

動的応答解析における地盤の非線形性の影響

(Effects of Nonlinearity of Soil Foundations in Dynamic Analysis)

川 本 眺 万* (Toshikazu Kawamoto)
市 川 康 明** (Yasuaki Ichikawa)
富 樫 豊*** (Yutaka Togashi)

キーワード：減衰／動的／軟弱地盤／波動／有限要素法／履歴 (IGC: E 8)

1. ま え が き

地震時における構造物の挙動は、支持地盤の影響を強く受けるために、地盤の振動特性を明らかにする研究が精力的に進められている。一般に、地盤の動的性状は、地盤地層の幾何的形態に加えて地盤を構成する土の動的な構成関係、入力地震動の特性に支配される。このうち特に、土の構成関係、すなわち、ひずみ依存性を有する非線形応力-ひずみ関係が、地盤の動特性に強い影響を与えることは周知の事実である。このため、非線形性を考慮した地盤の動特性を把握することが必要となり、解析方法の提案を含めて解析が行われてきている。その場合、問題は、土の非線形性の理想化と、それによる地盤モデルの非線形運動方程式の解き方に帰着される。まず、第一の問題については、解析対象の系を、地盤が水平層状地層であり入力地震波が鉛直下方より上昇するS波とする一次せん断振動系とすると、土の非線形性は、履歴型となるせん断型復元力特性として理想化される。従来、これには(1)非線形な履歴特性を等価なせん断弾性係数と減衰定数へ置換する方法と(2)種々の非線形関数で履歴特性を近似する方法とが採られてきた。このうち(2)としては、折れ線近似の bilinear モデル、指数型関数近似の Ramberg-Osgood モデル、および双曲線近似の Hardin-Drnevich¹⁾ モデルがある。

非線形運動方程式を解く方法は、ひずみレベルに応じた等価な線形系を反復して想定し、各反復段階で振動数応答解析を行う等化線形化法と、非線形方程式そのものを時間方向に離散化して解く直接積分法に大別される。直接積分法としては、時間方向の離散化の仕方によって Wilson の θ -法、Newmark の β -法、Houbolt

法、中間加速度法等、種々の安定かつ精度の高い手法が開発されている(例えば Bathe²⁾ 参照)。非線形性が弱い場合には、等価線形化法の適用は可能であるが、非線形性が強く、また実地震動のようにランダム波を扱わなければならない場合には、かなりの困難を伴うことが指摘されている(藤野・伯野³⁾)。例えば Taylor-Larkin⁴⁾ のモデルでは、周期1秒および0.5秒の近傍で非線形性の影響が強く現れ、等価線形法による解析よりも、非線形系を直接積分する方法の応答値が小さくなる傾向にある。これらのことより、非線形性を考慮した応答解析は、逐次積分の方法によって行うことが適切であると考えられる。

非線形解析の手法は、以上のように種々開発されており、非線形性がもたらす地盤動特性の影響も明らかにされつつある。しかしながら、この種の研究が多い割には、定量的な特性把握が不十分であるように思われる。このため、地盤応答への非線形性の影響が、地層厚、地動入力のスเปクトル特性、土の弾性係数、系の地下逸散減衰等の因子に対し、どのように現れるかを把握しておくことは、地盤動特性を定量的ならびに定性的に把握するために必要と考えられる。

本論文では、地盤の動特性に対する土の非線形性の影響を、地盤構成の因子(層厚、土の弾性係数、履歴減衰特性、基盤弾性、系の地下逸散減衰)および入射波の影響のもとで定性かつ定量的に把握することを目的として、半無限弾性基盤上の水平層の時刻歴応答、スเปクトル特性を検討している。このとき、水平層は Ramberg-Osgood 型の非線形性を有すると仮定し、時間逐次積分は中間加速度法によるものとする。

また、線形双曲型偏微分方程式の中央差分式の収束条件が Courant-Friedrichs-Lewy によって与えられているが(例えば山口・野木⁵⁾参照)、Ramberg-Osgood 型の非線形特性は線形よりのずれが大きくなり、しかも履歴減衰特性が収束の安定化の方向に働くために、Courant-Friedrichs-Lewy 条件がこの非線形波動方程式の収束条件のよい近似を与えられと考えられる。ここでは数値的

* 名古屋大学工学部地盤工学教室 教授(名古屋市千種区不老町)

** 名古屋大学工学部地盤工学教室 助手(名古屋市千種区不老町)

*** 名古屋大学工学部建築学科 助手(名古屋市千種区不老町)

(1981. 2. 12 原稿受付・討議期限 1983. 10. 1)

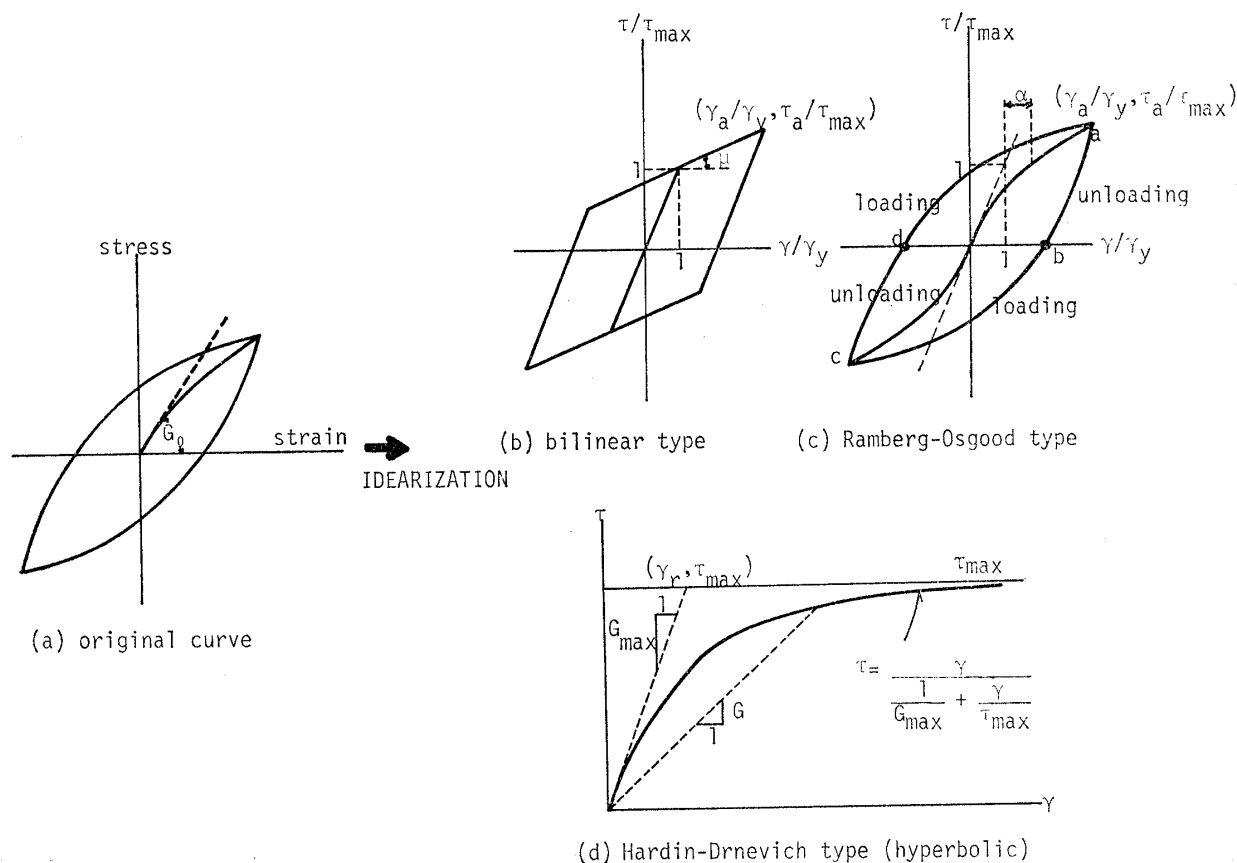


図-1 応力-ひずみ関係の理想化

にこの条件を確認し、中間加速度法に対する収束安定性について検討している。

2. 数値解析の手法

土の動的なせん断に対する応力-ひずみ関係は Ramberg-Osgood 関数で近似できるとする (Jennings⁶⁾, Richart⁷⁾)。処女載荷に対する荷重曲線が図-1(c) のように求まれているとすると、この曲線に対応する骨格曲線が次式で定められる。

$$\frac{\tau}{\tau_y} = \frac{\tau}{\tau_{\max}} + \alpha \left(\frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^N \quad (1)$$

この曲線上の (τ_a, γ_a) より除荷された履歴分枝は

$$\frac{\tau - \tau_a}{2\tau_y} = \frac{\tau - \tau_a}{2\tau_{\max}} + \alpha \left(\frac{\tau - \tau_a}{2\tau_{\max}} \right)^N \quad (2)$$

で表される。ここで α, N は材料実験により定まる定数で、Seed and Idriss⁸⁾ のデータにフィットさせると $\alpha=1.0 \sim 3.5$, $N=3$ または 5 となる。ここで N は軟化型の履歴特性を表すために正の奇数をとる。

一次元の横波の運動方程式は自重による物体力を無視すると次式で与えられる。

$$m\ddot{v} - \frac{\partial \tau}{\partial x} = -m\ddot{y}(t) \quad (3)$$

ここで m は物体の質量、 v は水平変位、 $\ddot{y}(t)$ は基盤の加

速度を与える。また $\cdot$ は時間微分である。式 (3) の空間方向の離散化は一次元の F. E. M. で行う (Appendix 参照)。すなわち式 (3) は離散化されて

$$M\ddot{\tilde{X}} + C\dot{\tilde{X}} + P(\tilde{X}) = -M\ddot{\tilde{Y}}(t) \quad (4)$$

と書かれた連立非線形常微分方程式となる。ここで $\tilde{X}^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ は各節点の相対変位、 M は質量マトリックス、 C は減衰マトリックス、 P は復元力ベクトル、 $\ddot{\tilde{Y}}$ は外力加速度ベクトルである。時間方向については中間加速度法によって離散化する。すなわち時刻 $t + \Delta t/2$ の相対変位、速度、加速度を

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_{t+\Delta t/2} &= \tilde{X}_t + \dot{\tilde{X}}_t \Delta t/2 \\ \dot{\tilde{X}}_{t+\Delta t/2} &= \dot{\tilde{X}}_t + \ddot{\tilde{X}}_t \Delta t/2 \\ \ddot{\tilde{X}}_{t+\Delta t/2} &= M^{-1}(-M\ddot{\tilde{Y}}_{t+\Delta t/2} - C\dot{\tilde{X}}_{t+\Delta t/2} - P(\tilde{X}_{t+\Delta t/2})) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

によって求める。ここで (5) 式を解くときに復元力 $P(\tilde{X}_{t+\Delta t/2})$ によるせん断応力 τ と相対変位 $\tilde{X}_{t+\Delta t/2}$ によるせん断ひずみ γ は Ramberg-Osgood 型履歴関数を満たしていなければならない。すなわち $\tilde{X}_{t+\Delta t/2}$ より γ を求め、この γ が (1) または (2) 式を満たすように τ を決める。この非線形代数方程式は、Newton-Raphson 法で解かれる。この τ によって復元力 P が求まる。時刻 $t + \Delta t$ における各未知量は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_{t+\Delta t} &= \ddot{X}_t + \dot{\ddot{X}}_t \cdot \Delta t + \ddot{\ddot{X}}_{t+\Delta t/2} (\Delta t)^2 / 2 \\ \dot{\ddot{X}}_{t+\Delta t} &= \dot{\ddot{X}}_t + \ddot{\ddot{X}}_{t+\Delta t/2} \cdot \Delta t \\ \ddot{\ddot{X}}_{t+\Delta t} &= \ddot{M}^{-1} (-\ddot{M} \ddot{\ddot{X}}_{t+\Delta t} - \ddot{C} \dot{\ddot{X}}_{t+\Delta t} - \ddot{P}(\ddot{X}_{t+\Delta t})) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\ddot{P}(\ddot{X}_{t+\Delta t})$ も上記 $\ddot{P}(\ddot{X}_{t+\Delta t/2})$ を求めたと同じ手法によって Ramberg-Osgood 関係を満たすように定められる。

ここで逸散減衰効果を表すための粘性境界条件について述べる。Lysmer ら⁹⁾に従って1次元領域においては基盤上に応力

$$\tau = b\rho V_S \dot{x} \quad (7)$$

が生ずる粘性境界を考える。ここで ρ は密度、 V_S は S 波の速度であり、 b は波動論により入射エネルギーと反射エネルギーの比が最小となるように定められる。ただし S 波に対しては、 $b=1$ と定めた場合約 95% の吸収があることが示されている。したがってここでもアブリオリに $b=1$ と定めて十分であろう。式 (7) は境界条件として $\ddot{C}$ マトリックスに組み込まれる。なお、履歴減衰は非線形方程式 (5), (6) を解くことによって自動的に評価されることは前述のとおりである。

入力地震動に対する地盤の応答は、結局式 (5)~(7) によって、変位、速度、加速度、更にひずみ、応力の時刻歴でもって表されるが、これらの時間領域の応答量とは別に、振動数領域の応答量もまた、地盤の応答を把握する上で重要である。すなわち、一般の非線形系においても非線形性がそれほど強くなければ、線形系と同様に地盤の動特性を入力地震動に対する地盤の振動数応答として把握することができる。一般に、非線形系の振動数応答解析は、系を等価線形に置き直す場合が多いが、ここでは、非線形系のままその解析を次のようにして行うことにする。 Δt を時間刻み、データー個数を N とし、入力地震動 $\{\ddot{Y}_k\}$ を継続時間 $N\Delta t$ で入射させ、その時間域における地盤の応答 $\{\ddot{X}_k\}$ を求め、入力と応答の時刻歴のフーリエスペクトルをとり、それらを $\{S_m^0\}$, $\{S_m^i\}$ とすると、次式のようになる。

$$\{S_m^0\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N\Delta t}} \sum_{k=0}^N \ddot{X}_k e^{-(2\pi m k/N)} \right\}$$

$$\{S_m^i\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N\Delta t}} \sum_{k=0}^N \ddot{Y}_k e^{-(2\pi m k/N)} \right\}$$

応答加速度のフーリエスペクトルには、地盤固有の振動特性のほかに入力地震動の特性も含まれている。したがって、地盤固有の振動特性を知るには、応答のフーリエスペクトルより入力地震動のスペクトルの比 $\{M_m\}$ をとればよい。すなわち、

$$\{M_m\} = \{S_m^0/S_m^i\}$$

3. 地盤モデル

地盤の幾何形状については表層が比較的薄い場合 (表層厚 10m) と厚い場合 (同 40m) の2種類について比較した (図-2)。地震基盤については小林、藤原¹⁰⁾等を参考にして、せん断弾性波速度 $V_S=400$ m/s、密度 $\rho=1.8$ t/m³ の洪積砂層を設定した。表層は沖積粘土であり、その密度 ρ は 1.6 t/m³ に固定した。弾性波速度 V_S は軟らかい場合 ($V_S=100$ m/s)、中程度 ($V_S=150$ m/s) および硬い場合 ($V_S=200$ m/s) を考える。入力地震波形はこの構造系の固有振動特性を調べるためのステップ関数、重複反射理論から求めた表層の固有周期と共振を起こす周期 $4h/V_S$ (h は表層厚、 V_S は表層の弾性波速度) の Sine 波、および実地震波 El Centro 40 NS 波と Taft 52 NS 波である。各入力波の最大振幅は 50, 100, 200 gal とし、継続時間は実地震波については 10.24 秒、Sine 波は 2 秒である。また、空間方向の離散化の影響を調べるために、図-2 の領域を 5, 10, 20 に

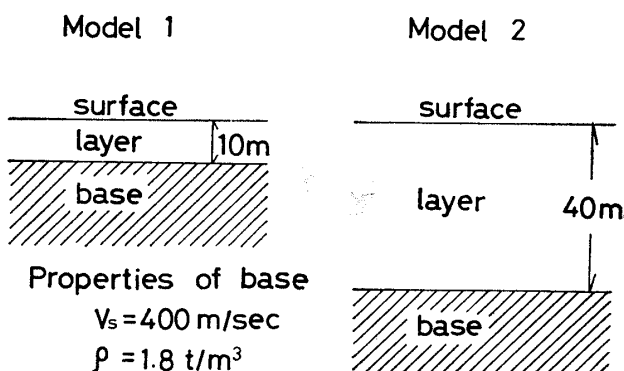


図-2 地盤モデル

表-1 解析条件

幾可形状	表層厚 (h)	10, 40m
	有限要素分割数	5, 10, 20
解析時間 (t)	10, 24sec ただし Sine 波は 2 sec	
地盤物性	密度 (ρ)	1.6 t/m ³
	弾性波速度 (V_S)	100, 150, 200m/s
	nonlinearity of Ramberg-Osgood Type	
	$\frac{\gamma - \gamma_a}{2\gamma_y} = \frac{\tau - \tau_a}{2\tau_{max}} + \alpha \left(\frac{\tau - \tau_a}{2\tau_{max}} \right)^N$	
	$\alpha=1, 3, N=3, \gamma_y=10^{-3}, \tau_{max}=0.2$ MPa	
基盤	密度 (ρ)	1.8 t/m ³
	弾性波速度 (V_S)	400m/s
入力波形	Sine waves	
	max. amplitude	A=50, 100, 200gal
	cycle	w=4h/ V_S sec
	El Centro 40 NS wave	
	max. amplitude	A=50, 100, 200gal
	Taft 52 NS wave	
	max. amplitude	A=50, 100, 200gal

分割した場合について調べた。Ramberg-Osgood 関数 (1) または (2) の定数 α, N は多賀ら^{11,12)}が Parmelee, Seed らのデータによって求めた値

$$\alpha=1.0\sim 3.5; \quad N=3, 5$$

を参考にして、 $\alpha=1, 3; N=3$ と定めた。これらの諸条件はまとめて表-1 に示してある。降伏ひずみ γ_Y は $10^{-3}=0.1\%$ 、最大応力 τ_m は 0.2 MPa を仮定した。El Centro 波, Taft 波の場合は波動特性を調べるために表層の V_s を更に細かく入れてスペクトル解析を行い、応答倍率を求めた。

4. 解析結果と考察

4.1 時間および空間離散化の影響

有限要素解析においてメッシュサイズ Δh および時間間隔 Δt は数値計算の収束性および安定性に大きな影響を与える。

空間 1 次元の線形波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left(V_s^2 \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (8)$$

を初期条件の下で次のように差分化して解く場合を考えてみよう。

$$\begin{aligned} & \frac{u(t+\Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t-\Delta t, x))}{\Delta t^2} \\ & = V_s^2 \frac{u(t, x+\Delta h) - 2u(t, x) + u(t, x-\Delta h))}{\Delta h^2} \end{aligned} \quad (9)$$

この差分スキームは空間の差分間隔 Δh と時間の差分間隔 Δt の比 $\lambda = \Delta t / \Delta h$ が位相速度の逆数 $1/V_s$ より小さければ収束することが示される。すなわち

$$K = \frac{\Delta t \cdot V_s}{\Delta h} \leq 1 \quad (10)$$

である (Courant-Friedrichs-Lewy¹³⁾ の条件。詳しくは例えば山口・野木⁵⁾を参照)。Ramberg-Osgood model では位相速度 V_s が変位 u の関数となり、支配方程式 (8) が非線形となるのであるが、その線形からの“ずれ”は単調であり、ずれ幅は式 (1) におけるパラメータ α によって定まると考えられる。また、一次の変位関数を使った等メッシュの有限要素スキームでかつ時間増分が一定であれば中央差分式 (9) と同一となるので、線形問題には Courant-Friedrichs-Lewy 条件が適用できる。メッシュ幅 Δh が異なる場合は $\min(\Delta h)$ を考えればよい。ところで Ramberg-Osgood の非線形モデルでは Courant-Friedrichs-Lewy 条件は直接には適用できないが、線形からのずれは上記のように大きくないのであるから、安定条件は Courant-Friedrichs-Lewy 条件からわずかに離れたところにあると考えられる。表-1 のモデルで数値解析を実施したところ、表層厚 $h=10 \text{ m}$ を 20 分割して $\Delta h=0.5 \text{ m}$ 、また $\Delta t=0.002 \text{ 秒}$

とした解析モデルが V_s および α を変化させてもいずれの場合も解を得ることができなかった。なお、この場合の K の値は 0.4 から 0.8 の範囲にある。10 分割の場合は安定な解が得られており、このとき $K=0.2$ である。次に $h=10 \text{ m}$, $\Delta h=1 \text{ m}$ と固定して V_s を変化させたときの地表面の最大加速度応答値を図-3 に示してあるがこれによると V_s がいかに安定条件に影響するかが分かる。すなわち、明らかに $V_s=200 \text{ m/s}$ を越えると解は安定しない。このときの K は 0.4 である。また α が大きくなると非線形の程度が大きくなり、見かけ上 V_s も低下するので安定条件には有利に作用する。このことは図-3 において $h=10 \text{ m}$, $\alpha=3$ の発散の程度が $\alpha=1$ の場合よりは大きくないことから分かる。結論として Ramberg-Osgood モデルを用いた非線形波動方程式の離散化において Courant-Friedrichs-Lewy 条件の K の値がある範囲を越えない限り安定解を得られることが数値計算的に確かめられる。実際 K の値が 0.4 を越える場合の数値解析は不安定となるが、この不安定性は α によってわずかに影響を受ける。

4.2 Sine 波入力の場合の応答特性

層厚 h 、弾性波速度 V_s の表層を有する地盤が線形弾性体であると仮定するとこの固有振動数は $w = V_s / 4h$ で

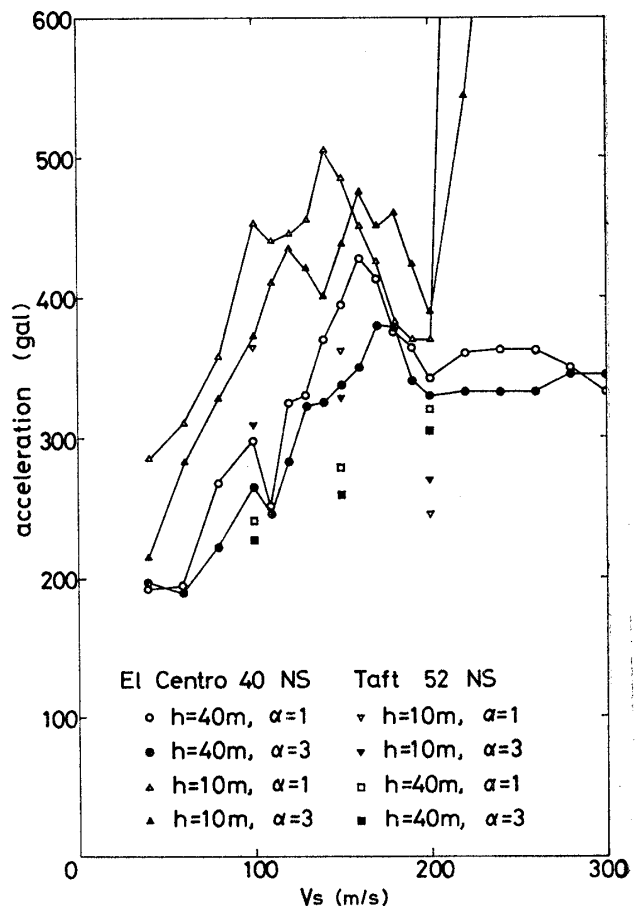


図-3 表層の弾性波速度の変化に伴う地表面応答

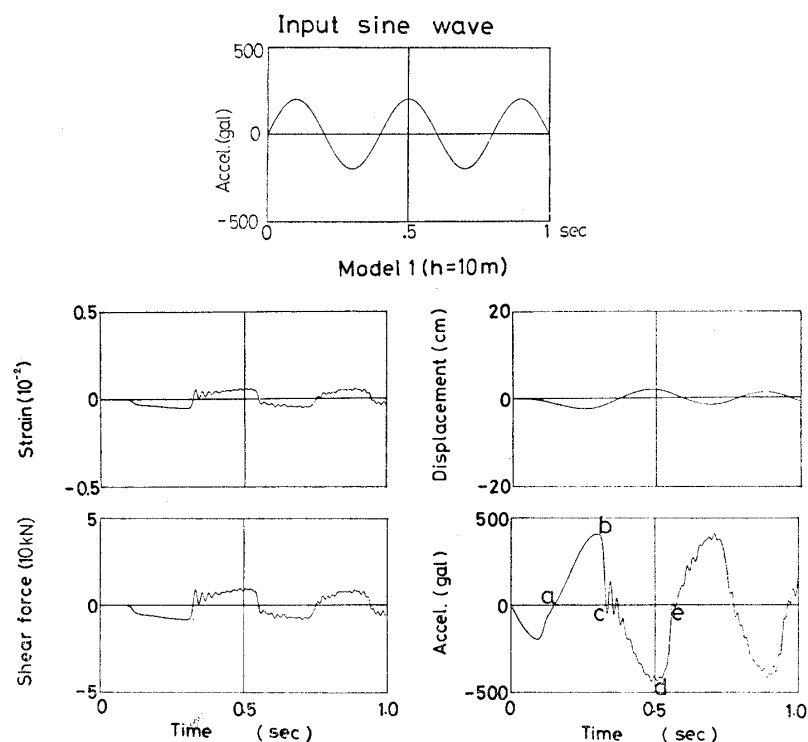


図-4 Sine 波入力による地表面の応答

与えられるので、最大の応答を示すと思われる共振 Sine 波を入力して地表面の応答を調べた。図-4 に層厚 10 m, $\alpha=1$ のモデルに 200 gal の Sine 波を入力した場合の表面の時刻歴応答を示す。せん断力およびせん断ひずみの応答値は明らかにピーク値の頭打ちを示す。また、ピーク値の現れる時点が入力ピークの時点より遅れる。これは軟化型の Ramberg-Osgood model の非線形特性によるものと思われる。すなわち図-1(c) の Ramberg-Osgood model 中の a-b は図-4 の加速度応答値の b-c に対応して応答が速くなり図-1(c) の b-c は図-4 の c-d に対応して応答が遅くなる。またすべての応答値について位相が進む傾向にある。これは Ramberg-Osgood model が上述のように载荷のパスが除荷のパスより長くかかる（すなわち図-1(c) 中の経路 bc または da が ab または cd より長い）ことによるものであり、線形問題における直接積分法の位相遅れの現象（例えば Bathe²⁾ 参照）とは様相が異なることに注意したい。変位のピーク値は反射波の干渉によって低下する傾向にある。

また、図-4 中の応答波中に高周波成分が乗っているのは、基盤表面上の粘性境界で一部反射された波の影響であると考えられる。これは、表層（層厚 10 m）の弾性波速度が 100 m/s であり、高周波成分が地表面の応答に現れる時間が、ほぼ 0.3 秒であることから明らかである。また、応答波に乗っている高周波は基準波動 (2 Hz) のほぼ 5 倍であるので、この場合、10 Hz 以上の応答波

は、解析モデル中に入ってくる反射波の影響により、誤差を伴うことが推定される。

4.3 地震波入力の応答特性

El Centro 波、Taft 波をそれぞれ基盤へ入力し、各種パラメーターのもとで、地盤各部の変位、加速度、ひずみ、復元力を求め、それらの結果を主に地表面における時刻歴最大値およびフーリエスペクトルで整理し、表層地層の初期剛性（弾性波速度）、非線形性、入力波形、入力波振幅、地表層厚の各因子に対する地盤の非線形挙動について検討した。

4.3.1 地表面における応答特性

(i) 最大加速度

地表層の弾性波速度 V_s を 40~400 m/s と漸次変えて、El Centro 波入射に対する地表面における応答の最大加速度を求め、図-3 のように整理した。層厚 10 m で、弾性波速度 V_s が 200 m/s 以上である地盤では、時刻歴応答が発散ぎみであるために、極めて大きな最大加速度が生じているが、このようなケースを除いた地盤においては、良好な結果を得た。さて、同一層厚 h 、同一係数 α の場合 V_s に対する最大加速度をみると、入力加速度最大値 200 gal に対し、高々 500 gal の応答最大量であり、極端に大きな増幅効果はみられないが、例えば $h=10$ m, $\alpha=1$ で $V_s=140$ m/s において、最大加速度が極値をとるように、表層地層の初期剛性に対応した増幅効果があることが示唆される。またこの増幅効果は非線形性が増した場合でもみられる。すなわち、非線形

性の強い地盤においては、最大加速度の極値を与える弾性波速度 V_s は、 $h=10\text{m}$ 、 $\alpha=3$ で 160m/s となる。

次に、層厚の影響についてみると、層が厚い場合には層が薄い場合に比して最大加速度が小さくなり、また、弾性波速度に対する最大加速度の極値の出方が図面上右側へずれている。このことは層が厚くなると地盤の固有振動数は大きくなり ($f=V_s/4H$)、見かけ上の増幅率が低下することによるものであり、ここで H の増大分を V_s の減少とみなすと、上述のことが説明できる。すなわち、その V_s 減少分だけ、図中の曲線を図上左側へずらせば、層が薄い場合の曲線と対応するのである。ちなみに、このような操作は、係数 α が大きい場合に対しても適用でき、 α が大きいことは、 α を小さく、初期剛性を小さくしたことに対応するとして、例えば $\alpha=3$ の曲線を左側へずらすことができる。このような操作をふむことができるならば、層厚の因子、係数 α の因子を単純に、初期剛性の低下として把握できることになる。

Taft 波を入力させた場合の地表面最大応答加速度も図-3 に示してある。El Centro 波入力の場合と比較して、全般的に最大応答値は低下する。このことは、入力地震動の最大加速度が同一であっても地表面最大加速度が、入力地震波の振動数特性の違いにより影響を受けることを意味している。なお、El Centro 40 NS 波を入力した場合の地表面の応答が、図-5 に示してある。

(ii) 地表面加速度時刻歴のフーリエスペクトル

次に、層厚 $h=10\text{m}$ で係数 $\alpha=1$ と $\alpha=3$ のおのおの場合において、弾性波速度 V_s を $100\sim150\text{m/s}$ まですら変えて地表面の加速度時刻歴のフーリエスペクトルをとり、これを図-6 (a.1), (a.2) に示す。なお、図-6 中の a 図はフーリエスペクトル、b 図は応答倍率であり、1 は $\alpha=1$ 、2 は $\alpha=3$ の場合を示す。この図によれば、弾性波速度 $V_s=100\text{m/s}$ 程度で、 2Hz 付近に卓越ピークが生じ、弾性波速度 V_s が大きくなるに従って、卓越ピークが高振動数側へ移動していることが分か

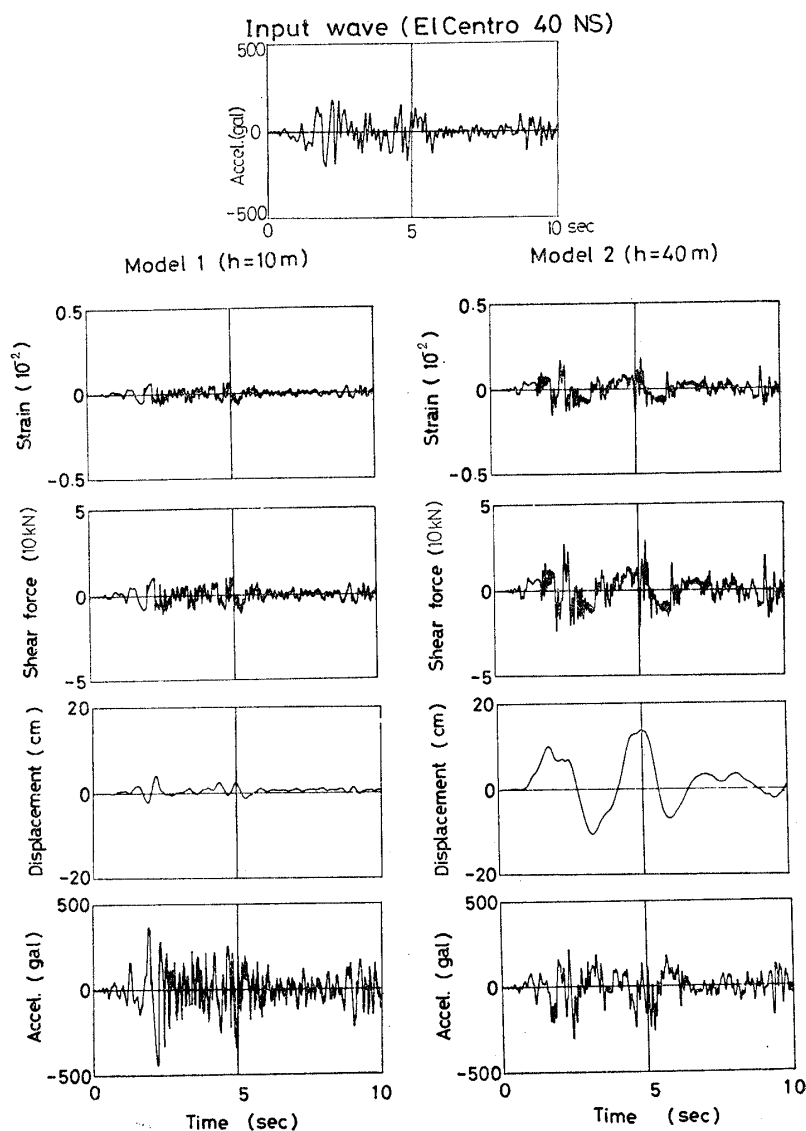


図-5 El Centro 波入力による地表面の応答

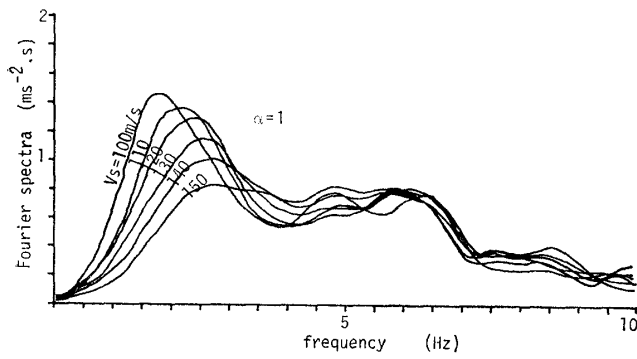
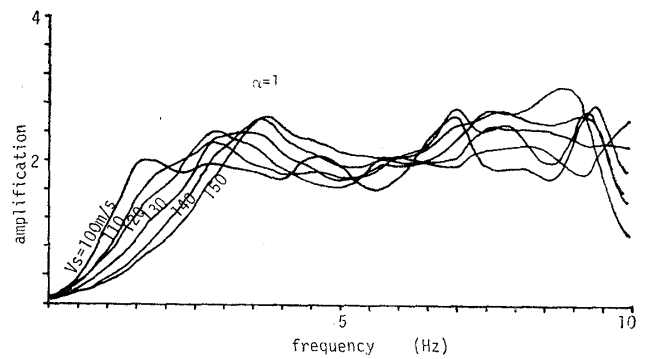
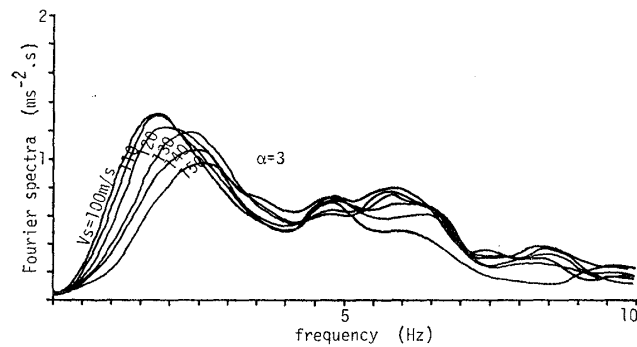
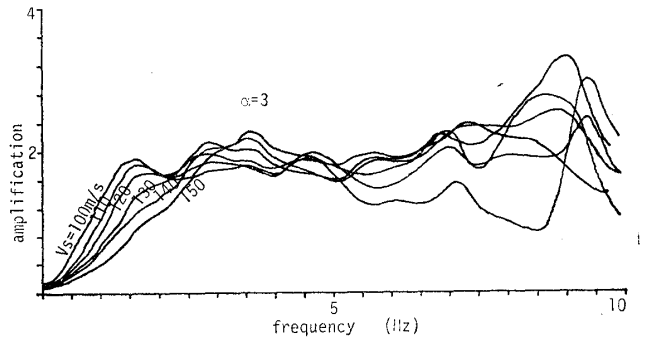
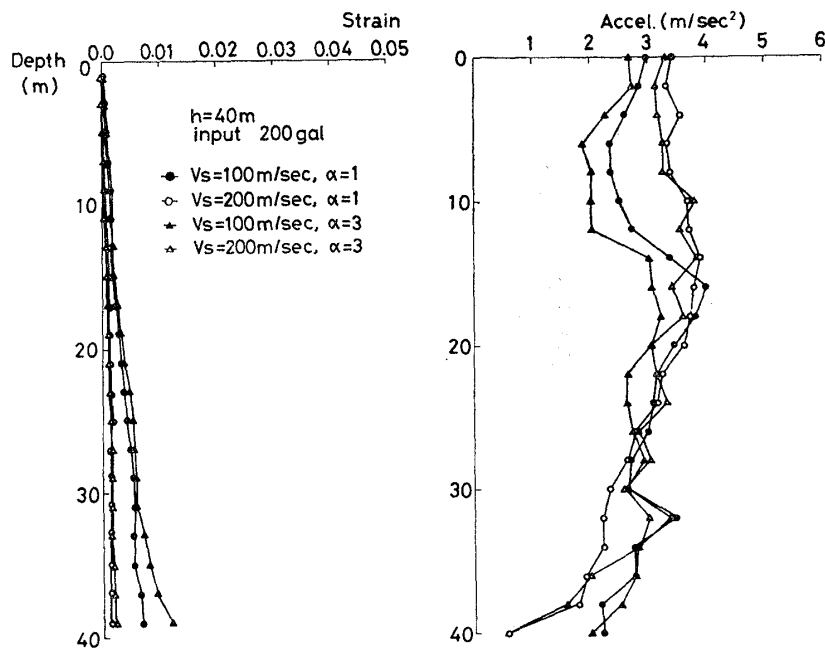
(a.1) Fourier Spectra for $\alpha=1$ (b.1) Ratio of Fourier Spectra for $\alpha=1$ (a.2) Fourier Spectra for $\alpha=3$ (b.2) Ratio of Fourier Spectra for $\alpha=3$ 図-6 El Centro 波入力による地表面時刻歴応答の Fourier スペクトルと応答倍率 ($h=10\text{m}$)

図-7 El Centro 波入力による最大応答値の深さ方向の分布

る。また第2次ピークも、第1次ピークほど明瞭ではないが、同様の傾向にある。このようなピークの移動は、単純に V_s の増加に伴う固有振動数の増大として考えられるが ($f=V_s/4H$)、地盤の非線形性のために、ピーク移動の量は、 V_s に比例することはない。このことは、 $\alpha=1$ と $\alpha=3$ の加速度フーリエスペクトルを比較することより明らかであり、 $\alpha=3$ の場合が、 V_s 増大

に対するピーク移動量が小さいようである。

(iii) 地表面と基盤の加速度に関するスペクトル比
地盤固有の振動特性を把握するために、図-6 (b.1), (b.2) のように、 $h=10\text{m}$, $\alpha=1$ と $\alpha=3$ の場合について、 $V_s=100\sim 150\text{m/s}$ のフーリエスペクトル比を求めた。系を線形とし、系に重複反射理論を適用すれば、最大の増幅率は基盤と地表地層の波動インピーダンス比の逆

数であるので、 $M=400(\text{m/s})/100\sim150(\text{m/s})=4\sim2.6$ となる。これに対して図-6 (b.1), (b.2) のスペクトル比は、振動数 $1\sim10\text{ Hz}$ の区間でほぼ一定の値 2 程度となっている。しかし、明りょうではないが、スペクトル比のピークが 2 つ程度現れている。1/4 波長理論によれば、ピーク振動数は 1 次で $f=V_s/4H=2.5\sim4\text{ Hz}$ 、2 次で $7.5\sim12\text{ Hz}$ であり、地盤が非線形性を有することを考えると、図-6 (b.1), (b.2) のように $1.5\sim3\text{ Hz}$ に 1 次、 $6\sim9\text{ Hz}$ に 2 次のピークがそれぞれ生ずるものと思われる。

弾性波速度が増せば、ピークは高振動数側へ移動するが、(ii) で述べたとおり、地盤の非線形性により、その移動量が弾性波速度と比例関係にはない。

4.3.2 地中内応答分布

図-7 には、入力地震動に対する地盤のひずみ、加速度の最大応答値の深さ方向分布を示している。この場合、表層地盤層厚 40 m 、弾性波速度 100 および 200 m/s 、係数 α を 1 および 3 を考えている。深さ $15\sim30\text{ m}$ 区間では、加速度最大値は変わらず 3 m/s^2 を中心に一定値に近いが地表近くでは、係数 $\alpha=3$ の場合が $\alpha=1$ に比して小さな最大加速度を与えており、また弾性波速度 V_s が小さければ、表層の最大加速度は小さめとなっている。これは、地盤各部において、土の非線形性を発揮する度合いが異なっていることを示唆するようである。このことをみるために、ひずみの最大値の深さ方向分布図をみると、ひずみは地表でほぼゼロで、基盤上で最大値をとるような分布ではあるが、 10 m 以深ではひずみは一定に近い状態で生じている。これは、 10 m 以深の地盤では、非線形効果が一様に生ずることを意味するものであり、 10 m 以深の地盤の剛性が見かけ上軟化したものとも考えられる。それゆえに、例えば変位分布は、地盤があたかも剛体のように移動しているかのような挙動を呈する。もちろん、復元力は、基盤に近いところでは、他の位置の値に比して最大である。なお、土の非線形効果は、係数 α が大きければ大きいほど顕著であることは、式 (2) から当然のことである。このことは同図においても十分表されている。

5. 結 論

本研究は、地盤の地震応答に対して、地盤の非線形性がもたらす影響を土の初期弾性係数、非線形性、地層厚、入力地震動特性、基盤の弾性（系の逸散減衰）の各因子のもとで、定性的かつ定量的に把握するために、弾性基盤上における表層地層の時刻歴応答、スペクトル、スペクトル比を求め、検討を行った。非線形構成式は履歴型の Ramberg-Osgood モデルを用い、一次元せん断波動方程式は仮想仕事の原理によって有限要素離散化し

た。時間方向の積分には中間加速度法を用い、基盤表面には地下逸散減衰を表す粘性境界が組み込んである。その結果、地盤の非線形性による地震時挙動の性状が、以下のように明らかにされた。

1. 系の層厚・初期弾性・非線形性の因子に対する地盤応答への影響

(1) 非線形性が強くなる、すなわち、非線形性の程度を表す係数 α (式 (1) 参照) が大きくなると地盤の剛性が低下し、減衰性が増すので、系の応答倍率は低下し、周期は長周期化する傾向を示す。

(2) 表層地盤の層厚の増大および初期せん断弾性係数 (s 波速度) の減少に伴って、系の固有振動数は低下し、非線形性が強くなるために、系の応答倍率は、低下し、周期は長周期化する。

2. 入力波の種類の相異による地盤応答への影響

(1) 系の初期剛性による固有振動数と同一の振動数をもつサイン波入力の場合、非線形性により系の固有振動数低下のため、共振状態は永続せず、応答は有限となる。

(2) 地震動入力の場合、入力動の卓越振動数が地盤の初期剛性によりきまる卓越振動数と近いとき、系の応答は大きくなるが、非線形性による剛性低下が応答のスペクトルに著しく影響を与える。そのため比較的長周期成分が卓越する地震動 (El Centro 波) のほうが短周期動 (Taft 波) のときより系の応答が大きい傾向となる。

3. 離散化の影響 (数値解析の安定性)

線形双曲型偏微分方程式に対する中央差分式の収束安定性は Courant-Friedrichs-Lewy の条件によって与えられる。本解析で用いられた離散化手法は、空間に対しては有限要素法、時間に対しては中間加速度法であり、偏微分方程式も Ramberg-Osgood 構成式を含む非線形方程式で与えられるが、非線形性の程度が強くないことにも影響されて、Courant-Friedrichs-Lewy の収束条件が、この非線形波動方程式の収束条件のよい近似を与えることが分かった。

以上のように地盤の非線形性は、一面では系の剛性の低下と、他面では系の減衰増大に関与し、その関与の程度は入力地震動の振動数特性、系の層厚・初期弾性・非線形性係数により規定されることが明らかとなり、数値計算的にも、有限要素・中間加速度近似によって、この非線形波動方程式は十分安定に解きうる事が分かった。

謝 辞

本研究の一部は昭和 54 年度文部省科学研究費、自然災害特別研究「地盤の動特性および地下構造物の動的挙動に関する研究」(代表、東京大学・久保慶三郎教授一

現名誉教授・埼玉大学教授一)の研究テーマのひとつとして行ったものである。また、名古屋大学工学部・多賀直恒助教授の御協力をいただいた。ここに記して謝意を表す次第である。

参考文献

- 1) Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. (1972): "Shear modulus and damping in soils: Design equations and curves," SM 7, Proc. ASCE, pp. 667-692.
- 2) Bathe, K.-J. (1982): Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Printice-Hall.
- 3) 藤野陽三・伯野元彦 (1975): 地盤の非線形性を考慮した地震動特性, 「土木学会論文報告集」, Vol. 240, pp. 1~9.
- 4) Taylor, P. W. and Larkin, T. J. (1978): "Seismic site response of nonlinear soil media," GT 3, Proc. ASCE, pp. 369-383.
- 5) 山口昌哉・野木達夫 (1969): 「数値解析の基礎, 偏微分方程式の初期値問題」, 共立出版.
- 6) Jennings, P. C. (1965): "Earthquake response of a yielding structure," EM 4, Proc. ASCE, pp. 41-68.
- 7) Richart Jr., F. E. (1978): "Field and laboratory measurements of dynamic soil properties," Proc. Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics, Vol. 1, ed. by B. Prange, pp. 3-36.
- 8) Seed, H. B. and Idriss, I. M. (1970): "Soil moduli and damping factors for dynamic response analyses," Report No. EERC 70-10, Univ. California, Berkeley.
- 9) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. E. (1969): "Finite dynamic model for infinite media," EM 4, Proc. ASCE, pp. 859-877.
- 10) 小林芳正・藤野俊郎 (1973): 「地盤の振動特性」, 土木学会編, 地震応答解析と事例, 第1編第3章, pp. 47~62.
- 11) 多賀直恒・大谷泰彦 (1978): 土の非線形履歴特性を考慮した地盤の動的応答特性, 「日本建築学会論文報告集」, Vol. 271, pp. 53~60.
- 12) 多賀直恒・大谷泰彦・大平 満 (1978): 各種減衰効果と土の非線形性を考慮した地盤の動特性, 「日本建築学会論文報告集」, Vol. 274, pp. 29~36.
- 13) Courant, R., Friedrichs, K. O. and Lewy, H. (1967): "On the partial differential equations of mathematical physics", IBM Journal, March, pp. 215-247 (Translation from Math. Anal., Vol. 100, 1928).

Appendix: (仮想仕事の原理に基づく運動方程式の有限要素離散化)

平面内の横波の運動方程式は(3)式で与えられるが, この式の仮想仕事は, 仮想変位を δv として

$$\int_V \left(m\ddot{v} - \frac{\partial \tau}{\partial x} + m\ddot{y}(t) \right) \delta v dx = 0$$

と与えられる。第2項に部分積分を施し, 外力としての表面力が非常にゼロであると仮定すると

$$\int_V (m\ddot{v}\delta v + \tau\delta\gamma + m\ddot{y}(t)\delta v) dx = 0$$

となる。ここで $\delta\gamma = \delta(\partial v / \partial x)$ は仮想せん断ひずみである。

次に, 物体 V を要素 $\{V^e\}$ に分割して, 変位および仮想変位に線形な有限要素近似

$$v = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right] \begin{bmatrix} X_1^e \\ X_2^e \end{bmatrix} = \tilde{N} \tilde{X}^e$$

を導入する。ただし, $\hat{x}$ は長さ l の要素の局所座標 ($\hat{x} \in [0, l]$) であり, $\tilde{N} = [1 - \hat{x}/l, \hat{x}/l]$ は形状関数とよばれる。また, $\tilde{X}^e = [X_1^e, X_2^e]^T$ は要素両端の変位を与える。 $\partial(\) / \partial x = \partial(\) / \partial \hat{x}$ であることを考慮すると仮想ひずみは

$$\delta\gamma = \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \delta(\tilde{B} \tilde{X}^e) = \tilde{B}(\delta \tilde{X}^e)$$

と与えられ, $\tilde{B} = [-1, 1]^T / l$ である。非線形構成則は粘性減衰を仮定する場合には

$$\tau = G(\gamma)\gamma + \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

と表されるので, 仮想仕事の原理は各要素ごとに

$$(\delta \tilde{X}^e)^T \int_{V^e} \{ m \tilde{N}^T \tilde{N} \ddot{\tilde{X}}^e + \tilde{B}^T (G(\gamma) \tilde{B} \tilde{X}^e + \eta(\dot{\gamma}) \dot{\tilde{X}}^e) + m \tilde{N}^T \tilde{N} \ddot{\tilde{Y}}^e \} dx = 0$$

と書け, これはもしこの要素が拘束または強制変位境界を有していたとすると変位境界条件だけを満たした任意の仮想節点変位 $\delta \tilde{X}^e$ に対して成立するので, 最終的に

$$\tilde{M}^e \ddot{\tilde{X}}^e + \tilde{C}^e(\dot{\gamma}) \dot{\tilde{X}}^e + \tilde{K}^e(\gamma) \tilde{X}^e = -\tilde{M}^e \ddot{\tilde{Y}}^e$$

となる。ここで $\ddot{\tilde{Y}}^e$ は各節点に与えられる外力加速度ベクトルであり,

$$\tilde{M}^e = \int_{V^e} m \tilde{N}^T \tilde{N} dx, \quad \tilde{C}^e = \int_{V^e} \eta(\gamma) \tilde{B}^T \tilde{B} dx$$

$$\tilde{K}^e = \int_{V^e} G(\gamma) \tilde{B}^T \tilde{B} dx$$

この式を要素全部について重ね合わせると非線形連立常微分方程式(4)が得られる。ただし

$$\tilde{P}(\tilde{X}) = \tilde{K}(\gamma) \tilde{X}$$

と書いて, これを復元力ベクトルとよぶ。ここで求められた質量マトリックスは非対角項をも含んだ適合 (consistent) 型であるが, これを対角項に集中した集中 (lumped) 質量型が用いられることが多い。この解析においても集中質量型が用いられている。粘性境界は, 対応する $\tilde{C}$ の項に上記の $\tilde{C}^e$ に従って係数を導入すればよい。