallingdotseq\cos\phi,\quad \varepsilon_p/U_g/a\fallingdotseq-(ka)^2\cos^3\phi \tag{24}$$

したがって，曲げひずみは $\phi=0°$ のとき最大となる。

4. 縦波が入射する場合の解析

地震波のうち縦波的な運動をするものはP波及びレーレー波の部分である。本章では全無限地盤中に敷設された無限長管を想定し，管軸に対し角度ϕを成して平面定常正弦縦波が入射する場合を弾性波動論を用いて3次元的に考察した。なお，後藤ら[9]は縦波が管軸方向に伝播する場合を2次元的に解析しているが入射角の影響は考慮されていない。

入射縦波の伝播方向は，前章の横波の場合と同様に**図-1** の ζ 座標と一致するものとすると，基礎方程式及び境界条件は横波入射の場合と全く同一の式で表され，入射波の r, θ, z 方向変位成分のみが異なるだけである。

前章と同様な解析手順をたどることにより次のような結果が得られた。

（1） 軸方向の動的ばね定数は横波入射の場合と同一の式（1）もしくは（11）により表される。軸方向の管の変位振幅は（5）式中の $-U_g\sin\phi$ を $U_g\cos\phi$ で置き換えることによって得られる。管の軸ひずみ振幅は（6）式により得られる。L/a が非常に大きい場合，両者は近似的に次式で表される。

$$U_a/U_g\fallingdotseq\cos\phi,\quad \varepsilon_a/U_g/a\fallingdotseq ika\cos^2\phi \tag{25}$$

したがって，管の軸ひずみは $\phi=0°$ のとき最大となる。なお，L/a が小さい場合の補正係数は（8）式で与えられる。

（2） 軸直角方向の動的ばね定数は，横波入射の場合と同一の式（12），（13）もしくは（14）により表される。管の軸直角方向の変位振幅及び曲げひずみ振幅は，（21），（22）式中の $U_g\cos\phi$ を $U_g\sin\phi$ で置き換えることにより得られる。L/a が非常に大きい場合，両者は近似的に次式で表される。

$$U_p/U_g\fallingdotseq\sin\phi,\quad \varepsilon_p/U_g/a\fallingdotseq-(ka)^2\cos^2\phi\sin\phi \tag{26}$$

したがって，管の曲げひずみは $\phi\fallingdotseq35.3°$ のとき最大となる。なお，L/a が小さいときの補正係数は横波入射の場合と式の形が若干異なるが，横波入射の場合と同様に $L/a\geqq30$ が成り立つときには補正を施さなくても大きな誤差は生じない。

5. 動的ばね定数の計算結果及び考察

5.1 入力データ

動的ばね定数は地盤のせん断弾性係数μに比例するためμで割り無次元化すると，次の4つの無次元パラメータにより動的ばね定数の値は決定される。

$$\sigma,\ L/a,\ \phi,\ c/v_s \tag{27}$$

計算の際に用いた条件，及び各々のパラメーターの値などを列記すると次のようになる。

（i） 地盤のポアソン比σは0.1，0.3，0.495の3種類とした。0.495は飽和土を想定している。

（ii） 波長と管外半径との比 L/a は $10\leqq L/a\leqq 10\,000$，入射角ϕは $0\leqq\phi<90°$，速度比 c/v_s は $1\leqq c/v_s<10$ として計算した。$c/v_s=1$ はS波が入射する場合に相当する。

なお，$K_{a,p}$ を計算する際，$2\pi\mu$ で割って無次元化し，$K_{a0,p0}=K_{a,p}/(2\pi\mu)$ として計算した。

5.2 計算結果と考察

a）軸方向の動的ばね定数 K_a について

図-2～4 は（1），（7）式で表される K_{a0} が地盤のポアソン比 σ，速度比 c/v_s，入射角ϕによってどのように変化するかを調べたものである。計算の際に用いた σ，c/v_s，ϕ の値は図中に示した。K_{a0} は複素数であるのでその実部及び虚部を別々に示した。ただし，**図-4** には実部の計算結果のみを示した。実部は実際の動的地盤ばね定数に相当し，虚部は減衰を表すと考えられる。図の横軸は波長と管外半径との比 L/a である。これらの図より次のようなことが分かる。①K_{a0} の値はσによって余り変化せず，特に L/a が大きくなるとほぼ同一の値となる。②K_{a0} は c/v_s が大ほど大きくなることが分かる。これは，波速が大きいということは波長が一定のとき周期Tが小さいことを意味し，したがって地盤の慣性

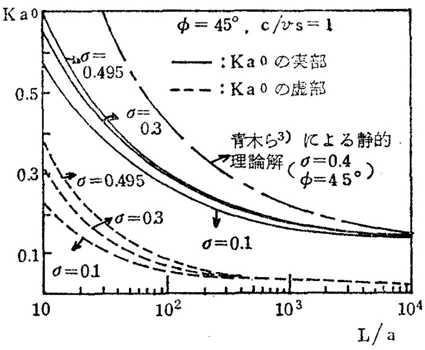


図-2 地盤のポアソン比 σ と K_{a0} との関係

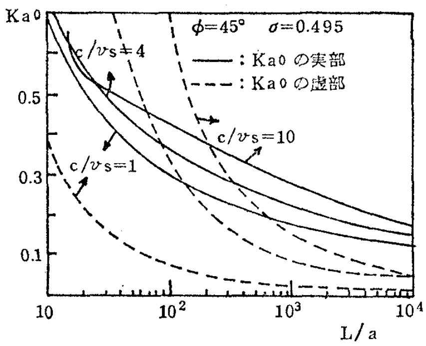


図-3 波速 C と K_{a0} との関係

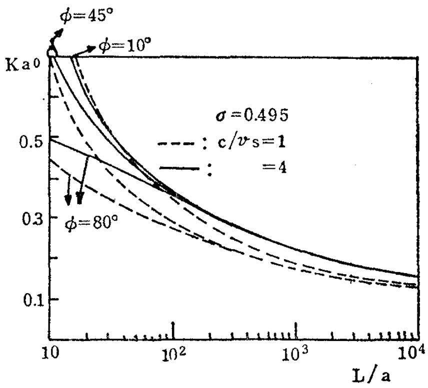


図-4 入射角 ϕ と K_{a0} の実部との関係

力が大となり地盤からの拘束が大きくなることによるものと思われる。③K_{a0} は L/a の単調減少関数であり L/a が大になるほどその傾斜はゆるやかになる。④通常の地震波では L/a の値はかなり大きくなると思われるが，そのような場合には実部が虚部より大きく，その傾向は L/a が大ほど顕著になる。⑤K_{a0} の実部はϕが小さいほど大きくなるが，L/a が大きくなるとϕによって余り変化せずほぼ同一の値になる。なお，虚部も同様な傾向を示す。

次に，青木ら[3]，桜井[1]，北出ら[2]，及び宮島ら[4]の文献中に示されている軸方向の地盤ばね定数の実測値や静的理論解と比較し考察を行う。

青木ら[3]は，管を無限弾性体内の円形断面のはりと考え，地盤全体が管軸方向に静的に正弦的な変形 $U\sin 2\pi z/L$ を受けている場合の地盤と管との相互作用を解析し，地盤ばね定数の静的理論解 K' を求め次式を得ている。

$$\frac{K'}{2\pi\mu}=\frac{xK_1(x)}{K_0(x)},\quad x=\frac{v_p}{v_s}\frac{2\pi}{L}a \tag{28}$$

青木らの実験データに基づき，$\sigma=0.4$ として (28) 式を計算した結果を図-2に一点鎖線で示した。ただし (28) 式を計算するにあたって L のかわりに管軸方向の見かけ上の波長 $L/\cos\phi$ を用いた。この図より，K' の方が K_a よりやや大きめの値を与えるが極端な違いはないことが分かる。K' は比較的簡単に導出することができ式の形も簡潔であるため K_a のかわりに使える場合もあろう。

桜井は[1]，外径約 140 mm の鋼管に対する振動実験より軸方向のばね係数の値として約 70 kg/cm² を得ている。地盤の諸定数はおおよそ $\sigma=0.4$, $\rho=1.5\,\mathrm{g/cm^3}$, $v_s=100\,\mathrm{m/s}$ であるのでこの値を $2\pi\mu$ で割って無次元化すると 0.073 となる。桜井の観測での地震波の卓越周期を 0.3 s，波速を 100～600 m/s と仮定すると $L/a≒400$～2 600 となる。これに対応する K_{a0} の実部は図-2[注1)]より 0.20[注2)]であり実測値と理論値との比をとると 0.37 となる。また桜井は，外径 216 mm の鋼管に対する静的実験より 40～100 kg/cm² という値を得ている。同様な計算を進めると，実測値と理論値との比は 0.19～0.48 (平均では 0.33) となる。管は地表面近くに埋設されているため，ばね定数は全無限地盤と仮定した場合より幾分低減されると思われるので，理論解と実測値との対応は傾向的には間違っていない。

北出ら[2]は起振機により入射波を発生させて鋼管 (外径約 360 mm) を振動させ，図-5 中の実線で示されるような結果を得ている。破線は理論解である。実験より得られたばね係数は 2.5 Hz 付近を除いて理論解と相当異なることが分かる。これは実験値からばね係数を算定する際の仮定などに問題があるためではないかと思われるが詳細は不明である。なお，北出らは静的な実験より軸方向のばね係数として 100～700 kg/cm² 程度の値を得ている。動的な理論値は，周波数を 1～5 Hz とすると 630～840 kg/cm² ($K_{a0}=0.18$～0.24) となるので，両者の比は 0.12～1.11 となり動的な実験結果よりも理論解に近い。

宮島ら[4]は，深さ 1.8 m の砂層中 (N値$=2$ もしくは 2～3) に埋設された種々の径 (4.86～150 cm) の鋼管を引き抜くことにより軸方向の地盤ばね定数と管径との関係を求め，すべりが生じない場合 (管と地盤の相対変位

注 1) 図-2 は入射角 $\phi=45°$ の場合であるが，図-3 より K_{a0} はϕによって余り変化しないことが分かっているので特に問題はないであろう。

注 2) 波速を 100 m/s とした場合には $c/v_s=1$ となり，図-2より $L/a=400$ での K_{a0} の実部は 0.20 となる。波速を 600 m/s とした場合には $c/v_s=6$ となり，図-3 で $L/a=2600$ での K_{a0} の値をとると約 0.20 が得られる。

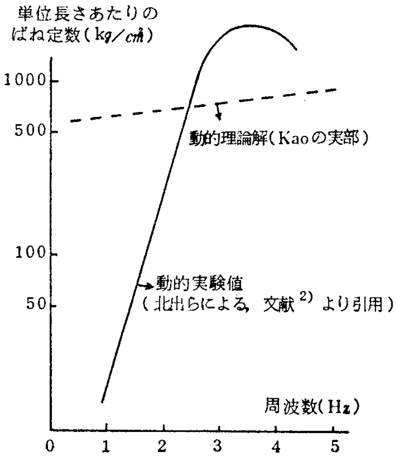


図-5 軸方向の動的ばね定数に関する実験値(北出らによる)と理論解との比較

$\delta'=0.1\mathrm{mm}$) の実験式として

$$K(\mathrm{kg/cm^3})=11.3D^{-0.44}$$

を得ている。ここで，D は管直径 (cm)，K は単位面積当たりのばね定数である。上式を単位長さ当たりに換算し $2\pi\mu$ で割り無次元化すると K_{a0} に対応する式として

$$DK/(2\mu)=5.65D^{0.56}/\mu$$

を得る。N 値から μ を求めるために，文献 8)，pp. 195 中の図（この図を用いてN値からμの正確な値を得ることには問題があるためμの値は概略的なものと考えるべきである）を用いると $\mu≒200\,\mathrm{kg/cm^2}$ を得る。これを用いて上式に $D=5$，150 cm を代入し理論値 ($K_{a0}≒0.2$) との比をとると，各々 0.35，2.34 となり実験式による値は，管径が小さいときは理論値より小さく，管径が大きくなると理論値より大となる傾向を示す。この理由として，管径が小さいほどすべりが生じ始めるときの相対変位量が小さくなるため，$D=5\mathrm{cm}$ の場合 $\delta'=0.1\mathrm{mm}$ でも既にすべりが生じ始めている可能性があること〔文献4）の 図-4 参照。したがってばね定数は小さく計算される〕，管径が大きくなると砂槽底面からの拘束が大きくなること（したがってばね定数は大きめに得られる），などが挙げられる。

b）軸直角方向の動的ばね定数 K_p について

図-6～**図-8** は (12) 式で与えられる K_{p1} を $2\pi\mu$ で割って無次元化した K_{p10} が σ，c/v_s，ϕ によってどのように変化するかを示したものである。計算の際に用いた σ，c/v_s，ϕ の値は図中に示した。これらの図より，L/a が約 100 以上では，実部の方が虚部より大きいこと，σ，c/v_s が大きくなると K_{p10} も大となること，ϕ が大きくなると実部は大きくなるが虚部は必ずしもそうならないことが分かる。L/a が 100 以下では，K_{p10} の虚部は急激に大きくなるが実部は急激に小さくなる場合があることが分かる。一般に，K_{p1} の方が K_a よりも σ，c/v_s，ϕ の変化の影響を受けやすいようである。

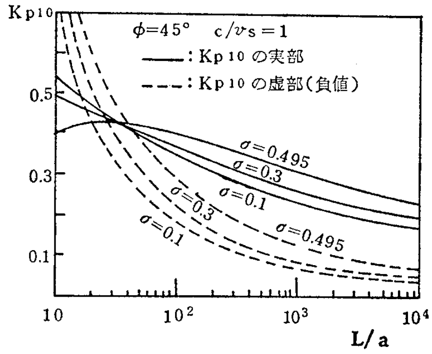


図-6 地盤のポアソン比 σ と K_{p10} との関係

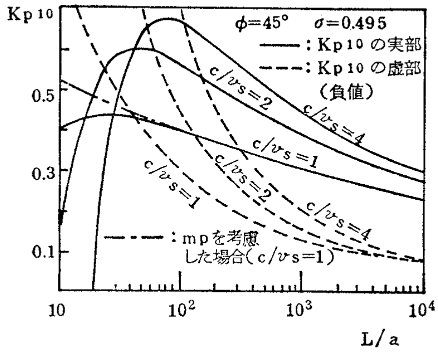


図-7 波速 C と K_{p10} との関係

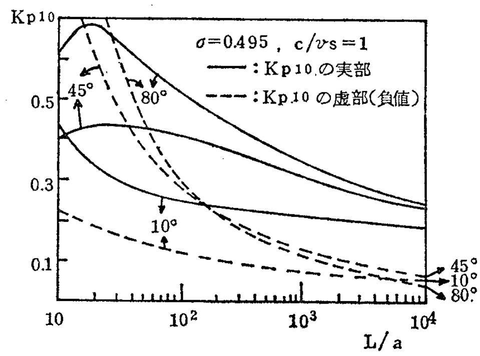


図-8 入射角 ϕ と K_{p10} との関係

m_p を考慮する場合の軸直角方向のばね定数 K_{p1m} について同様な計算を行ったところ，**図-6**～**図-8** と同様な傾向をもつ曲線が得られ，特に $L/a>100$ では m_p を考慮しない場合とほぼ完全に一致することが分かった。m_p を考慮する場合の一例を **図-7** 中に一点鎖線で示した。

S波 ($c/v_s=1$) が管軸方向 ($\phi=0°$) に伝播する場合の K_p は，m_p を考慮しない場合には $K_{p2}=$(15) 式，考慮する場合には $K_{p2m}=$(16) 式で表される。ただし，いずれも実数である。**図-9** に両式で表される K_p と σ との関係を示す。ただし，ばね定数は $2\pi\mu$ で割って無次元化し各々 K_{p20}，K_{p2m0} と表した。この図より，m_p を考慮する場合の方が値が約2倍大きくなること，及び σ が大ほどばね定数は小さくなることが分かる。この場合の σ との関係は本研究でこれまでに求めてきた動的ばね定数（軸方向も含めて）の場合や埋設管以外の例とし

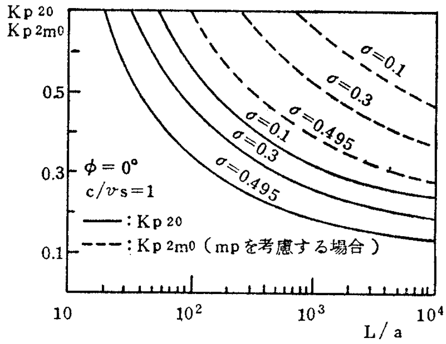


図-9 σ と K_{p20}, K_{p2m0}（S波が管軸方向に伝播する場合の K_{p0}）との比較

てフーチング基礎の鉛直振動に対する動的ばね係数の場合[7]と全く逆の傾向を示す。このことは 3.2 の（ii）で述べたように管外面上での軸方向の境界条件を満足していないことと関連があるかもしれないが詳しい理由は不明である。いずれにせよ (15), (16) 式を K_p の理論解として用いることはあまり合理的ではない。

2次元弾性波動論に基づいて導いた K_p は K_{p3}=(18) 式で与えられる。図-10 に K_{p3} と σ との関係を示す。図中の曲線は3次元解 K_{p10}（図-6 参照）と同様な傾向を示すため, 図-6～図-8 と同一の条件のもとで2次元解 K_{p30} と3次元解 K_{p10} を計算し比較したのが 図-11～図-13 である。ただし実部のみを示した。これらの図より，一般に2次元解の方が3次元解よりも大きくその比は1.5以下であること，L/a が大きくなると両者は一致するようになることが分かる。図-14 はS波が管軸方向に伝播する場合の3次元解 K_{p2}（m_p を考慮しない (15) 式で表せるもの）と2次元解 K_{p3} とを種々の σ の値のもとで比較したものである。2次元解は $c/v_s=1.01$注3) として計算しその複素絶対値をとった。両者の σ との関係は全く逆であるが，L/a が大きいときには両者の違いは50% 以下であり，特に $\sigma=0.3$～0.495 では比較的一致する。

次に，青木ら[3]，桜井[1]及び北出ら[2]の実験において得られている軸直角方向のばね係数と比較し考察を行う。

青木ら[3]は外径 63cm の塩ビパイプの静的荷重試験より単位面積当たりの軸直角方向ばね定数として 2.2kg/cm³ を得ている。これを単位長さ当たりに換算し $2\pi\mu$ で割り無次元化すると 0.069 となる。概略的な比較を行うために 図-8 中の $c/v_s=1$, $\phi=10°$注5) のときの曲線を用いれば，L/a を 100～1 000 と仮定すると K_{p10} の実部は 0.26～0.21 となり，実測と理論との比は 0.26～0.33 となる。また $\phi=45°$ のときの曲線を用いると，この比は 0.17～0.25 となる。

桜井[1]は埋設鋼管（外径約 216mm）の軸直角方向起振実験より管路単位長さ当たり 19～44kg/cm² のばね定

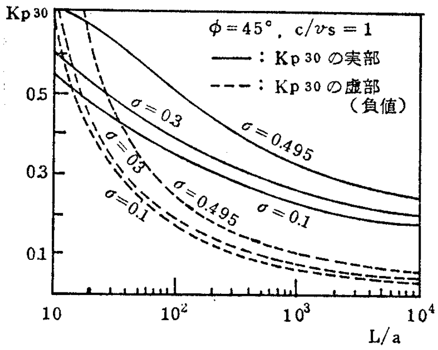


図-10 2次元解 K_{p30} と σ との関係

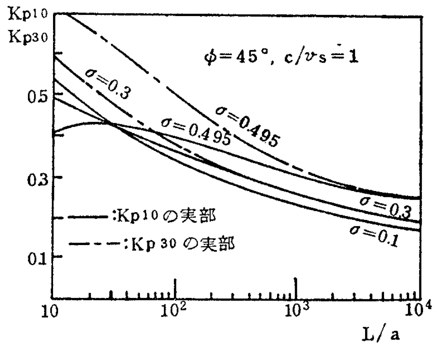


図-11 3次元解 K_{p10} と2次元解 K_{p30} との比較（σ を変化させた場合）

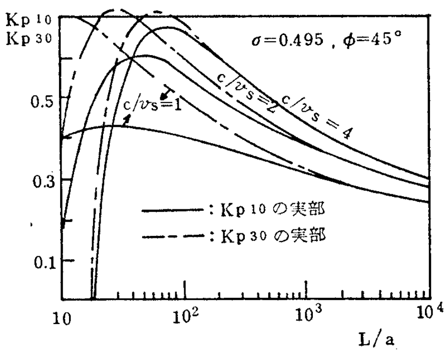


図-12 3次元解 K_{p10} と2次元解 K_{p30} との比較（c/v_s を変化させた場合）

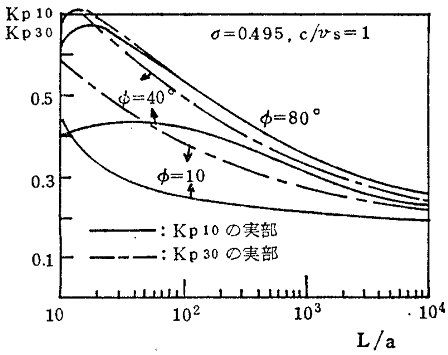


図-13 3次元解 K_{p10} と2次元解 K_{p30} との比較（ϕを変化させた場合）

注 3) $c/v_s \to 1$ のとき K_{p3} は0に収束するので $c/v_s=1.01$ としてS波が管軸方向に入射する場合を近似した。c/v_s の値をどの程度にとってS波を近似するかは目的に応じて異なるであろうが，3次元解 K_{p2} とうまく対応させるためには 1.01 ぐらいが適当であろう。

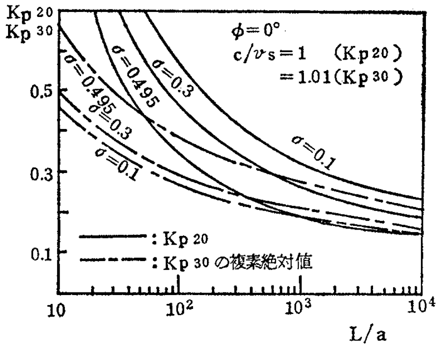


図-14　3次元解 K_{p20} と2次元解 K_{p30} との比較（S波が管軸方向に伝播する場合）

数値を得ており無次元化すると 0.020～0.045 となる。桜井の観測での地震波の卓越周期を 0.3 秒，波速を 100～600 m/s と仮定すると L/a≒300～1700 となり，これに対応する K_{p10} の実部は図-8 中の $\phi=10°$注5) の曲線を利用すると 0.23～0.31注4) となる。実測と理論との比を求めると 0.06～0.20 となり，実測値の方がかなり小さくなる。

北出ら[2]は起振機による軸直角方向振動実験より単位長さ当たりのばね定数値として 0.1～10 kg/cm²(周波数は 3～5 Hz) を得ている。S波が入射するものとすれば周波数 3～5 Hz は L/a=310～180 に相当するゆえ，図-8 中の $\phi=10°$注5) の曲線を利用すると K_{p10} は 0.23 となる。したがって理論値は 800 kg/cm² となり実測値とはオーダーが異なる。これは実験値からばね係数を算定する際の仮定などに問題があるためではないかと思われる。なお北出らは静的な実験より軸直角方向のばね係数として 70～700 kg/cm² 程度の値を得ており理論との比をとると 0.09～0.88 となりばらつきはあるが理論解に比較的近い。

c）まとめ

a），b）で行った他の文献の実測値との比較結果を簡単にまとめておく。ただし，北出らの動的実測結果には問題があるようなので対象外とした。

実測と理論との比は軸方向ばね定数の場合 0.12～2.34，軸直角方向ばね定数の場合 0.06～0.88 の範囲内に入った。平均的にみれば，実測値の方が理論値よりも小さく，このことは軸直角方向の方が顕著である。地表面の存在により理論ばね定数は低減されること，及び実験からばね定数を決定する場合，小さめに見積もられる可能性があることなど注6) を考慮すると，理論と実測との間に（ばらつきはあるが平均的にみれば）それほど大きな差違はないものと思われる。ただし，動的な理論解と静的実測値が等しくなければならない理由はどこにもない。なお地表面の存在による理論ばね定数の低減効果に関して次節で簡単な説明を行う。

本研究で求めた動的地盤ばね定数は単位長さ当たりのものであり，この値は一般に a には比例せず，かつ L/a が大きくなると L/a に対して大きな変化を示さないようになる。したがって，例えば a が2倍，3倍と変化しても単位管長当たりの動的 K 値はほぼ一定とみなし得る。このことから，ある管径をもつ管の地盤ばね定数を求めた場合，その値を単位面積当たりに換算し，一定値として異なった径をもつ管に適用する方法は地盤ばね定数の正しい値を与えない。

5.3　動的ばね定数に対する埋設深の影響

著者の一人は，地中埋設管に対する動的地盤ばね定数の大きさと埋設深との関係を調べるために，半無限均一弾性地盤中に敷設された埋設管に対する軸方向のばね定数を波動論的手法に基づいて導出し，種々の条件のもとで数値計算を行っている[5]。その結果，管上端と地表面との距離が管径より大きい場合には，全無限地盤を仮定して得た軸方向ばね係数のほぼ 0.3～1.3 倍となり，埋設深が浅い場合にはばね係数はかなり低減されることが分かった。本研究で求めた動的理論解にこの影響を考慮すれば前節で調べられた実測結果との違いはより小さくなる。以上は軸方向のばね定数に関することであるが，軸直角方向に対しても一つの目安となろう。詳細は文献5)を参照されたい。

6.　地盤ばね定数の大きさが管の応答ひずみに与える影響

前章での考察より，地盤ばね定数の実測値は動的理論値よりも小さくなる傾向を示した。本章では，実測ばね定数を用いる場合と理論ばね定数を用いる場合とで管内に生じるひずみがどの程度異なるかを調べるために，ばね定数の大きさを種々変えて管の応答ひずみを計算し検討を加えた。また，本研究で導出した理論解からばね定数を決定する方法を簡単に説明した。

6.1　軸方向について

著者の一人は，文献 6）で，ばね定数の大きさの変化

注 4）$c=600$ m/s すなわち $c/v_s=6$ のときの K_{p10} の値は図-7 を利用しておおよその値を求めた。

注 5）$c/v_s=1$，$\phi=10°$ のときの曲線を用いたのは，S波が管軸方向に伝播する場合に管の曲げひずみは最大になるのでこのような場合を近似するためである。この曲線は，$\phi=0°$，$c/v_s=1.01$ のときの曲線とほぼ一致する。図-13 から分かるように $\phi=80°$ のときの K_{p10} は $\phi=10°$ の場合の約2倍となるが，$\phi=80°$ のとき管内に生じる曲げひずみは $\phi=10°$ の場合に比して非常に小さくなるためそのような場合の K_{p10} と実測値とを比較しても余り意味はないことになる。ただし，実測値が $\phi=10°$，$c/v_s=1$ の場合の K_{p10} の値に一致しなければならないという理由はどこにもないので，c/v_s 及び ϕ の値のとり方によっては理論値と実測値との比は2倍程度異なる場合があるということを念頭に入れておく必要がある。

注 6）理論に従えば軸直角方向の管の曲げ試験において管壁と地盤との間に引張りが生じるが，現実には地盤からの引張り力は小さいと思われ，ばね定数もこの分小さくなるであろう。

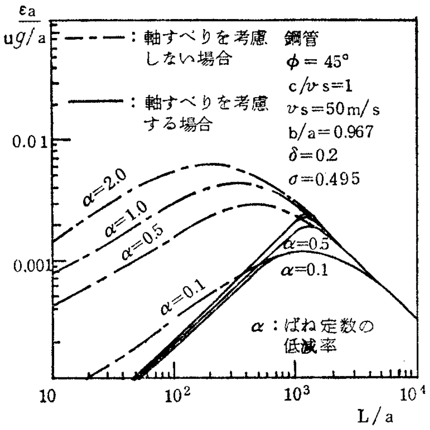


図-15　軸ひずみとばね定数の低減率との関係

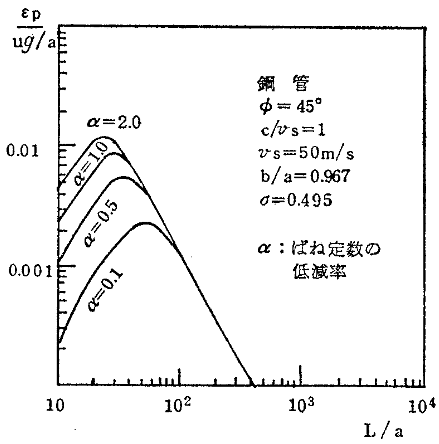


図-16　曲げひずみとばね定数の低減率との関係

は管の軸方向すべりを考慮しない場合には管の軸ひずみの計算値に対して大きな影響を与えるが，軸方向すべりが生じる場合にはほとんど影響しないことを示している。このことを例によって示したのが図-15である。この図で，一点鎖線は軸すべりを考慮しない場合のもので(5)，(6)式を用いて計算したものである。実線は軸すべりを考慮する場合のもので文献 6) 中の (50)，(52) 式により計算した。また，地盤ばね定数は（1）式で表される K_a を 0.1，0.5，1.0，2.0倍して用いた。入力データは図中に示したほか，地盤の密度 $\rho=1.8\,g/cm^3$，埋設深＝2m，$U_g=5\,cm$，$a=30\,cm$ とした。図-15より，軸すべりを考慮しない場合にはばね定数が小さくなると管軸ひずみも小さくなるが，軸すべりが生じる場合にはばね定数の低減率が非常に小さい場合 (0.1) を除いてほとんど影響を受けないことが分かる。このことから，軸すべりが生じないような小さな地震に対する管の応答計算に当たってはばね定数の値を正確に見積る必要があること，及び軸方向すべりが生じるような大きな地震に対しては，ばね定数を決める際にそれほど神経質になる必要はないこと，したがってばね定数として静的な実測値を用いても動的な理論値を用いても両者の比が非常に小さい場合を除けばほぼ同一の応答軸ひずみ値を与えることが分かる。なお，波長と管径との比が非常に大きい場合には入射波の変位振幅がかなり大きくても軸すべりは生じないが，このとき管は地盤とほぼ同一に動くためばね定数の大きさが変化してもほとんど影響を受けない。

(1)式を用いて，動的ばね係数 K_a を決めるための簡便な方法を説明する。地震波の卓越周期 T，地盤の定数 ρ 及び v_s，管外半径は与えられているものとする。K_a は σ，ϕ，c/v_s によって余り変化しないので，例えば $\sigma=0.4$，$\phi=45°$，$c/v_s=1$ とおけば K_a の値が計算できる。K_a は $\mu(=\rho v_s^2)$ に比例するので K_a の値を決める際に大きな影響を与えるのは ρ，v_s であり，他の定数は多少変化してもほとんど関係しない。埋設深が浅い場合には低減係数を掛ける必要があり，この値は，管上端と地表面との距離が管径に等しい場合，概略0.5というのが目安である[5]。

6.2　軸直角方向について

図-16は (21)，(22) 式より計算した管の曲げひずみを L/a に関して図示したものである。軸直角方向のばね定数として，(12) 式で表される K_{p1} を 0.1，0.5，1.0，2.0 倍して用いた。入力データは，前節と同一である。この図より，ばね定数の変化が管の曲げひずみ値に大きな影響を与えるのは L/a が小さな範囲のみであり，通常の地震波ではほとんど問題にならないことが分かる。また，埋設管の地震時挙動の観測結果より，直管部では軸ひずみが曲げひずみに比し卓越することが知られており，曲げひずみの大きさはそれほど問題にはならないこと，したがって軸直角方向のばね係数を決める際に神経質になる必要はないことが分かる。

実際に軸直角方向のばね係数の値を求めるには (12) 式か (18) 式を用いればよい。計算に際しての入力データは前節の K_a の場合と同様であるが K_p は σ，ϕ，c/v_s によってかなり変化するのでその決め方によって値がかなり異なる。実測値との対応を考えると，例えば $\sigma=0.4$，$\phi=0°$，$c/v_s=1.01$ とすればよいであろう（実測値との対応を更に良くするためにはこのようにして得られた値を約 1/2 にすればよい)。なお，埋設深の影響に関しては軸方向の場合と同様に取り扱えばよいであろう。

7.　結　　　論

（1） 入射波が縦波・横波いずれの場合でも，波長と管外半径との比 L/a が大きい場合には，入射波の変位を管軸方向・軸直角方向の2成分に分け，各成分ごとに独立に管の運動を弾性床上のはりの振動方程式により表せる。

（2） 軸直角方向の動的ばね定数は解析上の仮定（2次元であるか3次元であるか，S波が軸方向に伝播するかどうか）により式の形が異なるが，軸方向の動的ばね定数はそれらに無関係に同一の式で表される。これらの動的ばね定数は波速，波長，管径，地盤のせん断弾性係数・S波速度・ポアソン比の関数となる。

（3） 動的地盤ばね定数は一般に a には比例せず，かつ L/a が大きくなると L/a に対して大きな変化を示さないようになる。したがって，ある管径をもつ管の地盤ばね定数を求めた場合，その値を単位面積当たりに換算し，一定値として異なった径をもつ管に適用する方法は地盤ばね定数の正しい値を与えない。

（4） 地盤ばね定数に関する実験値（他の文献による）と動的理論値（本研究による）との比は，軸方向の場合 0.12～2.34，軸直角方向の場合 0.06～0.88 となった。平均的にみれば実測値の方が小さくなり，このことは軸直角方向の方が顕著である。地表面の存在により理論ばね定数は低減されること，及び実験よりばね定数を決定する際小さめに見積もられる可能性があることを考慮すると，理論と実測の差違はこれより小さくなろう。

（5） 軸方向のばね定数の変化は軸すべりを考慮しない場合には管の軸ひずみに対して大きな影響を与えるが，軸すべりが生じる場合には2倍程度変化してもほとんど影響しない。軸直角方向のばね定数については，その変化が管の曲げひずみに及ぼす影響は通常の地震波では問題とならないこと，及び地震時には軸ひずみが卓越することから，その値の決定に際して神経質になる必要はない。

以上の結論は長い直管部に対するものであり，特に（5）は，継手，分岐部及び曲管部付近の管には適用できない可能性があり今後の課題として残される。

最後に，貴重な実験データを借用させていただいた各文献の著者に深謝の意を表する次第である。

〔補遺〕宮本ら[12]は，原地盤での直接加振実験から動的地盤反力係数の実験値を求めている。計算結果のみ示すと，実験値と理論値との比は，軸方向は 0.34～0.51，軸直角方向は 0.26～0.43 となり，他の例と同様に理論の方が実測よりも大きくなった。これらの比の値は，文献 5）の方法により土かぶりを考慮して計算すると割合うまく説明できた。

記 号 説 明

a, b＝管外半径，管内半径
A, E, I＝管実断面積，ヤング率，断面二次モーメント
c, c'＝波速，見かけ上の波速（$=c/\cos\phi$）
f_a＝管単位長当たりに作用する軸方向力
$H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$＝第1種ハンケル関数
J_0, J_1＝ベッセル関数
k, k'＝波数，見かけ上の波数（$=k\cos\phi$）
K_0, K_1＝第2種変形ベッセル関数
K_a, K_p＝軸方向，軸直角方向の動的地盤反力係数
$K_{a0}, K_{p0}=K_a/(2\pi\mu)$，$K_p/(2\pi\mu)$
K_{p1}, K_{p1m}, K_{p2}, K_{p2m}, K_{p3}＝軸直角方向の動的地盤反力係数
L, T＝波長，周期
m_p＝管外壁上に作用する τ_{rz} による曲げモーメント
r, θ, z＝座標
S_a, S_p＝軸方向，軸直角方向補正係数
$u_R \cdot u_\Theta \cdot u_z$, u_ξ, u_a, u_p＝地盤の $r \cdot \theta \cdot z$ 方向変位，入射波変位，管の軸方向変位，管の軸直角方向変位
U_g, U_a, U_p＝入射波変位振幅，管の軸方向変位振幅，管の軸直角方向変位振幅
v_s, v_p＝S波速度，P波速度
β, $\nu=v_p/v_s$，c/v_s
δ, δ'＝管地盤間の摩擦係数，管地盤間の相対変位
ε_a, ε_p＝管の軸ひずみ振幅，曲げひずみ振幅
η, $\eta_0=kr\sin\phi$，$ka\sin\phi$
σ, λ_L, μ, ρ＝地盤のポアソン比，ラメ定数，せん断弾性係数，密度
σ', μ', ρ'＝管材料のポアソン比，せん断弾性係数，密度
$\kappa^2=(\nu^2-\beta^2\cos^2\phi)/(\beta^2\sin^2\phi)$
$\lambda^2=(\nu^2-\cos^2\phi)/\sin^2\phi$
τ_{rz}＝地盤内のせん断応力成分
ϕ＝入射波の伝播方向と管軸方向との成す角
ω＝角振動数

参 考 文 献

1） 桜井彰雄（1971）：「地盤の震動解析に基づく埋設パイプラインの耐震性の研究」.
2） 北出浩三・白木万博・福沢　清（1974）：地中埋設管の耐震強度，「三菱重工技報」，Vol. 11，No. 4，pp. 490～506.
3） 青木義典・土田　肇・林　聰（1972）：沈埋トンネルの野外模型振動実験，「港湾技術研究所報」，Vol. 11，No. 3，pp. 261～307.
4） 宮島信雄・宮内二郎・青野雄司（1977）：埋設管軸方向バネ定数に及ぼす管径の影響，「第 12 回土質工学研究発表会」，pp. 1197～1200.
5） 鵜飼恵三（1978）：半無限弾性地盤中の地中埋設管に対する動的地盤反力係数の計算，「新潟大学工学部研究報告」，第27号，pp. 121～125.
6） 鵜飼恵三（1978）：軸方向すべりを考慮した場合の地中埋設管の震動応答解析，「土木学会論文報告集」，No. 272，pp. 27～37.
7） F.E. リチャート Jr，J.R. ホール Jr，R.D. ウッズ（1975）：「土と基礎の振動」，鹿島出版会，pp. 78～96，pp. 217.
8） 石原研而（1976）：「土質動力学の基礎」，鹿島出版会.
9） 後藤尚男・土岐憲三・高田至郎（1972）：地中埋設管の動特性について，「第12回地震工学研究発表会」，pp. 103～106.
10） 宮島信雄・宮内二郎・上野和栄（1975）：埋設導管の地震時応力，「第4回日本地震工学シンポジウム」，pp. 662～669.
11） 鵜飼恵三・松野操平・若林正彦（1976）：斜め方向より入射する平面せん断波に対する地中埋設管の動的応答特性，「第 14 回地震工学研究発表会」，pp. 181～184.
12） 宮本幸始・鈴木英世・横山正義（1978）：埋設管路の振動特性，「第 33 回土木学術講演会第Ⅰ部」，pp. 476～477.

（原稿受付，1978. 5. 15）