土質工学会論文報告集
Vol. 20, No. 3, Sept. 1980

研究ノート

粒状体の粒子モデルと仮想仕事の原理

(Particulate Description and the Principle of Virtual Work for Granular Materials)

金谷健一* (Ken-ichi Kanatani)

キーワーズ：応力／間隙比／降伏／すべり面／変形／摩擦／粒状体
IGC： D 6/D 3

1. まえがき

砂のような粒状体の巨視的特性を理論的に解明するために，剛体粒子の集合を考え，粒子間の力や変位を微視的に考察し，統計的推論によって巨視的特性に結びつけようとする研究は，古くは Reynolds に始まり，Newland & Allely, Rowe, Horn, 村山, 松岡, 小田, 小西, 徳江らによって精力的に進められている。これらの研究の総括は龍岡，松岡，小田らの解説[1)~3)]にまとめられている。しかし，粒子間の力や変形をどのように巨視的特性に結びつけるかに関しては研究者ごとにさまざまな説が提出されており，それらの中には特定の変形（例えば二次元変形，あるいは特定のすべり面の仮定）や特定の座標系にのみ成立する議論も多い。いうまでもなく，物質の力学的特性は座標系のとり方に不変な三次元テンソル関係式によって記述しなければならない。そこで本報告では従来の研究にみられる問題点を指摘し，微視的考察と巨視的特性とを結びつける仮想仕事の原理を基礎として，テンソル関係式による一般的記述を行い，粒子モデルによる考察の見通しをよくすることを試みる。そして，従来の研究にいくつかの問題点のあることを指摘する。

2. 粒子間力と巨視的応力

粒状体のモデルとして剛体球の集合を考える。これらの粒子は互の接触点における粒子間力によって釣合いの状態にある。このような離散的な構造に対して応力という連続体力学の概念をどのように定義すればよいのであろうか。従来の議論では**図-1** のように，ある平面を考えて，粒子をその重心の位置によって二種類に分類し，その二種類を区切るでこぼこの曲面を考え，その面上の接触点力をその面上で平均したものを，最初に考えた平面に関する面力と定義するという立場をとっていることが多い（例えば橋口[4)]）。しかし，このように定義したとき，異なる方向の面に関する面力の間には応力の満たすべきテンソル変換則が成り立つのであろうか。また，特定の面に関して平均をとるとすれば，その面上の粒子の統計的性質（面上の接触点の平均密度，接触力の分布，その他）を知らねばならないが，通常，我々が知り得る量はすべて体積平均の意味をもっている（例えば間隙率，配位数，粒径分布）。体積平均と面平均とは等しいのであろうか。**図-1** のような考えに固執する限り，このような疑問には何ひとつ答えることができない。著者は既に，粒状体の統計モデルに関しては体積平均を基礎とすべきであることを指摘しているが[5)]，この考えをまず応力に適用してみよう。

まず，長尾[6)~8)]にならい，全体の粒子を代表させる粒子を考える。その代表的粒子は平均半径 a をもち，その粒子の接触点，接触力は全粒子にわたって平均した分布をしているものとする。すなわち，**図-2** のように粒子の中心を始点とする単位ベクトル n_i の方向の微小立体角 $d\Omega$ 中の平均接触点数が $D(\boldsymbol{n})d\Omega$，平均接触力が $f_i(\boldsymbol{n})D(\boldsymbol{n})d\Omega$ であるように，接触点密度 $D(\boldsymbol{n})$ と接触力

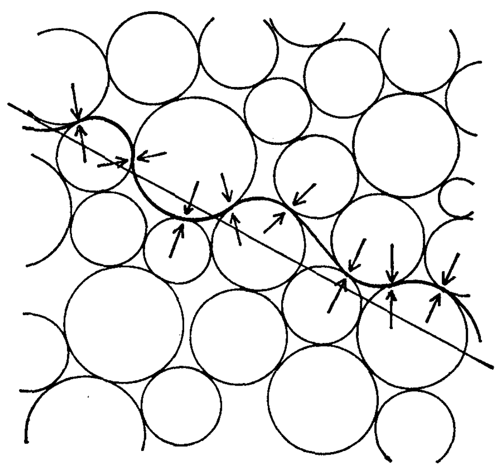

図-1 粒状体の巨視的応力を説明する従来の考え方

* 群馬大学工学部情報工学科　助手（桐生市天神町 1-5-1）
• この研究ノートに対するディスカッションは昭和56年7月1日までにご投稿下さい。

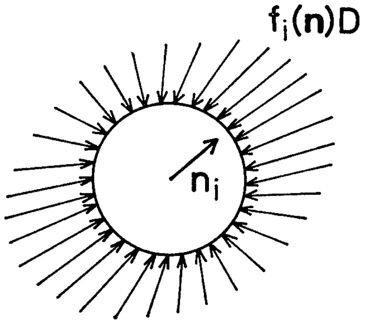

図-2 代表的粒子の接触力分布

密度 $f_i(\boldsymbol{n})D$ を定義する。以下，直交座標系に関するテンソル記法を用い，指標 $i, j, k, l, \cdots$ をもつ成分を 1, 2, 3 にわたって総和する総和記号は省略する。この粒子は釣合い状態にあるから，接触力の合力は 0 でなければならない。ゆえに

$$\oint f_i D \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (1)$$

である。また，モーメントも釣り合っていなければならないから

$$\oint f_{[i} n_{j]} D \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (2)$$

である。ただし［ ］は指標の反対称化を表す。

いま，この粒子集合全体を連続体と考えて，次のような変形を行うとする。

$$x_i' = A_{ij} x_j \qquad (3)$$

すなわち，座標が x_i であった点が変形後に式(3)で表される座標 x_i' をもつ点に移るとする。$\Delta x_i = x_i' - x_i$ とおくと

$$\Delta x_i = F_{ij} x_j, \quad F_{ij} \equiv A_{ij} - \delta_{ij} \qquad (4)$$

となる。ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタである。F_{ij} は変形テンソルとよばれ，次のように対称部分と反対称部分とに分解される。

$$\left.\begin{aligned} F_{ij} &= E_{ij} + \Omega_{ij} \\ E_{ij} &\equiv F_{(ij)}, \quad \Omega_{ij} \equiv F_{[ij]} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ただし（ ）は指標の対称化を表す。E_{ij} はひずみテンソルであり，Ω_{ij} は剛体回転を表す[9),10)]。この変形の過程において粒子がすべらず，粒子間の接触関係が不変に保たれ，かつ粒子間の接触力も変化しないとする。このような応力や力の関係を変えない変形は力学において通常，仮想変形とよばれている。この変形によって粒子は**図-3** のように球から楕円体に変化する。もちろん粒子は剛体と仮定しているのであり，このように剛体に変形を考えるのが仮想変形とよばれるゆえんでもある。このとき，先ほど考えた粒子の n_i 方向の接触点の変位は

$$\xi_i(\boldsymbol{n}) = aF_{ij} n_j \qquad (6)$$

である。この方向の接触点の接触力 $f_i(\boldsymbol{n})$ のする仮想仕事は $f_i \xi_i$ であるから，この粒子にされる仮想仕事は

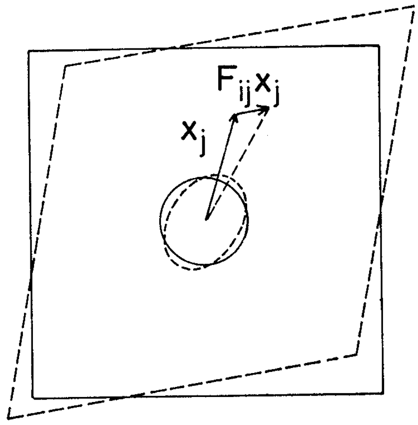

図-3 粒状体の仮想変形

$$\oint f_i \xi_i D \mathrm{d}\Omega = 4\pi a F_{ij} \overline{f_i n_j D} \qquad (7)$$

である。ただし，全立体角にわたる平均 $(4\pi)^{-1} \oint \mathrm{d}\Omega$ をバーで表した。ところがモーメントの釣合い式(2)より $\overline{f_{[i} n_{j]} D} = 0$ であり，$\overline{f_i n_j D}$ は対称テンソルである。ゆえに F_{ij} を式(5)のように分解したとき，Ω_{ij} との積は 0 となるので，上式は

$$4\pi a E_{ij} \overline{f_{(i} n_{j)} D}$$

となる。この粒子系の充てん率を γ とすると，単位体積当たり粒子が $\gamma/(4/3)\pi a^3$ 個あることになるから，単位体積当たりにされる仮想仕事 W は

$$W = \frac{3\gamma}{a^2} E_{ij} \overline{f_{(i} n_{j)} D} \qquad (8)$$

である。一方，もし巨視的な応力 σ_{ij} を定義するなら，仮想仕事 W が

$$W = \sigma_{ij} E_{ij} \qquad (9)$$

となるように与えるべきである。式(8)と式(9)とを比較して，応力 σ_{ij} はテンソル関係式

$$\sigma_{ij} = \frac{3\gamma}{a^2} \overline{f_{(i} n_{j)} D} \qquad (10)$$

で与えられることになる。これより，巨視的応力は粒子の接触点や接触力の平均的挙動，粒子半径によるのみならず，粒子集合の充てん率に比例することも分かる。このように仮想仕事の原理によれば特定の面上の統計を考えることなく，すべて体積平均の意味をもつ量のみで記述できる。その体積平均をとる領域は任意であるから，例えば一粒近傍だけの応力状態を計算することもできる（a をその粒子の半径，γ を局所充てん率，f_i, n_i をその粒子の接触力，接触方向にとればよい）。こうして粒子集合内の応力の変動を調べることもできる。また，全領域での体積平均を用いれば，全体の平均的応力状態が与えられる。このような仮想仕事の原理による考え方は著者により一部分はすでに用いられているが[11),12)]，同様な結果は佐武[13)]の試みたグラフ理論的考察からも導かれる。しかし，三次元の場合は複雑であり，また，平均

のとり方に特別の注意を払わなければならない。

3. 円柱集合の接触力と巨視的応力

円柱集合の場合の例をとりあげ，式(10)の妥当性を示そう。ただし，二次元の場合はバーを $(4\pi)^{-1}\oint d\Omega$ ではなく $(2\pi)^{-1}\oint d\theta$ (円周にわたる平均) と定義するべきであり，単位面積中の円柱の数は $\gamma/\pi a^2$ であるから式(10)は

$$\sigma_{ij}=\frac{2\gamma}{a}\overline{f_{(i}n_{j)}D} \tag{11}$$

と修正される。まず **図-4** のように規則的な配列の場合を考える。二種類の接触力を垂直成分，接線成分に分けて **図-4** のようにそれぞれ ν_1, τ, ν_2, τ とおく。接線成分の大きさを等しく τ とおくのはモーメントの釣合い条件式(2)を満たすべきだからである。このようにおくと，力の釣合い条件式(1)も満たされている。充てん率 γ は明らかに

$$\gamma=\frac{\pi}{4\sin(\beta-\alpha)} \tag{12}$$

で与えられる。式(11)へ代入して計算すれば，バーはこの場合 (4接触点に関する和)$/2\pi$ であるから，結局次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\frac{1}{2a}\left[\tau\cos(\beta+\alpha)-\frac{\nu_1\cos^2\alpha+\nu_2\cos^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right]\\
\sigma_{yy}&=\frac{1}{2a}\left[-\tau\cos(\beta+\alpha)-\frac{\nu_1\sin^2\alpha+\nu_2\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right]\\
\sigma_{xy}&=\frac{1}{2a}\left[\tau\sin(\beta+\alpha)-\frac{\nu_1\cos\alpha\sin\alpha+\nu_2\cos\beta\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

この結果を求めるのに，x 軸，y 軸に平行な面で切って，円柱を二種類に分ける曲面を考え，接触力を平均する方法を実行するのは極めて困難である。式(13)が正しい応力を与えていることは次のようにしても確かめられる。

図-4 に示した断面 A-B を考えると，この面の上側が下側に作用する力は ν_2, τ のみである。Q 点での接触力を F_i とすれば

$$\left.\begin{aligned}
F_x&=\tau\sin\beta-\nu_2\cos\beta\\
F_y&=-\tau\cos\beta-\nu_2\sin\beta
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

である。この接点は断面 A-B に対して間隔 $2a$ で並んでいるから，単位長さ当たりの力は $(F_x/2a,\ F_y/2a)$ である。一方，応力状態は式(13)であり，断面 A-B は単位法線ベクトル $(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ をもっているから，式(13)が正しければ，応力テンソルの定義により

$$\begin{bmatrix}F_x/2a\\F_y/2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx}&\sigma_{xy}\\\sigma_{yx}&\sigma_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{bmatrix} \tag{15}$$

が成り立つはずである。実際に式(13)，式(14)を代入してみればこれが成立していることが容易に確かめられる。これによって，式(13)が従来の意味においても正しい応力を与えていることが分かる。なお **図-4** の場合は接触力がいわゆる静定であり，巨視的応力の成分 σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yz} を与えれば，接触力 τ, ν_1, ν_2 は式(13)を解いて決定することができる。

次に **図-5** のような密充てんの場合を考える。充てん率は

$$\gamma=\sqrt{3}\,\pi/6 \tag{16}$$

である。式(11)へ代入すると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\frac{1}{4a}\left[(\tau_--\tau_+)-\frac{1}{\sqrt{3}}(4\nu_0+\nu_++\nu_-)\right]\\
\sigma_{yy}&=\frac{1}{4a}\left[(\tau_+-\tau_-)-\sqrt{3}(\nu_++\nu_-)\right]\\
\sigma_{xy}&=\frac{1}{4a}\left[-\sqrt{3}(\tau_++\tau_-)-(\nu_+-\nu_-)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ただし，この場合には σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} を与えても4つの接触力成分 τ_+, τ_-, ν_0, ν_+, ν_- を一意的に定めることはできない。すなわち不静定であり，異なる接触力の状態が同一の巨視的応力状態を表し得る。これを一意的に指定するには，境界面での力の加え方を指定しなければ

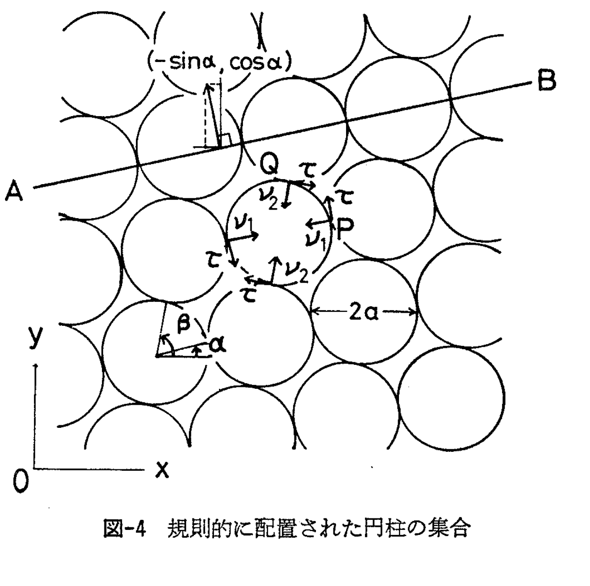

図-4　規則的に配置された円柱の集合

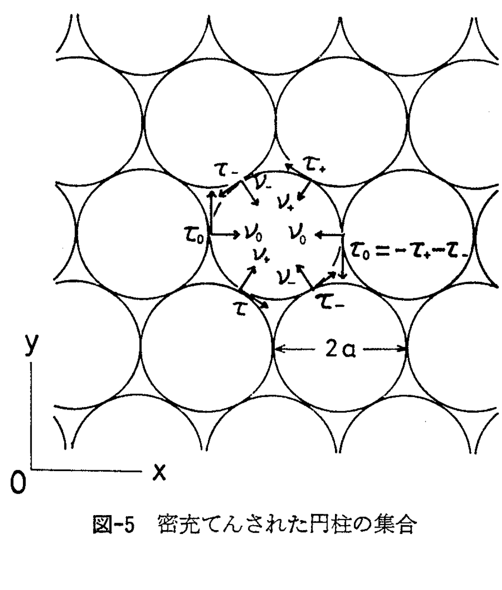

図-5　密充てんされた円柱の集合

ならない。なお，図-5 では特殊な方向に x 軸，y 軸をとっているが，全体をある角度だけ回転した状態で式(11)を用いた結果は，式(17)をテンソル変換則により変換したものと一致する。それは式(11)がテンソル関係式で表されているからである。

4. 接触力分布と巨視的応力

代表的粒子の接触力分布 f_iD を考えてみる。十分多数の粒子について平均すれば，これは粒子表面にわたってなめらかな関数で近似できるはずである。そこでモーメントによる展開

$$f_iD=A_i+B_{ij}n_j+C_{ijk}n_jn_k+\cdots \tag{18}$$

を考え，第一近似として二次以上のモーメントの項は省略しよう。釣合い条件式(1)，(2)により

$$\overline{f_iD}=0 \qquad \overline{f_{[i}n_{j]}D}=0 \tag{19}$$

が要求されるが，よく知られた恒等式

$$\left.\begin{aligned}&\overline{n_i}=0,\ \overline{n_in_j}=\frac{1}{3}\delta_{ij},\ \overline{n_in_jn_k}=0,\\&\overline{n_in_jn_kn_l}=\frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{kj})\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

を用いれば，

$$A_i=0, \quad B_{[ij]}=0 \tag{21}$$

を得る。これを式(10)へ代入すれば

$$\sigma_{ij}=\frac{\gamma}{a^2}B_{ij} \tag{22}$$

すなわち

$$f_iD=\frac{a^2}{\gamma}\sigma_{ij}n_j \tag{23}$$

を得る。これは巨視的応力状態が σ_{ij} のとき n_i 方向の接触力密度が式(23)で与えられることを意味する。充てん率 γ に反比例することに注意しよう。

さらに接触点分布 D を考えてみる。小田，小西らによれば，接触点分布は主応力方向に，その主応力の大きさにほぼ比例して増大する傾向がみられる[14),15)]。そこで，次の二次形式で近似できると考えられる。

$$D=-c\sigma_{ij}n_in_j \tag{24}$$

ただし c は γ に依存するスカラーである。$\oint D\mathrm{d}\Omega$ が一粒子の平均接触点数，すなわち配位数を与えるのであるから，恒等式(20)より

$$N=-c\sigma_{ij}\times4\pi\delta_{ij}/3$$
$$\therefore \quad c=-N/4\pi p$$

を得る。ただし $p\equiv-\sigma_{kk}/3$ は静圧力である。ゆえに

$$D=-\frac{N}{4\pi p}\sigma_{ij}n_in_j \tag{25}$$

を得る(負の符号は応力の定義として引張りを正と決めているからである)。以上より，n_i 方向の接触点の一接触点当たりの平均接触力は

$$f_i=-\frac{4\pi a^2p}{\gamma N(\gamma)}\frac{\sigma_{ij}n_j}{\sigma_{kl}n_kn_l} \tag{26}$$

で与えられる。分母の配位数 $N(\gamma)$ は充てん率の関数であり，その関数形については例えば小田が検討を行っている[16)]。ゆえに巨視的応力 σ_{ij} のほかに，充てん率 γ を測定するか，あるいは応力-ダイレイタンシー関係実験式から γ を推定することによって f_i の分布が式(26)によって計算できることになる。

式(23)を用いれば，n_i 方向の接触点がそれぞれ $\xi_i(\boldsymbol{n})$ だけすべったときの巨視的ひずみを逆に定めることもできる。$\xi_i(\boldsymbol{n})$ が応力 σ_{ij} を変化させない仮想変位とすれば，式(23)より，一粒子当たりになされる仮想仕事が

$$\oint f_i\xi_iD\mathrm{d}\Omega=\frac{4\pi a^2}{\gamma}\sigma_{ij}\overline{n_j\xi_i} \tag{27}$$

となり，単位体積当たりの仮想仕事は $\gamma/(4/3)\pi a^3$ 倍して

$$W=\frac{3}{a}\sigma_{ij}\overline{n_i\xi_j} \tag{28}$$

となる。これを式(9)と比較して，巨視的ひずみが次のように与えられる。

$$E_{ij}=\frac{3}{a}\overline{n_{(i}\xi_{j)}} \tag{29}$$

この式が正しいことは式(6)を代入すれば恒等式が得られることからも確かめられる。ただし，式(29)は接触点数が変化しないとした場合のものであり，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{\xi}$ $(n_i\xi_i=0)$ より体積変化は 0 $(E_{kk}=0)$ となっている。接触点数の変化による体積変化(ダイレイタンシー)を補正すると，

$$E_{ij}=\frac{3}{a}\overline{n_{(i}\xi_{j)}}-\frac{\Delta\gamma}{3\gamma}\delta_{ij} \tag{30}$$

となる。$\Delta\gamma$ は充てん率の変化である。このときの接触点分布 D の変化 $\Delta D(\boldsymbol{n})$ を調べる。接触点数が一定とすると，接触点数保存関係により

$$\Delta D=-\partial_k(D\xi_k) \tag{31}$$

となる。ただし $\partial_k=\partial/\partial x_k$ である(式(31)は連続体力学における連続の方程式との類推を考えると理解しやすい)。接触点数の変化による部分を補正すると式(25)より

$$\Delta D=-\partial_k(D\xi_k)-\frac{N'(\gamma)\Delta\gamma}{4\pi p}\sigma_{ij}n_in_j \tag{32}$$

である。ただし $N'(\gamma)=\mathrm{d}N(\gamma)/\mathrm{d}\gamma$ である。

5. 降伏条件と巨視的内部摩擦角および粘着力

代表的粒子の n_i 方向の接触点の接触力を f_i とすると，垂直圧縮成分 ν と，接線方向の成分 τ_i とに次のように分解できる。

$$\begin{aligned}&\nu=-(a^2/\gamma D)\sigma_{ij}n_in_j\\&\tau_i=(a^2/\gamma D)(\sigma_{ij}n_j-\sigma_{jk}n_in_jn_k)\end{aligned} \tag{33}$$

この粒子の摩擦係数を μ'，粘着力を c' とすれば，Coulomb 則に従うとすると

$$\sqrt{\tau_i\tau_i}=\mu'\nu+c' \tag{34}$$

を満たす方向 n_i が存在するようになったとき，その接

触点のすべりが起こる。しかし，巨視的なすべりが生じるかどうかは分からない。そこで式(34)が全立体角にわたって平均して満たされるとき，すなわち

$$\overline{[\tau_i\tau_i-(\mu'\nu+c')^2]D}=0 \qquad (35)$$

が満たされるとき，巨視的な降伏が生じると考えてみる。式(35)に式(33)を代入して，公式(20)を代入すると，結果は

$$\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}}=\sqrt{\frac{15\,\mu'^2}{2(3-2\,\mu'^2)}}\,p+\frac{r}{a^2}\sqrt{\frac{15}{2(3-2\,\mu'^2)}}\,c' \qquad (36)$$

となる。ただし $\tilde{\sigma}_{ij}$ は偏差応力テンソル[10]

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \qquad (37)$$

であり，$p(=-\sigma_{kk}/3)$ は静圧力である。式(36)は拡張von-Mises 則とよばれる降伏条件である。巨視的な内部摩擦角を ϕ，巨視的な粘着定数を c として，平面問題の場合に Coulomb 則と一致するように式(36)と対応させると[17),18)]，

$$\tan\phi=\sqrt{\frac{15}{6-19\mu'^2}}\,\mu' \qquad c=\frac{r}{a^2}\sqrt{\frac{15}{6-19\mu'^2}}\,c' \qquad (38)$$

という関係を得る。これが粒子特性と粒子半径，充てん率などの微視的な量を巨視的な ϕ, c と結びつける関係である。

6. すべりと巨視的な変形

仮想仕事の原理は粒状体を連続体として扱うときにも同じように適用できる。その一つの例としてすべりによる変形を考える。いま，粒状体が複数の方向のすべり面に沿って同時にすべりを起こしているとする。第 α 種のすべり面（何層にも平行に存在するとする）の単位法線ベクトルを $n_i^{(\alpha)}$ とし，単位ベクトル $l_i^{(\alpha)}$ 方向にすべりが $\gamma^{(\alpha)}$ だけ進行したとする（**図-6**）。ただし，$\gamma^{(\alpha)}$ はすべる前に面の法線方向に並んでいた各点がすべりの後に傾いてつくる角度である。巨視的な応力を σ_{ij} とすると，この面上には $\sigma_{ij}n_j^{(\alpha)}$ の力が単位面積当たりに働いている。せん断力（すべり方向の成分）$\tau^{(\alpha)}$ は

$$\tau^{(\alpha)}=\sigma_{ij}n_j^{(\alpha)}l_i^{(\alpha)} \qquad (39)$$

で与えられる。$\gamma^{(\alpha)}$ がせん断力 $\tau^{(\alpha)}$ を変化させない仮想すべりであるとすれば，このせん断力が $\tau^{(\alpha)}\gamma^{(\alpha)}$ だけの仮想仕事をするから，単位体積当たりの仮想仕事 W は

$$W=\sum_{\alpha}\sigma_{ij}n_{(i}^{(\alpha)}l_{j)}^{(\alpha)}\gamma^{(\alpha)} \qquad (40)$$

である（σ_{ij} は対称テンソルであるから $n_j^{(\alpha)}l_i^{(\alpha)}$ を $n_{(i}^{(\alpha)}l_{j)}^{(\alpha)}$ でおきかえてよい）。ゆえに，このすべりによって生じる巨視的ひずみは式（9）と比較して

$$E_{ij}=\sum_{\alpha}\gamma^{(\alpha)}n_{(i}^{(\alpha)}l_{j)}^{(\alpha)} \qquad (41)$$

となる。このひずみはせん断変形であり，体積を変化させない。なぜなら $n_i^{(\alpha)}$ と $l_i^{(\alpha)}$ とは直交しており

$$E_{kk}=\sum_{\alpha}\gamma^{(\alpha)}n_k^{(\alpha)}l_k^{(\alpha)}=0 \qquad (42)$$

となるからである。これは，変形の原因がすべりであることからも当然のことである。いま，巨視的なひずみ E_{ij} を観測によって知ったとする。このとき式(41)より，どの方向のすべり面にどれだけのすべりが生じたかを求めることを考える。E_{ij} の独立な成分は5個（対称性と式(42)を考慮する）であるから，もし5種類以上の独立なすべり方向をかってに仮定すれば式(41)より $\gamma^{(\alpha)}$ を一意的に定めることができる。仮定するすべり方向は任意であるから，このことは，巨視的なひずみのみからはすべり面が決定できないことを意味する。すなわち，多くのすべり方が，同一の巨視的ひずみを生じ得るのである。従来の研究では単純せん断実験において，特定のすべり面を暗黙に仮定して議論しているものもあるが[19)]，例えば**図-7** のように異なるすべりが同一の単純せん断変形を表すので，十分に注意しなければならない。これに関して，変形に伴う粒子接触点分布の変化を調べる実験において，全方向の接触点を調べるべきであるという小田らの意見と，特定のすべり面に関するすべりに関係する接触点のみを調べるべきであるという松岡らの意見とがあるが[14),20)]，これまで調べてきたように，後者の考え方は不十分であり，あくまでも全体積に関する平均量をもとにして，仕事の関係に注意し，三次元変形に関するテンソル関係式によって議論しなければならないと思われる。

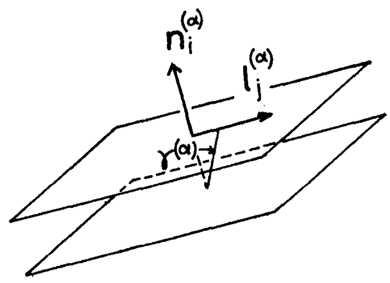

図-6　すべり面とすべり方向

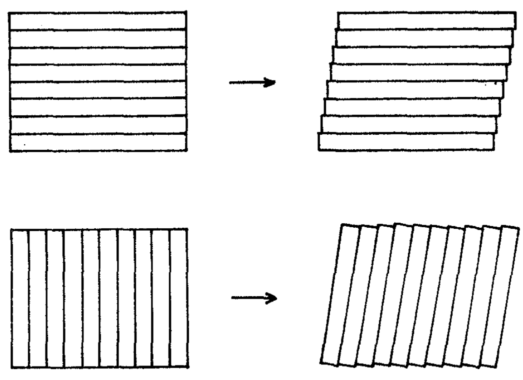

図-7　単純せん断変形を起こす二種類のすべり

7. まとめ

本報告では粒状体の離散的な粒子モデルを連続的な量で記述するための基本原理として仮想仕事の原理をとりあげて，三次元テンソル関係式で記述する方法を論じた。そして，従来の研究において特殊な見方をすることからくる問題点を指摘した。テンソルは三次元空間内の力学現象を統一的に，しかも座標系のとり方に不変に記述するのに最も適した道具であり，本報告でもテンソルの有効性を十分に発揮させたつもりである。本報告で述べた論法が活用されて，今後，粒状体の力学がますます発展することを期待している。

参考文献

1) 龍岡文夫 (1978)：粒状体力学の現状とその応用2，粒状体の変形に関する理論的研究についてII（粒子間の力・変位の関係のミクロ的考察に基づく研究），「土と基礎」, Vol. 26, No. 7, pp. 55〜63.
2) 松岡　元 (1978)：土の構成式に関する現況総括5，粒状体としてのアプローチ，「土質工学会論文報告集」, Vol. 18, No. 3, pp. 97〜104.
3) 小田匡寛 (1978)：土の構成式に関する現況総括6，粒状体の構造とその変形モデル，「土質工学会論文報告集」, Vol. 18, No. 4, pp. 119〜130.
4) 橋口公一(1975)：粒状体の応力比-構造式に関する省察，「土質工学会論文報告集」, Vol. 15, No. 3, pp. 83〜91.
5) 金谷健一 (1980)：粒状体の統計モデルとエントロピー，「土質工学会論文報告集」, 予定.
6) 長尾高明 (1977)：粉体の応力-ひずみ関係式（第1報，粒子間にすべりのない場合の関係式），「日本機械学会論文集」, Vol. 43, No. 375, pp. 4038〜4047.
7) 長尾高明 (1978)：粉体の応力-ひずみ関係式（第2報，粒子間にすべりがある場合の応力の表示式），「日本機械学会論文集」, Vol. 44, No. 382, pp. 1912〜1922.
8) 長尾高明 (1978)：粉体の応力-ひずみ関係式（第3報，粒子間にすべりがある場合の関係式について），「日本機械学会論文集」, Vol. 44, No. 385, pp. 2967〜2974.
9) 小田匡寛 (1979)：純粋せん断，単純せん断，「土と基礎」, Vol. 27, No. 9, pp. 55〜56.
10) 金谷健一 (1980)：せん断，圧縮と構成方程式，「土と基礎」, 予定.
11) 金谷健一 (1979)：粒状体の流動の基礎理論（第1報，非圧縮性の流れ），「日本機械学会論文集」, Vol. 45, No. 392-B, pp. 507〜514.
12) 金谷健一 (1979)：粒状体の流動の基礎理論（第2報，発達した流れ），「日本機械学会論文集」, Vol. 45, No. 392-B, pp. 515〜522.
13) Satake, M. (1978): "Construction of mechanics of granular materials through graph representation," Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 257-266.
14) Oda, M. (1972): "The mechanism of fablic change during compressional deformation of sand," Soils and Foundations, Vol. 12, No. 2, pp. 1-18.
15) Oda, M. and Konishi, J. (1974): "Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear," Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, pp. 25-38.
16) Oda, M. (1977): "Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material," Soils and Foundations, Vol. 17, No. 2, pp. 29-42.
17) 金谷健一 (1979)：粒状体の速度場の理論—関連流動則と特性曲面—，「土質工学会論文報告集」, Vol. 19, No. 4, pp. 103〜112.
18) 金谷健一 (1979)：粒状体の速度場の理論—弾塑性理論と不連続波動—，「土質工学会論文報告集」, Vol. 19, No. 4, pp. 113〜120.
19) Matsuoka, H. (1974): "A microscopic study of shear mechanism of granular materials," Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, pp. 29-43.
20) Matsuoka, H. (1973): Discussion to "The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand," Soils and Foundations, Vol. 13, No. 1, pp. 106-110.

（原稿受付，1979. 12. 7）