



波が平坦に見える座標系とプラズマ振動

水 野 幸 雄

(核融合科学研究所)

(1993年 9 月24日受理)

A Coordinate System in Which a Wave Looks Flat and Plasma Oscillation

Yukio Midzuno

(Received September 24, 1993)

Abstract

When the phase speed of a wave is greater than the speed of light c , it is possible to find a moving inertial frame in which the wavelength of the wave is infinite, i.e. the wave looks flat. In the new frame all the wave quantities are uniform in space, so that the frame may be useful for analysis and simulation of the wave. As an example a linear Langmuir wave is analyzed in the frame for the purpose of showing the basic concepts of the method of analysis.

Keywords:

superluminous wave, moving inertial frame, Lorentz transformation, infinite wavelength, Langmuir wave,

1. はじめに

一般に進行波の振動数は動いている座標系で測るとドップラーシフトを受けて、もとの振動数 ω とは違った値を取る。特に波の位相速度と同じ速度で動いている座標系に乗って見れば、その波は振動数 ω' が 0, すなわち時間的に不変な空間的周期場となり、この座標系はその波動の研究に広く使われている。

一方、ガリレイ変換の範囲内では波の波数 k は不変で、上記と双対となる現象はない。しかし、相対論の効果を考えに入れ、動いている座標系に移ってローレンツ変換を用いれば、波数もドップラーシフトに相当する変換を受け、その表式は相

対論を書いてある教科書に載っている [1]。そしてその表式を見ると、波の位相速度 $v_{ph} = \omega/k$ が光の速さ c より大きい場合、つまり

$$v_{ph} > c \quad (1-1)$$

の時には、動いている座標系で、そこではその波の波数 k' が 0 となるものを選べることが解る。すなわち、この座標系では、波は空間的に一様、つまり平坦で、時間的にだけ変動して見える存在である。

プラズマ内では $v_{ph} > c$ である波はごくポピュラーな存在である。例えば、定常磁場がない場合を考えると、電磁波につながる横波の分枝はすべ

て(1-1)を満たすし、縦波である電子プラズマ振動は長波長では振動数がほぼ一定 $\omega \sim \omega_p$ (ω_p : プラズマ振動数) であるから波長が十分長ければ(1-1)を満たす。電場 E がポテンシャルの勾配で与えられる縦波は波長が無限大では存在出来ないから、この座標系ではプラズマ振動がどう見えるだろうか、ということは興味をそそる問題である。

このような、ある特定の波が空間的に平坦な存在として見える座標系は、そこではその波を記述する全ての物理量が空間座標に依存しなくなるので、波が時間的に定常に見えるいわゆる wave frame (波の系) と同様に有用であると思われる。しかし、このような座標系の存在はあまり広くは知られてないように思われる。実際、ある波が座標変換で空間的に平坦な存在に変身するということは直感的に考え易くはないし、筆者も比較的最近に人から教えられるまではそのような座標系を考えたことがなかった。そして、そのような座標系ではプラズマ振動がどうなるか、を考えていて、一応の結果が出た後で、文献を調べた所、案の定、この座標系を使った論文がすでにあることを見つけた[2-4]。従って、完全に新しい方法という訳ではないが、簡単な例題をこの座標系で解析して、必要な相対論の諸概念や扱い方を紹介することは意味があると考えて、考えたことの一部をここに述べる。諸兄がこのような波を解析的に、もしくはシミュレーションで扱う際の参考になれば幸いである。

2. 波が平坦に見える座標系

ある空間的には1次元の座標系 K を考え、その座標を (x, t) とする。また、それに対し V の速度で動いている座標系 K' を考え、その座標を (x', t') とする。この2つの座標の間にはローレンツ変換で表される、

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma(t - (V/c^2)x) \end{cases} \quad (2-1)$$

という関係がある。ここで

$$\gamma = 1/(1 - (V/c)^2)^{1/2} \quad (2-2)$$

である。

関係式(2-1)はまた次のようにも書き直される。

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ t = \gamma(t' + (V/c^2)x') \end{cases} \quad (2-3)$$

所で、 K 系において一つの波を考え、その波数 k 、振動数を ω とする。すると (x, t) における波の位相 ϕ は

$$\phi = kx - \omega t \quad (2-4)$$

となる。これを K' 系で見れば、(2-3)により

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma[k(x' + Vt') - \omega(t' + (V/c^2)x')] \\ &= \gamma[(k - (V/c^2)\omega)x' - (\omega - kV)t'] \end{aligned} \quad (2-5)$$

となる。位相は観測する座標系に依らないから、これはそのまま K' 系での位相を表し、 K' 系で見た波の波数 k' と振動数 ω' とを用いて、(2-4)と同形の

$$\phi = k'x' - \omega't' \quad (2-6)$$

と書くことが出来る。従って、(2-5)と比較して

$$k' = \gamma(k - (V/c^2)\omega) \quad (2-7)$$

$$\omega' = \gamma(\omega - kV) \quad (2-8)$$

を得る。

ここで、 γ という乗数はいわゆるローレンツ収縮の効果を表す。 ω' の表式中の kV はドップラー効果としてよく知られている現象を表す項である。 k' の中の $(V/c^2)\omega$ の項は名前があるかどうかは知らないが、空間ドップラー効果とも呼べばよいであろう。

考えている波の位相速度 $v_{ph} = \omega/k$ が光速 c よりも小さい場合は、 K' 系の動く速度 V を v_{ph} に取ることが出来る。すると(2-8)から $\omega' = 0$ となって、よく知られているように、波の位相速度と同じ速度で動いている座標系では波は静止した周期的空間変動に見える、という事実を表してい

る。

一方、波の位相速度 v_{ph} が c よりも大きい場合は $c^2/v_{ph} < c$ となるので、 K' 系の速度 V を c^2/v_{ph} と等しく取ることが可能である。その系を K'_0 とする。すると

$$V = c^2/v_{ph} = kc^2/\omega \quad (2-9)$$

と置くことにより、 K'_0 系での波の波数として

$$k' = \gamma(k - (c^2/((\omega/k) c^2) \omega) = 0 \quad (2-10)$$

が得られる。すなわち、 K'_0 系ではこの波は波長が無限大で、空間的には変動がなく、一様な場が時間に関して周期的に変動しているように見える。このことは式の上では明らかであるが、直感的には必ずしも解り易くはない。従って、一応の解釈をつけ加えることは意味があるであろう。

K 系で (ω, k) という特性をもつ波を、 K' 系で観測して波の形を決めようとする問題を考える。時刻 $t' = 0$ において、 $x' = 0$ という点は、 K 系でも $x = 0, t = 0$ に対応しているので、波の位相は、 $\phi = kx - \omega t = 0$ である。次に、時刻 $t' = 0$ で 0 でない x' 点を考える。するとこの点は、(2-3)から分かる通り、 K 系では

$$x = \gamma x', \quad t = \gamma(V/c^2)x' \quad (2-11)$$

に対応する (図1)。従って、時刻 t が 0 でないので、 K 系では、波は時刻 0 の位置と比較して、

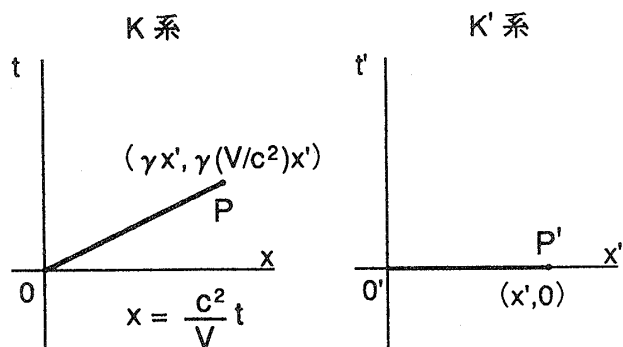


図1 K 系と K' 系での時空点の対応。 K' 系での時空点 $P'(x', t' = 0)$ は K 系での時空点 $P(x = \gamma x', t = \gamma(V/c^2)x')$ に対応する。従って、 K' 系での時刻 $t' = 0$ における x' 軸は、 K 系での世界線 $x = (c^2/V)t$ に対応する。

$$\Delta x = v_{ph} t = \gamma v_{ph} (V/c^2) x' \quad (2-12)$$

だけ前進していることになる。特に $V = c^2/v_{ph}$ の時は、 $\Delta x = \gamma x'$ となって、 $t = 0$ の時に原点にあった波の上の点が、丁度 x' に対応する点まで動いてきている。すなわち、 K'_0 系で時刻 $t' = 0$ では、任意の点 x' において、 $t = 0$ で K 系の原点にあった波の位相を見ることになる。この関係は、任意の時刻、任意の点において同様に成立する。すなわち、波は空間的に一様に見え、ただその値が時間的に周期的変動をするだけである。

同じことではあるが、式(2-11)は、 x' をパラメータとして、 K 系で速度 c^2/V で進む点の運動を表す。すなわち、 $t' = 0$ での波の位相の空間分布を調べることは、この速度 c^2/V で進む点の順次見る位相を一括して記録することに相当する。従って、ある波が K 系で位相速度 $v_{ph} = c^2/V$ で進むならば、この点はいつもその波の同じ位相を見ることになり、 K'_0 系では全空間が同じ位相にあることになる。

以上の説明で、 K'_0 系では波が平坦に見えることが直感的に理解されるが、文献[2]には K 系から K'_0 系へのローレンツ変換の存在を直感的に説明する別の解釈が載っている。

なお、以上の話は便宜上、 k と ω とを用いて進めてきたが、実はその内容は $x - v_{ph}t$ という量が、 $V = v_{ph}$ と取って動く座標系に移れば x' に比例する量に、 $V = c^2/v_{ph}$ と取れば t' に比例する量に変換される、という事実だけに基づいている。従って $v_{ph} (> c)$ という速度で進行する任意の「波形」の現象に適用され、それらは $V = c^2/v_{ph}$ で動く座標系に移ることにより、全て空間的には一様で、時間的にだけ変動する現象に変身する。と言っても分散があれば線形の波では単色波以外への応用は難しいが、非線形性で波形がゆがんだ波などはこの方法で扱うことが出来る。

3. 波数 0 の系での「静電波」

波が空間的に一様であるように見える座標系では、ポテンシャルの grad で表される電場のみを持つ静電波は存在することが出来ない。従って、

典型的な静電波であるプラズマ振動がこの座標系ではどのように見えるかは興味がある問題である。この節ではまず静電波一般にかかわる話をまとめる。

位置座標以外の量を考えるためには、ローレンツ変換も一般の4ベクトルに対する形で書いて置いた方が便利である。特に粒子の運動量を含む問題では、空間的变化が x 方向だけの1次元的であっても p_y , p_z を無視することは出来ず、純粹の1次元問題として扱うことが出来ないの、何時でも4ベクトルの形で扱うのが便利である。

通常の意味では (ct, x, y, z) が4ベクトルを成し、これが

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - (V/c)x) \\ x' = \gamma(x - (V/c)ct), \\ y' = y, z' = z \end{cases} \quad (3-1)$$

と、対称な形の変換式を満足する。ここで γ は前と同様に(2-2)式

$$\gamma = 1/(1 - (V/c)^2)^{1/2} \quad \text{で与えられる。}$$

一方、スカラー・ポテンシャル Φ とベクトル・ポテンシャル (A_x, A_y, A_z) とが4ベクトル (Φ, A_x, A_y, A_z) を形成し、これらはローレンツ変換

$$\begin{cases} \Phi' = \gamma(\Phi - (V/c)A_x) \\ A_x' = \gamma(A_x - (V/c)\Phi), \\ A_y' = A_y, A_z' = A_z \end{cases} \quad (3-2)$$

を受ける。従って、 K 系で静電ポテンシャル Φ を持つ静電波は、その系ではベクトル・ポテンシャルを持たない。すなわち、 $A_x = A_y = A_z = 0$ なので、 K' 系では

$$\begin{cases} \Phi' = \gamma\Phi \\ A_x' = -\gamma(V/c)\Phi, \\ A_y' = 0, A_z' = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

となる。なお、 Φ' 等の x' に対する依存性は自動的になくなる。

電磁場は $\mathbf{E}' = -(1/c)(\partial\mathbf{A}'/\partial t') - \nabla'\Phi'$, $\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}'$ で与えられるから、全ての場の量が

空間的に一様に見える K_0' 系では Φ' の寄与はなく、電場は

$$\begin{aligned} E_x' &= -(1/c)(\partial A_x'/\partial t'), \\ E_y' &= 0, E_z' = 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

となる。すなわち、電場はベクトル・ポテンシャルの時間微分から生ずる。また、磁場は0となり、存在しない。

また、電荷密度を ρ , 電流密度を (j_x, j_y, j_z) とする時、 $(c\rho, j_x, j_y, j_z)$ が4ベクトルを形成する。静電波では普通は $\mathbf{j}$ を問題にしないが、 ρ が変動すれば当然 $\mathbf{j}$ も変動している、 $\mathbf{j}$ は連続の式 $(\partial\rho/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ から定まり、 K 系で例えば位相因子 $\exp(ikx - i\omega t)$ を持つ波である時は

$$j_x = (\omega/k)\rho = v_{ph}\rho, j_y = 0, j_z = 0 \quad (3-5)$$

と取ることが出来る。従って、 K_0' 系では $V = c^2/v_{ph}$ を用いて

$$\begin{aligned} c\rho' &= \gamma(c\rho - (V/c)j_x) \\ &= \gamma c(1 - (Vv_{ph}/c^2))\rho = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} j_x' &= \gamma(j_x - (V/c)c\rho) = \gamma(v_{ph} - V)\rho \\ &= \gamma(1/v_{ph})(v_{ph}^2 - c^2)\rho \end{aligned} \quad (3-7)$$

となる。ただし、位相因子は $\exp(-i\omega't')$ に変換される。当然のことながら、 K_0' 系では電荷密度は存在しない。

こうして、Maxwell方程式は

$$-(1/c)(\partial E_x'/\partial t') = (4\pi/c)j_x' \quad (3-8)$$

だけが残る、電流 $\mathbf{j}'$ によって、変位電流の項を通して、電場 $\mathbf{E}$ がどのように変化するかを表現する式になる。

電流 $\mathbf{j}'$ は媒質を構成する荷電粒子の速度から計算される。そして、荷電粒子の速度は電場による加速により変動するから、電流変化を電場により表す式が求まって、これと(3-8)と組み合わせで閉じた方程式系を得ることが出来、分散関係も計算される。しかし、この関係を定める過程は考えている媒質のモデルや波の種類にも依存するので、次節以降にまわし、そこで具体的に電子プラズマ振動を論じる。

最後に、 ω と ω' との関係は式(2-8)により、

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma(\omega - kV) = \gamma(\omega - kc^2/v_{ph}) \\ &= (\gamma/\omega)(\omega^2 - k^2c^2)\end{aligned}\quad (3-9)$$

であるが、

$$\begin{aligned}\gamma &= 1/(1 - (V/c)^2)^{1/2} \\ &= 1/(1 - (ck/\omega)^2)^{1/2} \\ &= \omega/(\omega^2 - k^2c^2)^{1/2}\end{aligned}\quad (3-10)$$

であることを考慮すると、 $\omega' = (\omega^2 - k^2c^2)^{1/2}$ となり、 K 系における分散式は ω' を用いると

$$\omega^2 = \omega'^2 + k^2c^2 \quad (3-11)$$

により与えられる。この関係は $V = kc^2/\omega$ だけに依存するので、縦波、横波、などの波の種類に依存しない。

なお、ローレンツ変換は任意の4ベクトル (X_0, X_x, X_y, X_z) の「大きさ」の2乗、つまり $X_0^2 - X_x^2 - X_y^2 - X_z^2$ を不変に保つ変換である。このことから、2つの4ベクトル (X_0, X_x, X_y, X_z) と (Y_0, Y_x, Y_y, Y_z) とがあった時、その「スカラー積」 $X_0Y_0 - X_xY_x - X_yY_y - X_zY_z$ がやはりローレンツ不変であることが出てくる。また逆に、ある4ベクトルと「スカラー積」を作った時、それがローレンツ不変になるような4成分の量は4ベクトルである。そこで $(\omega/c, k_x, k_y, k_z)$ という4成分量を考えると、これは (ct, x, y, z) との「スカラー積」により位相というローレンツ不変量を作るから、それ自身が4ベクトルである。従って、その $(c$ 倍) の「大きさ」の2乗 $\omega^2 - k^2c^2$ はローレンツ不変であり、それを

$$\omega^2 - k^2c^2 = \omega'^2 - k'^2c^2$$

と表現し、その $k' = 0$ の場合を書いたのが式(3-11)である。

4. 冷たいプラズマのプラズマ振動

以下では一様なイオンのバックグラウンドの中の電子プラズマを考え、そのプラズマ振動を論ずる。

電子に対する運動方程式は、 K_0' 系において

$$dp'_x/dt' = -eE'_x \quad (4-1)$$

で与えられる。運動量 $\mathbf{p}'$ は速度 $\mathbf{u}'$ と

$$\mathbf{p}' = \gamma' m_e \mathbf{u}' \quad (4-2)$$

の関係にある。ただし、 γ' は、式(2-2)において V の代りに3次元のベクトル $\mathbf{u}'$ の絶対値 $|\mathbf{u}'|$ とおいたもので

$$\begin{aligned}\gamma' &= 1/(1 - |\mathbf{u}'|^2/c^2)^{1/2} \\ &= (1 + |\mathbf{p}'|^2/m_e^2c^2)^{1/2}\end{aligned}\quad (4-3)$$

と書ける。

1個の電子が作る電流は、 $-e\mathbf{u}'$ で与えられる。沢山の電子が作る電流はこの寄与の和をとることで求まる。しかし、ある電子集団の全運動量とその集団が作る電流との関係は、電子の速度に分散がある場合は、電子ごとに γ' が異なる値を取るのでは簡単ではない。そこで、一般の場合は次節の kinetic theory による解析に譲るとして、ここでは冷たいプラズマの場合を考える。

今、 K 系 (実験室系) において温度 $T = 0$ の電子プラズマを考え、波のない状態では電子は全て静止しているとする。そして電子密度を n_0 とする。すると、 K 系に対して V の速度で動いている K_0' 系では、電子は速度 $\mathbf{u}_{x0}' = -V$ を持った一様なビームとなる。また、空間の体積要素がローレンツ収縮を受ける結果、電子密度は γ 倍されて、

$$n_0' = \gamma n_0 \quad (4-4)$$

となる。

そこで、波を考える。 K_0' 系では前節で述べたように、波は空間的に一様な電子速度の変動として表現される。電子密度は K_0' 系へのローレンツ変換だけで定まり、電子速度自身には関係しないので、電子速度を $\mathbf{u}_x'$ とすると、電子による電流 (密度) j_{ex}' は

$$j_{ex}' = -en_0'\mathbf{u}_x' \quad (4-5)$$

となる。

ここで

$$u_x' = u_{x0}' + u_{x1}' = -V + u_{x1}' \quad (4-6)$$

$$p_x' = p_{x0}' + p_{x1}' \quad (4-7)$$

と置く. すると, 電子による電流は式(4-5)から $j_{ex}' = -en_0'(-V + u_{x1}')$ となるが, このうち $-V$ による部分はバックグラウンドのイオンによる電流と打ち消し合うから実効的なプラズマ電流は

$$j_x' = -en_0' u_{x1}' = -e\gamma n_0 u_{x1}' \quad (4-9)$$

となる.

運動量に関しては, $p_x' = \gamma' m_e (u_{x0}' + u_{x1}')$ から,

$$\frac{dp_x'}{dt'} = \frac{d\gamma'}{dt'} m_e u_{x0}' + m_e \frac{d}{dt'} (\gamma' u_{x1}') \quad (4-10)$$

であるが,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma'}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left[1 - \left(\frac{-V + u_{x1}'}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= -\gamma'^3 \frac{V - u_{x1}'}{c^2} \frac{du_{x1}'}{dt'} \end{aligned}$$

であり, これは線形理論の範囲内で

$$= -\gamma'^3 \frac{V}{c^2} \frac{du_{x1}'}{dt'} \quad (4-11)$$

と書くことが出来る. また(4-10)の右辺第2項は同じく線形理論の範囲内で γ' を γ で置き換えることが出来るから, $u_{x0}' = -V$ を考慮して(4-10)は

$$\frac{dp_x'}{dt'} = \gamma \left(\frac{V^2}{c^2} \gamma^2 + 1 \right) m_e \frac{du_{x1}'}{dt'}$$

となるが, [] 内は容易に γ^2 に等しいことが示せるから, (4-9)も用いてこの式は

$$= \gamma^3 m_e \frac{du_{x1}'}{dt'} = -\frac{m_e \gamma^2}{n_0 e} \frac{dj_x'}{dt'} \quad (4-12)$$

と変形される. かくして, (4-1)から,

$$\frac{dj_x'}{dt'} = \frac{n_0 e^2}{m_e \gamma^2} E_x' = \frac{\omega_p^2}{4\pi \gamma^2} E_x' \quad (4-13)$$

が得られる. ここで, $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ は K 系におけるプラズマ振動数を表す.

こうして, (3-8)と(4-13)とから, 冷たいプラズマのプラズマ振動の K_0' 系における振動数 ω' として $\omega'^2 = \omega_p^2 / \gamma^2$ が得られる. そして(3-11)に

より, 実験室系での冷たいプラズマのプラズマ振動の振動数は $\omega^2 = \omega_p^2 / \gamma^2 + k^2 c^2$ となるが, これに(3-10)の γ の表式を代入し, もう一度 ω について解き直せば

$$\omega^2 = \omega_p^2 \quad (4-14)$$

が得られる. すなわち, 冷たいプラズマ中のプラズマ振動の振動数は位相速度が光の速さを越えても変らない[2].

プラズマ振動は通常は, 電荷密度の空間時間的変動と, それにより生ずる静電場との相互作用の産物として描かれるが, 以上により, 波が平坦に見える座標系では同じ波が変動する一様電流と一様電場との相互作用の結果, 生まれたものとして描かれる.

これを因果関係で言葉で述べると次のようになる.

- ①まず, 一様電流の揺らぎ j' だけが存在する状況を考える.
- ②式(3-8)により一様電場 E' が誘起される.
- ③運動方程式(4-1)により電子が減速され, j' が減少する.
- ④ j' が0になっても E' が残るので, 逆方向に j' が誘起される.
- ⑤そして, E' が遂には0になり, j' の方向は逆だが, ①と相似の状況になる.
- ⑥そして, 逆方向に, ②以下がくり返される.

5. プラズマ振動の kinetic theory

電磁場中の電子の運動はハミルトン関数:

$$H = c [m^2 c^2 + (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2]^{1/2} - e\Phi \quad (5-1)$$

から導かれるハミルトンの運動方程式により定まる. この状況下では, よく知られているように, 位相空間の各点がこの運動方程式に従って運動するとした時, 位相空間の体積要素 $d^{(6)}V \equiv dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ は時間的にその値を変えない[5]. そこで, その微小体積内の粒子数を

$$dN = f(x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) d^{(6)}V \quad (5-2)$$

と置くことにより定義される分布関数

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \equiv f(x, y, z, p_x, p_y, p_z; t)$$

も電子の運動に沿って時間的に不変である。このことから、粒子間の衝突を無視する近似では、分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ に対して kinetic equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (5-3)$$

が成立することが解る。ただし、 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{F}$ は粒子に働く力である。

このことは K' においても全く同様に成立する。今、空間的には x' だけに依存する状況を考え、その分布関数を $f'(x', p_x', p_y', p_z'; t')$ とおけば、kinetic equation:

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} + v_x' \frac{\partial f'}{\partial x'} + \mathbf{F}' \cdot \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{p}'} = 0 \quad (5-4)$$

が成立する。特に K_0' 系においては $\partial/\partial x' = 0$ であり、電場は x' 成分だけを持つから、電子の分布関数に対して (5-4) は

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} - eE_x' \frac{\partial f'}{\partial p_x'} = 0 \quad (5-5)$$

となる。一方、電子電流は

$$j_{ex} = -e \int v_x' f' dp_x' dp_y' dp_z'$$

で与えられるから、(3-8)に対応して

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x'}{\partial t'} = -\frac{4\pi e}{c} \left(\int v_x' f' dp_x' dp_y' dp_z' - n'V \right) \quad (5-6)$$

が得られる。ただし、 $n'V$ はバックグラウンドのイオンからの電流への寄与であり、波がない状態では電子による電流と互いに打ち消す。

(5-5)と(5-6)とが f' と E_x' とに対する閉じた方程式系を構成する。

ここで f' を一様定常な運動量分布 $f_0'(p_x', p_y', p_z')$ とそれからの小さな外れ f_1' との和

$$f' = f_0' + f_1' \quad (5-7)$$

と置き、 f_0' からの寄与はイオンの寄与と打ち消し、 f_1' と E_x' とは共に $\exp(-i\omega't')$ に比例するとすれば、(5-5)から

$$f_1' = \frac{ie}{\omega'} \frac{\partial f_0'}{\partial p_x'} E_x' \quad (5-8)$$

が得られる。これを(5-6)に代入すると、

$$i\omega' E_x' = -\frac{i}{\omega'} 4\pi e^2 \int v_x' \frac{\partial f_0'}{\partial p_x'} dp_x' dp_y' dp_z' E_x' \quad (5-9)$$

となる。ここで

$$p_x' = \gamma' m_e v_x' = \frac{m_e v_x'}{(1 - (|\mathbf{v}'|^2/c^2))^{1/2}} \quad (5-10)$$

から、 v_x' を $\mathbf{p}'$ で表せば、

$$v_x' = (p_x'/m_e) (1 - (|\mathbf{v}'|^2/c^2))^{1/2} = (p_x'/m_e) / (1 + (|\mathbf{p}'|^2/m_e^2 c^2))^{1/2} \quad (5-11)$$

となる。ただし、 $|\mathbf{v}'|$ と $|\mathbf{p}'|$ はそれぞれ、3次元のベクトル (v_x', v_y', v_z') と (p_x', p_y', p_z') の絶対値である。こうして、(5-9)の右辺に現れる積分は $\mathbf{p}'$ だけを用いて書き表され、これと(5-6)とから

$$\omega'^2 = -\frac{\omega_p^2}{n_0} \int \frac{p_x'}{(1 + (|\mathbf{p}'|^2/m_e^2 c^2))^{1/2}} \frac{\partial f_0'}{\partial p_x'} dp_x' dp_y' dp_z' \quad (5-12)$$

が得られる。

これと式(3-11)とにより、 K 系での ω が求まる。

$$\omega^2 = k^2 c^2 - \frac{\omega_p^2}{n_0} \int \frac{p_x'}{(1 + (|\mathbf{p}'|^2/m_e^2 c^2))^{1/2}} \frac{\partial f_0'}{\partial p_x'} dp_x' dp_y' dp_z' \quad (5-13)$$

もしくは $|p_x'| \rightarrow \infty$ で $\lim f_0'(p_x') = 0$ であることを用いて(5-13)の右辺の積分を部分積分すれば

$$\omega^2 = k^2 c^2 - \frac{\omega_p^2}{n_0} \int \frac{1 + (p_y'^2 + p_z'^2)/(m_e^2 c^2)}{(1 + (|\mathbf{p}'|^2/m_e^2 c^2))^{3/2}} f_0' dp_x' dp_y' dp_z' \quad (5-14)$$

となる。

特に冷たいプラズマを考え、 $\int f_0' dp_x' dp_y' dp_z' = n_0' = \gamma n_0$ を考慮して

$$f_0' = \gamma n_0 \delta(p_x' + \gamma m_e V) \delta(p_y') \delta(p_z') \quad (5-15)$$

と置けば、(5-14)は前節で求めたのと同じく、 $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 / \gamma^2$ となり、結局 $\omega^2 = \omega_p^2$ が得られる。

式(5-14)で分散式は求まったが、中の積分は K_0' 系の量で表現されているので、これを K 系での量で書き表さなければならない。

K 系での位相空間の1点 (x, y, z, p_x, p_y, p_z) が与えられた時、適当なローレンツ変換によって K' 系に移り、そこでの運動量が $(p_x' = 0, p_y' = 0, p_z' = 0)$ となるようにすることが出来る。そこでそのローレンツ変換の逆変換を考えると、 K' 系での位置空間の中の体積要素 $dx'dy'dz'$ に対応する K 系での体積要素はその中の各点の位置を同一時刻で測らなければならない、との制約によって、ローレンツ収縮を受けて、 $dx dy dz = dx' dy' dz' / \gamma_p$ に変換される。ここで γ_p はその運動量に対応する速度を v とする時、

$$\gamma_p = (1 - |v|^2/c^2)^{-1/2} = (1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)^{1/2}$$

で与えられる。

一方、電子の運動量4ベクトルは

$$p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_e^2 c^2 \quad (5-16)$$

を満たさなければならない、という制約を持つが、「同一時刻」に類した制約は受けないのでその体積要素 $dp_x' dp_y' dp_z'$ は素直に $dp_x dp_y dp_z = \gamma_p dp_x' dp_y' dp_z'$ に変換される。そこで、このような K' 系を間に介在させて考えることにより、任意のローレンツ変換に対して $dp_x dp_y dp_z / \gamma_p$ が不変であることが判る。(なお、(5-16)を用いると、 γ_p は実は $p_0 / m_e c$ に等しいことが分かる。)

以上のことから位相空間の体積要素は

$$\begin{aligned} d^{(6)}V &= dx dy dz dp_x dp_y dp_z \\ &= dx' dy' dz' dp_x' dp_y' dp_z' \end{aligned}$$

となってローレンツ不変である[6]。従って分布関数

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \equiv f(x, y, z, p_x, p_y, p_z; t)$$

もローレンツ変換に対して不変である。すなわち、 K 系での分布関数 f と K' 系での分布関数 f' との間には

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \\ = f'(x', y', z', p_x', p_y', p_z'; t') \end{aligned} \quad (5-17)$$

が成立する。ただしここで、引数の意味はやや面倒である。まず、 x', y', z', t' は x, y, z, t からローレンツ変換(2-1)により得られた K' 系での時空座標を、時刻がすべての点で t' となるように書き直したものである。また p_x', p_y', p_z' は p_x, p_y, p_z に(5-16)を用いて p_0 を補って得られる4ベクトル (p_0, p_x, p_y, p_z) に(2-1)と同形のローレンツ変換

$$\begin{cases} p_0' = \gamma(p_0 - (V/c)p_x) \\ p_x' = \gamma(p_x - (V/c)p_0), \\ p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \end{cases} \quad (5-18)$$

を施して得られる4ベクトル (p_0', p_x', p_y', p_z') の空間分布である。

K 系において一様定常な分布 $f_0(p_x, p_y, p_z)$ はローレンツ変換によって、 K_0' 系でのやはり一様定常な分布 $f_0'(p_x', p_y', p_z')$ に変換され、かつ(5-17)により

$$f_0(p_x, p_y, p_z) = f_0'(p_x', p_y', p_z') \quad (5-19)$$

が成立する。そして一方、 $\mathbf{p}$ 空間での体積要素に関しては $dp_x dp_y dp_z / \gamma_p$ がローレンツ不変であるから、(5-14)から

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k^2 c^2 + \frac{\omega_p^2}{n_0} \\ &= \int \frac{(1 + (p_y^2 + p_z^2)/m_e^2 c^2) f_0 dp_x dp_y dp_z}{(1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)(1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5-20)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}'|^2 &= p_0'^2 - m_e^2 c^2 = \gamma^2 (p_0 - (kc/\omega)p_x)^2 - m_e^2 c^2 \\ &= \gamma^2 [(|\mathbf{p}|^2 + m_e^2 c^2)^{1/2} - (kc/\omega)p_x]^2 - m_e^2 c^2 \end{aligned} \quad (5-21)$$

である。これを代入して

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\omega_p^2}{n_0 \gamma^2}$$

$$\int \frac{(1 + (p_y^2 + p_z^2)/m_e^2 c^2) f_0 dp_x dp_y dp_z}{[(1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)^{1/2} - (k/m_e \omega) p_x]^2 (1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)^{1/2}}$$

となるが, $1/\gamma^2 = (\omega^2 - k^2 c^2)/\omega^2$ を用いて, 右辺第1項を左辺に移項し, 両辺を $\omega^2 - k^2 c^2$ で割れば,

$$1 = \frac{\omega_p^2}{n_0 \omega^2}$$

$$\int \frac{(1 + (p_y^2 + p_z^2)/m_e^2 c^2) f_0 dp_x dp_y dp_z}{[(1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)^{1/2} - (k/m_e \omega) p_x]^2 (1 + |\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2)^{1/2}} \quad (5-22)$$

を得る. これが求むる分散式である.

ここで再び冷たいプラズマの近似を用いて

$$f_0(p_x, p_y, p_z) = n_0 \delta(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z)$$

とおけば, ただちに $\omega^2 = \omega_p^2$ が得られる.

プラズマが冷たくない場合でも, 非相対論的温度的場合には $|\mathbf{p}|^2 \ll m_e^2 c^2$ を用いて (5-22) を簡単化出来る. この時, $|\mathbf{p}|^2/m_e^2 c^2 (\ll 1)$ を全て1に対して無視し, 非相対論的近似では $p_x = m_e v_x$ であることを用いれば

$$1 = \frac{\omega_p^2}{n_0} \int \frac{f_0 dp_x dp_y dp_z}{(\omega - k v_x)^2} \quad (5-23)$$

が得られる. これは, 通常速度分布関数の代わりに運動量分布関数で書いてあることを除けば, 全く通常の分散式である. ただし, $v_{ph} > c$ を反映して, v_{ph} に等しい速度を持つ電子は存在しないので, (5-23) の被積分関数の分母は0になることはなく, ランダウ減衰に相当した現象はない.

なお, 速度 $\mathbf{v}$ は運動量 $\mathbf{p}$ と関係式 (5-11) により結ばれ, 位置座標 $\mathbf{r}$ には直接には関係しないことを用いると, 実は, K 系での kinetic equation (5-3) は普通の非相対論の場合と同じ方法で解くことが出来, K' 系での議論を経由せずに分散式も求まる[7]. しかし, ここでは K' 系の応用の一例として, K 系と K' 系との間のローレンツ変換の説明を兼ねて, K' 系を経由して分散式を求めて見せたものである.

6. あとがき

以上で, 超光速の位相速度をもつ波は適当な運動座標系に移ることにより, 空間的に平坦で時間的にだけ振動する存在に変換されることを示し, 線形のプラズマ振動を例として, その取り扱いを示した. 静電波の代表であるプラズマ振動が, それが平坦に見える座標系ではまったく違った物理的描像で解釈される所が面白い.

このような座標系は, 波が定常に見える座標系と同様に, 非線形の波の考察に有用であると思われる. 幾つかの非線形波の相互作用も, その一つが空間的に一様な振動であれば, 考察が著しく簡単になる. 参考文献の[2-4]はそのような問題を解析的に取り扱った論文である. しかし, あまり著しい結果を出しているようには見えない. その可能性を追求することはむしろ今後の問題であるようにも思われる. また, この座標系は問題によってはシミュレーション研究の場として有用であるかも知れない. それらの研究で, この解説で行った幾つかの考察が役に立てば幸いである.

参考文献

- [1] 例えば, J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd edition (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975) p. 521.
- [2] B. B. Winkles and O. Eldridge, *Phys. Fluids* **15**, 1790 (1972).
- [3] P. C. Clemmov, *J. Plasma Physics* **12** (1974) 297; **13**, 231 (1975); **17**, 301 (1977).
- [4] S. N. Paul and B. Chakraborty, *Physica B & C* **122B+C**, 139 (1983).
- [5] 例えば, 伏見康治: 現代物理学を学ぶための古典力学 (岩波, 1964) p. 198.
- [6] 例えば, 平川浩正: 相対論 (共立出版, 1971) p. 59. ただし, そこでの説明は運動量空間での体積要素をとる際に (5-16) を考慮してない, という不満はあるが, それは容易に補うことが出来る.
- [7] 例えば, D. C. Montgomery and D. A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1964) Sec. 10. 2.