



自己組織化現象の固有関数スペクトル解析

近藤 信一, 近藤 義臣

(群馬大学工学部)

(1995年3月9日受理/1995年6月27日改訂原稿受理)

Eigenfunction Spectrum Analysis for Self-Organization Phenomena

KONDOH Nobukazu and KONDOH Yoshiomi

Department of Electronic Engineering, Gunma University, Kiryu 376, Japan

(Received 9 March 1995/revised manuscript: received 27 June 1995)

Abstract

An attractor of the dissipative structures for magnetic fields in the magnetohydrodynamic (MHD) plasmas is studied with use of an eigenfunction spectrum analysis associated with the dissipative dynamical operator [Phys. Rev. **E49**, 5546 (1994)]. Using the eigenfunction spectrum analysis, it is shown that there appear spectrum transfers towards both the higher and the lower eigenmodes, i.e. the normal and the inverse energy cascades, during the self-organization process in the three-dimensional MHD simulations. Two basic processes of "energy transfer" and "selective dissipation" among "components of eigenmodes" are shown to lead to the final coherent structure with the lowest eigenmode of the dissipative operator.

Keywords:

dissipative operator, dissipative structure, self-organization, spectrum transfer, energy cascade, eigenfunction,

1. 序 論

散逸を伴う非線形力学系で、各々の系に固有の構造として現れる散逸構造は多くの分野で興味ある研究対象となっている。散逸構造あるいは自己組織化と呼ばれる概念は熱力学系における種々の秩序化した構造として I. Prigogine によって提唱されてきた[1,2]。宇宙磁場における無力磁場配位[3,4]や、逆磁場ピンチ (RFP) [5,6,7]および単純トロイダル Z ピンチ[8,9,10]などの核融合実験プラズマでの自己組織化した緩和状態も、こ

の散逸構造の概念に含めることができる。

核融合実験プラズマでの自己組織化現象は、ZETA 装置における RFP 磁場配位の自律的形成[5]によって注目を集め、実験やシミュレーション並びに理論モデルの提唱など数多くの研究報告がなされている[11-19]。J.B. Taylor はこの RFP 配位を説明するために全磁気ヘリシティの時間不変量の仮説とエネルギー原理を用いて無力磁場配位 $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ (λ は定数) を導いた[11,12]。この Taylor state と呼ばれる無力磁場配位は、

RFP やスフェロマックの緩和状態の全体的な特徴を良く説明してきた[5,11,12]. しかし, 二つのスフェロマックの合体実験における緩和状態の一つとして自己形成される反転磁界配位(FRC) [20]や, この FRC プラズマのアスペクト比を大きくして円筒近似したと見ることでできる Z ピンチプラズマにおける自己組織化現象[21]は Taylor state $\nabla \times B = \lambda B$ では決して表現できない. 更に, 文献[22,23]で報告された MHD プラズマの 3 次元シミュレーションの結果では, 一様な抵抗分布の場合には Taylor state $\nabla \times B = \lambda B$ へ緩和して行くけれど, 非一様な抵抗分布では Taylor state $\nabla \times B = \lambda B$ へは向かわず抵抗の空間分布に依存した状態へと緩和していくことが示されている.

最近になって, 著者の一人 (Y. Kondoh) は「自己組織化した状態を構成する散逸構造のアトラクターを探す一般理論[24,25]」を提案し, このアトラクターがその力学系の散逸力学オペレータ (一般的に空間分布を持つ散逸パラメータを内に含む) の固有関数で与えられることを導いた. この一般理論を拡張すると, 系の構造を支配している物理量の各時刻における分布が, 散逸力学オペレータに随伴する固有関数でスペクトル展開することができるので, 磁気ヘリシティを用いる Taylor の理論では扱えない非一様な抵抗分布を持つ場合[23]や Z ピンチの場合[21]の自己組織化現象も各スペクトル成分によって詳しく追跡することが可能となる. 自己組織化した状態としての散逸構造は, 平衡から遠く離れた状態を経て自律的に形成され, その力学系固有の空間構造を持つ. この自己組織化する過程を, 散逸オペレータの固有関数に関して系が持つ固有値モードのスペクトル変化という立場でとらえると, 系が平衡から遠く離れていく過程では, 初期に与えたモードスペクトルに対し, 支配的な非線形項により高低両固有値モードへのスペクトル遷移が起こり, 平衡から遠い状態にある系が構造を自律的に形成する過程では, 高い固有値を持つ高モードスペクトル成分ほど速く散逸する選択的散逸が起こると考えられる. また, 系に散逸構造のアトラクターが

現れるようなコヒーレントな状態 (self-similar change phase) では, 基本モード或いは基本モードと最小固有値モードの重畳されたスペクトルで構成された空間構造が形成されていると考えられる. 従って, 自己組織化過程における散逸構造の発展と系固有の構造形成を, 系が持つ物理量の散逸オペレータに関する固有値モードスペクトルを解析することによって明らかにする事ができると考えられる.

従来は主に全磁気ヘリシティと全磁気エネルギーの 2 つの物理量の間を選択的散逸と, 各散逸率のフーリエ展開によるスペクトルの平均波数の自乗の時間変化を用いた自己組織化過程の分析が行われてきた[26,27,28]. 一般にフーリエ解析のような三角関数 (直交関数) やそれ以外の直交関数を用いても, それらの固有値モード成分が選択的に散逸していくことを示すことはできる. しかし, それらの固有関数を用いた場合には, その最小固有モードによっては一般的に系が自己組織化していく描像と, 自己組織化した最終状態である self-similar change phase を導くことはできない. 系での散逸は, 散逸オペレータによってのみ起こるから, 一般的には空間分布を持つ散逸パラメータを内に含む散逸オペレータに随伴する固有関数のスペクトル上で現象を追跡することによって, はじめて散逸自己組織化過程の描像を明らかにすることが可能となる.

本論文では, 磁気ヘリシティに基礎を置く Taylor の理論[11]を用いずに, MHD プラズマの散逸緩和過程について簡単のために一様抵抗分布を仮定し, 圧力を無視した $\beta = 0$ の三次元 MHD シミュレーションを行い, 散逸オペレータの固有関数スペクトル解析を通して描き出せる自己組織化の詳細な挙動について報告する. 『散逸構造のアトラクター』, 『スペクトル遷移と選択的散逸』, 『支配的オペレータの交代』, 『非線形モード間結合及び磁場と速度場相互間のエネルギー輸送』並びに『各時刻におけるスペクトルの描像』など, 自己組織化現象の重要な基礎物理過程について, 散逸力学オペレータに随伴する固有関数のスペクトル上で追跡した (一様抵抗分布を仮定し

でも物理的描像の本質は変わらない)。第2節では、自己組織化のアトラクターを導く Y. Kondoh の一般理論[21, 24, 25]を MHD プラズマへ適用し、散逸力学オペレータに随伴する固有関数スペクトル解析について述べる。第3節では、三次元 MHD シミュレーションの空間データに固有関数スペクトル解析を適用した結果を示し、自己組織化現象の基礎物理過程について議論する。

2. 理論的背景

この節では自己組織化のアトラクターを導く Y. Kondoh の一般理論[21, 24, 25]を、MHD プラズマに適用した場合の解析解並びに固有関数スペクトル解析について述べる。

いま、系が n 個の要素 $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = \{q_1(t, \mathbf{x}), q_2(t, \mathbf{x}), \dots, q_n(t, \mathbf{x})\}$ を持つような一般的な散逸性非線形力学系は次式で表現できる。

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = L_i^N[\mathbf{q}] + L_i^D[\mathbf{q}]. \quad (1)$$

ここで $L_i^N[\mathbf{q}]$ 及び $L_i^D[\mathbf{q}]$ は、各々非散逸的および散逸的な線形もしくは非線形力学オペレータである。観測の立場から表現すると、自己組織化した状態の散逸構造はその力学系が不安定状態を経て高低両側へのスペクトル遷移と散逸の後にコヒーレントな構造を実現した状態として同定される。この力学系固有の空間構造を持つ自己組織化した状態は、緩和した時刻 t_R とその後の時刻 $t_R + \Delta t$ の間の自己相関量 $q_i(t_R, \mathbf{x}) q_i(t_R + \Delta t, \mathbf{x})$ が最大であるという定義を出発点として、系の全体積にわたる全自己相関量 $W_{ii}(t) \equiv \int q_i(t, \mathbf{x}) q_i(t, \mathbf{x}) dV = \int [q_i(t, \mathbf{x})]^2 dV$ およびその散逸率 $\partial W_{ii}/\partial t$ を用いて、定義式[I]のように定式化することができる[21, 24, 25]。

$$[I]: \text{the state with } \min \left| \frac{\partial W_{ii}}{\partial t} \right| \text{ for a given value of } W_{ii} \text{ at } t = t_R.$$

この定義[I]は、散逸力学系にコヒーレントな空間構造を持つ状態が現われたことは各時刻の全自

己相関量に対して自己相関量の変化率が最小となる緩和状態が現れることと等価であることを示している。

いま以下の式で記述される粘性、熱伝導および圧力を無視した圧縮性でゼロ $\beta[p/(B^2/2\mu_0) = 0]$ の散逸のある MHD プラズマの系を考える[23]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}). \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{j}). \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

この系での全自己相関量とその散逸率は、 $W_{ii} = 2 \int [B^2/2\mu_0 + \rho \mathbf{u}^2/2] dV$ および $\partial W_{ii}/\partial t = -(2/\mu_0) \int [\mathbf{B} \cdot \nabla \times (\eta \mathbf{j})] dV$ と書ける。Lagrange 未定乗数 α を用いて汎関数 F を定義すると定義式[I]の数学的表現は次のように記述することができる。

$$F \equiv \left| \frac{\partial W_{ii}}{\partial t} \right| - \alpha W_{ii}. \quad (6)$$

$$\delta F = 0. \quad (7)$$

$$\delta^2 F > 0. \quad (8)$$

ここで、 δF と $\delta^2 F$ は各々空間変数 \mathbf{x} に関する第一変分と第二変分である。(4)式に含まれる散逸力学オペレータ $L_i^D[\mathbf{q}] = -\nabla \times (\eta \mathbf{j})$ は、次のような自己随伴性 (self-adjoint property) を満たすオペレータである[21, 24, 25]。

$$\int q_i \delta L_i^D[\mathbf{q}] dV = \int \delta q_i L_i^D[\mathbf{q}] dV + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9)$$

ただし、 $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ はガウスの定理より求められる表面積分を示す。 W_{ii} と $\partial W_{ii}/\partial t$ を(6)式~(8)式に代入して、この自己随伴性(9)式を用いると

第一変分の体積積分の項から次の Euler-Lagrange 方程式(10)式と(11)式が導かれ, (3)式および(4)式を使って平衡方程式(12)式が導ける[21,24,25].

$$\nabla \times (\eta \mathbf{j}^*) = \frac{\alpha}{2} \mathbf{B}^*. \quad (10)$$

$$\mathbf{u}^* = 0, \quad \rho^* \mathbf{u}^* = 0. \quad (11)$$

$$\mathbf{j}^* \times \mathbf{B}^* = 0, \quad \nabla \times (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) = 0 \quad (12)$$

この(10)式は与えられた \mathbf{B}^* の境界値に対する境界値問題として解くことができ, 固有関数 \mathbf{B}^* は以下の式を満たす.

$$\frac{\partial W_{ii}}{\partial t} = -\alpha \int \frac{(\mathbf{B}^*)^2}{\mu_0} dV = -\alpha W_{ii}^*. \quad (13)$$

$$W_{ii}^* = e^{-\alpha t} W_{iiR}^* = \int \frac{[\mathbf{B}_R^*(\mathbf{x}) e^{-\alpha t/2}]^2}{\mu_0} dV. \quad (14)$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_R^*(\mathbf{x}) e^{-\alpha/2t}. \quad (15)$$

ここで \mathbf{B}_R^* , W_{iiR}^* は緩和した状態での解を示す. 境界条件を $\mathbf{a}_w \cdot d\mathbf{S} = 0$ と $[\eta(\nabla \times \mathbf{a}_w) \times \mathbf{a}_w] \cdot d\mathbf{S} = 0$ (添字 w は壁での境界値を示す) によって与えると, 境界上で第二変分が0となるような臨界摂動を決める固有値方程式は次式となる[21,24,25].

$$\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{a}_k) - \frac{\mu_0 \alpha_k}{2} \mathbf{a}_k = 0. \quad (16)$$

(16)式における固有関数 \mathbf{a}_k は自己随伴性(9)により次のように規格化することによって正規直交関数系を構成する.

$$\begin{aligned} \int \mathbf{a}_k \cdot [\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{a}_j)] dV &= \int \mathbf{a}_j \cdot [\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{a}_k)] dV \\ &= \frac{\mu_0 \alpha_k}{2} \int \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k dV \\ &= \frac{\mu_0 \alpha_k}{2} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (17)$$

この(17)式は各時刻において抵抗 η に空間依存性があるときでも成り立ち, 参考文献[22,23]で報告されたような非一様抵抗の場合の自己組織化状

態への適用が可能となる. 文献[23]で非一様抵抗の場合には抵抗分布に依存した(10)式の近似解へ自己組織化した状態が漸近することをシミュレーションによって検証している. (17)式の正規直交固有関数系 \mathbf{a}_k と境界値問題(10)式の固有解 \mathbf{B}^* を使って, 各時刻の磁場分布 \mathbf{B} は次の様に散逸力学オペレータに随伴する固有関数でスペクトル展開できる[21,24,25].

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{a}_k. \quad (18)$$

(18)式を(4)式に代入し(10)式と(16)式を使って次の磁場の発展方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial (c_k \mathbf{a}_k)}{\partial t} &= \\ \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\alpha}{2} \mathbf{B}^* - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2} c_k \mathbf{a}_k. \end{aligned} \quad (19)$$

次に固有関数スペクトル解析について述べる. (18)式で導かれた散逸力学オペレータによる固有関数スペクトル展開は, 各時刻の磁場分布そのものであり, この力学系での散逸はオペレータ $L_i^D[\mathbf{q}] = -\nabla \times (\eta \mathbf{j})$ によってのみ起こる. 簡単のために抵抗 η が空間的に一様であると仮定し, 容器壁での境界条件を $\mathbf{a}_w \cdot d\mathbf{S} = 0$ と $[\eta(\nabla \times \mathbf{a}_w) \times \mathbf{a}_w] \cdot d\mathbf{S} = 0$ で与え, 第二変分が0となるような臨界摂動を決める固有値方程式(16)式は次式のようになる.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}_k) = \lambda_k^2 \mathbf{a}_k. \quad (20)$$

ただし $\lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_0 \alpha_k}{2\eta}}$. ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ と $\nabla \cdot \mathbf{a}_k = 0$ を使って(20)式は次のように書き換えられる.

$$\nabla^2 \mathbf{a}_k + \lambda_k^2 \mathbf{a}_k = 0. \quad (21)$$

プラズマの容器が角柱形状 $(2a, 2a, L)$ の完全導体壁とすれば固有値 λ_k は境界条件から

$$\lambda_k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{l\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2. \quad (22)$$

ここで (l, m, n) は x, y および z 方向のモード数である。変数分離を使って互いに直交する (23) 式から (28) 式と z 軸と平行な成分の (29) 式の 7 つの固有解が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{kx\perp 1} = & A_z \left\{ \frac{4an}{Lm} \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \sin \frac{m\pi}{2a} (y+a) \cos \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{j} \right. \\ & \left. - \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{k} \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{kx\perp 2} = & A_z \left\{ \frac{4an}{Lm} \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \sin \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{j} \right. \\ & \left. + \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \cos \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{k} \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ky\perp 1} = & A_z \left\{ \frac{4an}{Ll} \sin \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \cos \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{i} \right. \\ & \left. - \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{k} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ky\perp 2} = & A_z \left\{ \frac{4an}{Ll} \sin \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{i} \right. \\ & \left. + \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \cos \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{k} \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{kz\perp 1} = & A_y \left\{ \frac{m}{l} \sin \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \cos \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{i} \right. \\ & \left. - \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \sin \frac{m\pi}{2a} (y+a) \cos \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{j} \right\}. \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{kz\perp 2} = & A_y \left\{ \frac{m}{l} \sin \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{i} \right. \\ & \left. - \cos \frac{l\pi}{2a} (x+a) \sin \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{j} \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_{kw} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (添字 w は壁での境界値を示す) を満足し $n=0$ の場合の解は

$$\mathbf{a}_{kz\parallel 1} = \pm \frac{1}{a\sqrt{L}} \sin \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \mathbf{k}. \quad (29)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は各軸方向の単位ベクトル, 係数 A_y と A_z は規格化条件 $\int_V \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j dV = \delta_{kj}$ と $\nabla \cdot \mathbf{a}_k = 0$ を用いて次のように求められる。

$$A_z = \pm \left\{ \frac{a^2 L}{2} \left[\left(\frac{4an}{Ll} \right)^2 + 1 \right] \right\}^{-1/2}, \quad [l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1].$$

$$A_y = \pm \left\{ \epsilon_n \frac{a^2 L}{2} \left[\left(\frac{m}{l} \right)^2 + 1 \right] \right\}^{-1/2}, \quad [l \geq 1, m \geq 1, n \geq 0].$$

ただし, $n=0$ の時は $\epsilon_n=2$, $n \geq 1$ の時は $\epsilon_n=1$.

(27) 式, (29) 式の最低固有モード $(1, 1, 0)$ の和 $\mathbf{B}^* = \mathbf{a}_{kz\perp 1}(1, 1, 0) + \mathbf{a}_{kz\parallel 1}(1, 1, 0)$ は Taylor の求めた $\nabla \times \mathbf{B}^* = \lambda \mathbf{B}^*$ と一致する。3次元 MHD シミュレーションによる磁場 \mathbf{B} の空間データと上記の固有解 (23) 式~(29) 式の内積をとり, 正規直交条件 (17) 式を用いると各時刻のスペクトル成分 c_k が得られる。

次に速度場 \mathbf{u} のスペクトル展開を考える。各時刻の速度場は非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{a}_k = 0$ の成分 (23)~(29) 式と圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{b}_j \neq 0$ の直交関数系の成分

(例えば, $\mathbf{b}_j = A_z \sin \frac{l\pi}{2a} (x+a) \cos \frac{m\pi}{2a} (y+a) \sin \frac{2n\pi}{L} z \mathbf{k}$) を使って次のようにスペクトル展開できる。

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{kn} \mathbf{a}_k + \sum_{j=1}^{\infty} v_{jc} \mathbf{b}_j. \quad (30)$$

ただし, v_{kn} , v_{jc} はそれぞれ速度場の非圧縮性と圧縮性のスペクトル成分である。自己組織化の物理現象には圧縮性が十分影響すると考えられるが, ここでは簡単のために非圧縮性のスペクトル成分 v_{kn} についてのみ取り扱う。固有解 (23) 式~(29) 式を用いて非線形項 $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ の各固有解の組み合わせを計算する。以下にその一例を示す。

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{u}_{kx \perp 1} \times \mathbf{a}_{ky \perp 1}) = & \\
\left\{ K_{x1} \left[\sin \frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} (x+a) - \sin \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] \right. & \\
\cdot \left[\frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} \cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right. & \\
+ \left. \frac{(m_u - m_b) \pi}{2a} \cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\cos \frac{(n_u + n_b) \pi}{L} z - \cos \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} z \right] & \\
+ K_{x2} \left[\sin \frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} (x+a) - \sin \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] & \\
\cdot \left[\cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) + \cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\frac{2(n_u + n_b) \pi}{L} \cos \frac{2(n_u + n_b) \pi}{L} z \right. & \\
- \left. \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} \cos \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} z \right] \Big\} \mathbf{i} & \\
+ \left\{ K_{y1} \left[\cos \frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} (x+a) + \cos \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] \right. & \\
\cdot \left[\sin \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) + \cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\frac{2(n_u + n_b) \pi}{L} \cos \frac{(n_u + n_b) \pi}{L} z \right. & \\
- \left. \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} \cos \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} z \right] & \\
+ K_{y2} \left[\frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} \cos \frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} (x+a) \right. & \\
- \left. \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} \cos \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] & \\
\cdot \left[\sin \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) + \sin \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\cos \frac{2(n_u + n_b) \pi}{L} z + \cos \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} z \right] \Big\} \mathbf{j} & \\
+ \left\{ K_{z1} \left[\frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} \cos \frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} (x+a) \right. \right. & \\
- \left. \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} \cos \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] & \\
\cdot \left[\cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \cos \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\sin \frac{(n_u + n_b) \pi}{L} z + \sin \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} z \right] & \\
+ K_{z2} \left[\cos \frac{(l_u + l_b) \pi}{2a} (x+a) + \cos \frac{(l_u - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] & \\
\cdot \left[\frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} \sin \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right. & \\
+ \left. \frac{(m_u - m_b) \pi}{2a} \sin \frac{(m_u + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\sin \frac{2(n_u + n_b) \pi}{L} z - \sin \frac{2(n_u - n_b) \pi}{L} z \right] \Big\} \mathbf{k}. & \quad (31)
\end{aligned}$$

ここで, $K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}, K_{z1}, K_{z2}$ は係数, (l_u, m_u, n_u) および (l_b, m_b, n_b) は速度場と磁場の x, y, z 方向のモード数, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は各軸方向の単位ベクトルである. 同様に固有解(23)式~(29)式と $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$ の関係を用いて, 非線形項 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ の各固有解の組み合わせを計算する. 以下にその計算結果の一例を示す.

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{kx \perp 1} \times \mathbf{a}_{kx \perp 2} = & \\
\left\{ A J_{x1} \left[\sin \frac{(l_j + l_b) \pi}{2a} (x+a) + \sin \frac{(l_j - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] \right. & \\
\cdot \left[\cos \frac{(m_j - m_b) \pi}{2a} (y+a) - \cos \frac{(m_j + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\sin \frac{2(n_j + n_b) \pi}{L} z - \sin \frac{2(n_j - n_b) \pi}{L} z \right] & \\
- A J_{x2} \left[\sin \frac{(l_j + l_b) \pi}{2a} (x+a) + \sin \frac{(l_j - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] & \\
\cdot \left[\cos \frac{(m_j + m_b) \pi}{2a} (y+a) + \cos \frac{(m_j - m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\sin \frac{2(n_j + n_b) \pi}{L} z + \sin \frac{2(n_j - n_b) \pi}{L} z \right] \Big\} \cdot \mathbf{i} & \\
- \left\{ A J_{y1} \left[\cos \frac{(l_j + l_b) \pi}{2a} (x+a) + \cos \frac{(l_j - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] \right. & \\
\cdot \left[\sin \frac{(m_j + m_b) \pi}{2a} (y+a) + \sin \frac{(m_j - m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\sin \frac{2(n_j + n_b) \pi}{L} z + \sin \frac{2(n_j - n_b) \pi}{L} z \right] \Big\} \cdot \mathbf{j} & \\
+ \left\{ A J_{z1} \left[\cos \frac{(l_j + l_b) \pi}{2a} (x+a) + \cos \frac{(l_j - l_b) \pi}{2a} (x+a) \right] \right. & \\
\cdot \left[\cos \frac{(m_j - m_b) \pi}{2a} (y+a) - \cos \frac{(m_j + m_b) \pi}{2a} (y+a) \right] & \\
\cdot \left[\cos \frac{2(n_j - n_b) \pi}{L} z - \cos \frac{2(n_j + n_b) \pi}{L} z \right] \Big\} \cdot \mathbf{k} &
\end{aligned}$$

ここで, $A_{J_{x1}}, A_{J_{x2}}, A_{J_{y1}}, A_{J_{z1}}$ は係数, (l_j, m_j, n_j) および (l_b, m_b, n_b) は電流と磁場の x, y, z 方向のモード数である. これら(31)式および(32)式の計算結果は, 磁場 B と速度場 u の x, y, z 方向の各モードが各々結合して, 和および差のモードが生成されることを示している. 速度場は $j \times B$ により, 磁場は $\nabla \times (u \times B)$ のオペレータによって新しいモードの励起が次々と起こり, 高低両固有値モードへのスペクトル遷移が同時刻に並行して起こっていくことを示している. 以上の計算結果と(19)式の発展方程式から次のことがわかる. 系が不安定な状態になると $L_i^N[q]$ と $L_i^D[q]$ の両オペレータによる非線形過程によって, スペクトル成分 c_k ($k=0, 1, 2, \dots$) 上で高低両モードへのスペクトル遷移が起こる. 更にこのスペクトル上では $L_i^D[q]$ によって必然的に高モード成分ほど速く散逸する選択的散逸が起こる. これらが同時に進行する結果および支配的力学オペレータの交代[32]が起こる結果として, (15)式で表されるような(一般的には抵抗分布の空間依存性を内に含むが)期間の長い自己組織化した self-similar change phase が出現する.

更に, この系における全磁気エネルギー W_m は各時刻のスペクトル成分 c_k とスペクトル展開(18)式および $\int a_k \cdot a_i dV = \delta_{ki}$ の条件を用いて以下のように表される.

$$W_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int (B^{*2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k a_k \cdot B^*) dV + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right]. \quad (33)$$

上記(33)式の c_0 は基本モード B^* に対応するので, 右辺第1項の積分は c_0^2 となり, 各時刻の磁気エネルギー・スペクトル成分 c_k^2 の総和から以下のように求められる.

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2. \quad (34)$$

また, 運動エネルギー W_k は(30)式と $\int a_k \cdot a_i dV$

$= \delta_{ki}$ と $\int b_j \cdot b_i dV = \delta_{ji}$ の条件を用いて次式のよ

$$W_k = \int \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v_{kn}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} v_{jc}^2 \right\}. \quad (35)$$

従って, 各時刻の運動エネルギーは各時刻の速度エネルギー・スペクトル成分 v_{kn}^2, v_{jc}^2 の総和から求められる.

3. 固有関数スペクトル解析の結果と検討

固有関数によるスペクトル解析に用いた空間データは式(2)から式(5)の方程式を用いて3次元MHDプラズマのシミュレーションにより得られたものである. このシミュレーションは参考文献[23]で報告されたものと同様な計算手法を用い, 抵抗 η が空間的に一様な場合の結果である. シミュレーション領域は, 軸方向に長さ L の周期境界条件を使い, $x=y=\pm a$ の角柱形状の完全導体壁で囲まれている. 数値解法としては, 2次精度陽解法による Richtmyer method を用いた. 初期の密度は空間的に一定, 速度はゼロである. 計算に用いた初期パラメータは, Alfvén 速度 $v_A = 6.9 \times 10^5 \text{ m/sec}$, 磁気 Reynolds 数 $R_\eta = \mu_0 a v_A / \eta = 10^4$, 初期密度 $\rho_0 = 1.67 \times 10^{-8} \text{ kg/m}^3$ である. 初期の磁場分布は2章の固有解の中で $n=0$ の(27)式と(29)式で表される以下の force free 平衡解で与え, 乱数による微小な初期擾乱を与える.

$$\begin{aligned} B_x &= \{k_1 B_1 \sin[k_2(x+a)] \cos[k_1(y+a)] \\ &\quad + k_2 B_2 \sin[k_1(x+a)] \cos[k_2(y+a)]\} / k_0. \\ B_y &= \{k_2 B_1 \cos[k_2(x+a)] \sin[k_1(y+a)] \\ &\quad + k_1 B_2 \cos[k_1(x+a)] \sin[k_2(y+a)]\} / k_0. \\ B_z &= B_1 \sin[k_2(x+a)] \sin[k_1(y+a)] \\ &\quad + B_2 \sin[k_1(x+a)] \sin[k_2(y+a)] + B_0. \end{aligned}$$

ただし, $k_1 = n_1 \pi / 2a$, $k_2 = n_2 \pi / 2a$, $k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, ($n_1 = 3, n_2 = 1$).

Fig. 1 には典型的な緩和過程の時間発展を示す. これらの図は磁場分布のトロイダル磁束の断面を3次元的に表現した等高面を B_z の等高線で近似して描いている. 時間 t は $t = t_A / v_A$ で定義

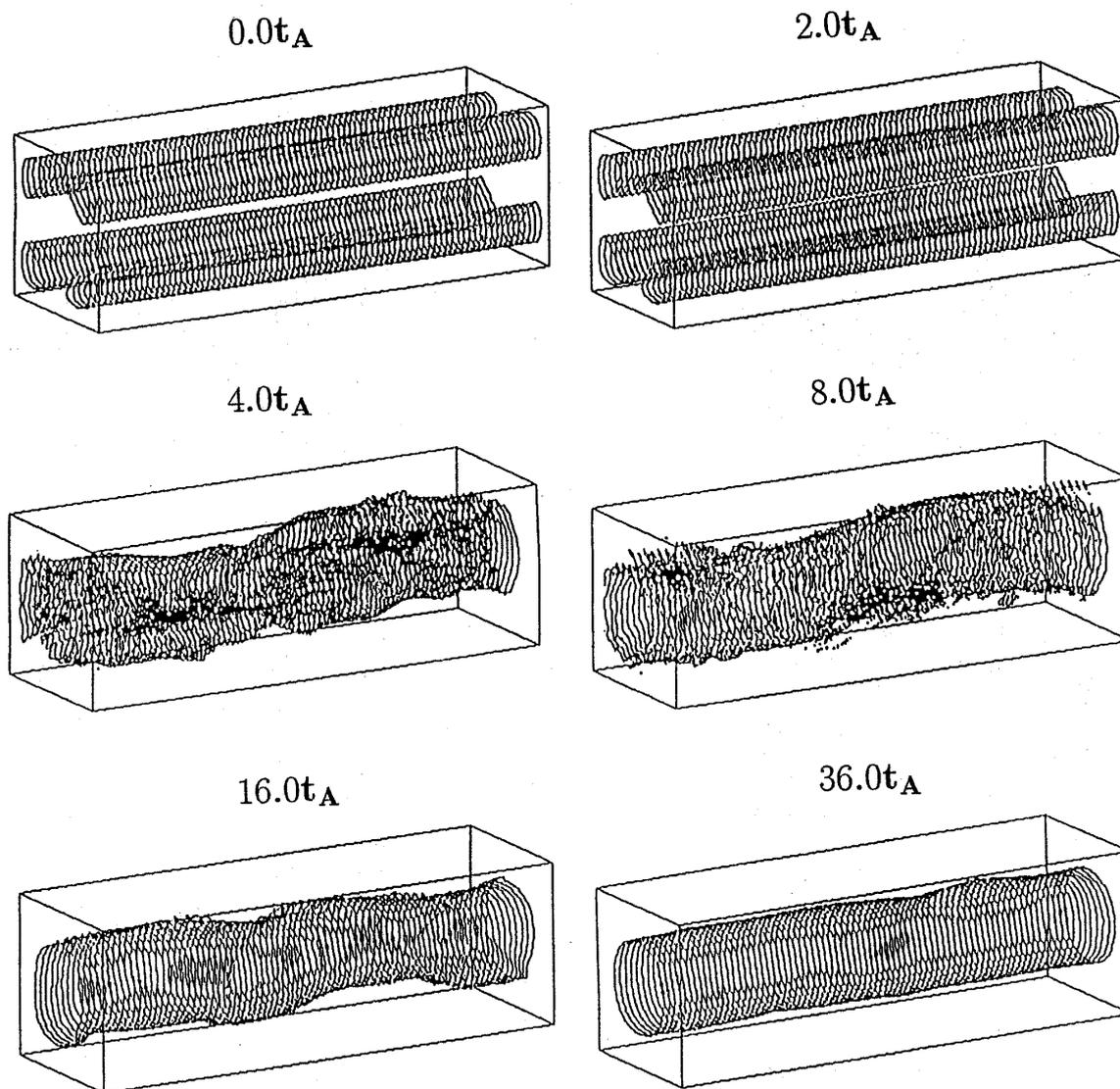


Fig. 1 Typical time evolution of three-dimensional display of the contours of the toroidal magnetic flux.

した Alfvén 時間により測っている. $t=0.0t_A$ は初期磁場(36)式の平衡解の磁場分布を示す. $t=2.0t_A$ では初期の状態から大きな構造の変化は観測されない. $t=4.0t_A$ では急激な緩和の結果, 磁気リコネクション[28]が生じて磁場の構造が大きく変化している様子が観測される. $t=16.0t_A$ になると低い固有値モードの螺旋変形が残っているものの, ほぼ構造が整っている. その後, わずかに残っていた螺旋成分がとれて, $t=36.0t_A$ になると初期に与えた構造とは全く異なる秩序構造が形成されている.

Fig. 2 は $z=L/2$ での x - y 断面におけるトロイダル磁場の等高線の時間発展を示す. $t=2.0t_A$

では磁力線の繋ぎ変えの発生する X 点 (磁気リコネクション点) で明らかな変化が確認される. $t=4.0t_A$ 及び $t=8.0t_A$ では急激な磁気リコネクションによる複雑な磁場構造 (high wave number region) が観測される. $t=16.0t_A$ では, プラズマ中心部分での秩序形成が観測される. しかし, 容器の壁に近い部分ではまだ構造の変化が起こっている. $t=36.0t_A$ になると容器の壁付近の等高線の変化が消えて磁場の構造が秩序化されている.

Fig. 3 は Fig. 1 および Fig. 2 における緩和過程と同じ時刻の磁場 B の空間データと, (23)式~(29)式を用いて得られたモード数 $l, m, n \leq 5$ の

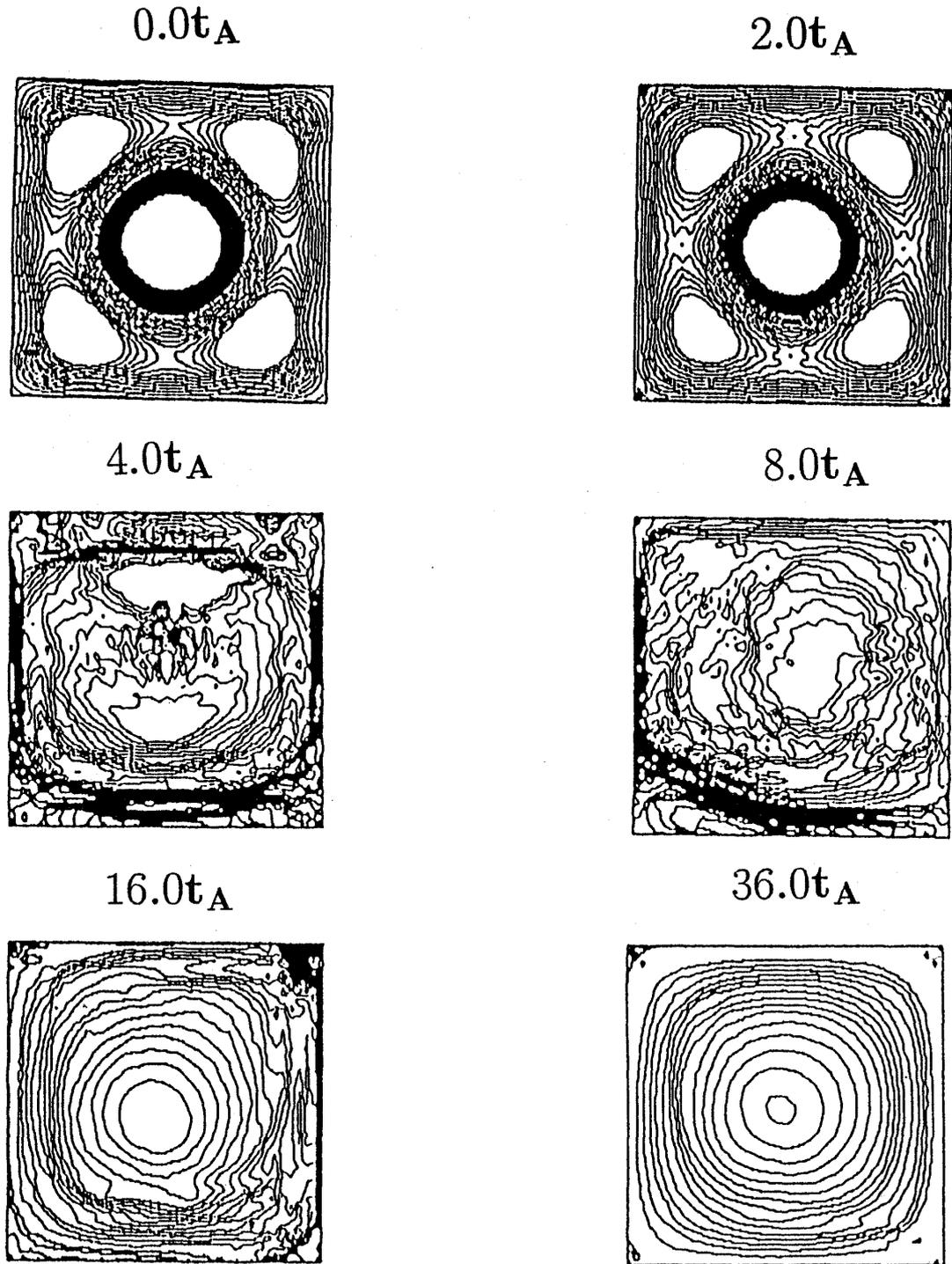


Fig. 2 Typical time evolutions of the contours of the toroidal flux on the mid-xy-plane.

範囲の各時刻のエネルギースペクトルの図である。横軸は固有値 $(\lambda_k)^2$ 、縦軸は磁場のエネルギースペクトル $(c_k)^2$ である。図中には (x, y, z) に対応するモード (l, m, n) の典型的な例が記入してある。 $t=0.0t_A$ のスペクトル成分は、(36)式で与えた初期モードスペクトル $(1, 3, 0) + (3, 1, 0)$

である。 $t=2.0t_A$ になると、初期モードより低い基本モードの $(1, 1, 0)$ と高いモードの $(3, 3, 0)$ 、 $(1, 5, 0) + (5, 1, 0)$ 、 $(3, 5, 0) + (5, 3, 0)$ の高低両固有値モードのスペクトル成分が現れ、高低両モードへのスペクトル遷移が起こっていることが分かる。 $t=4.0t_A$ になると、高低両固有値モード

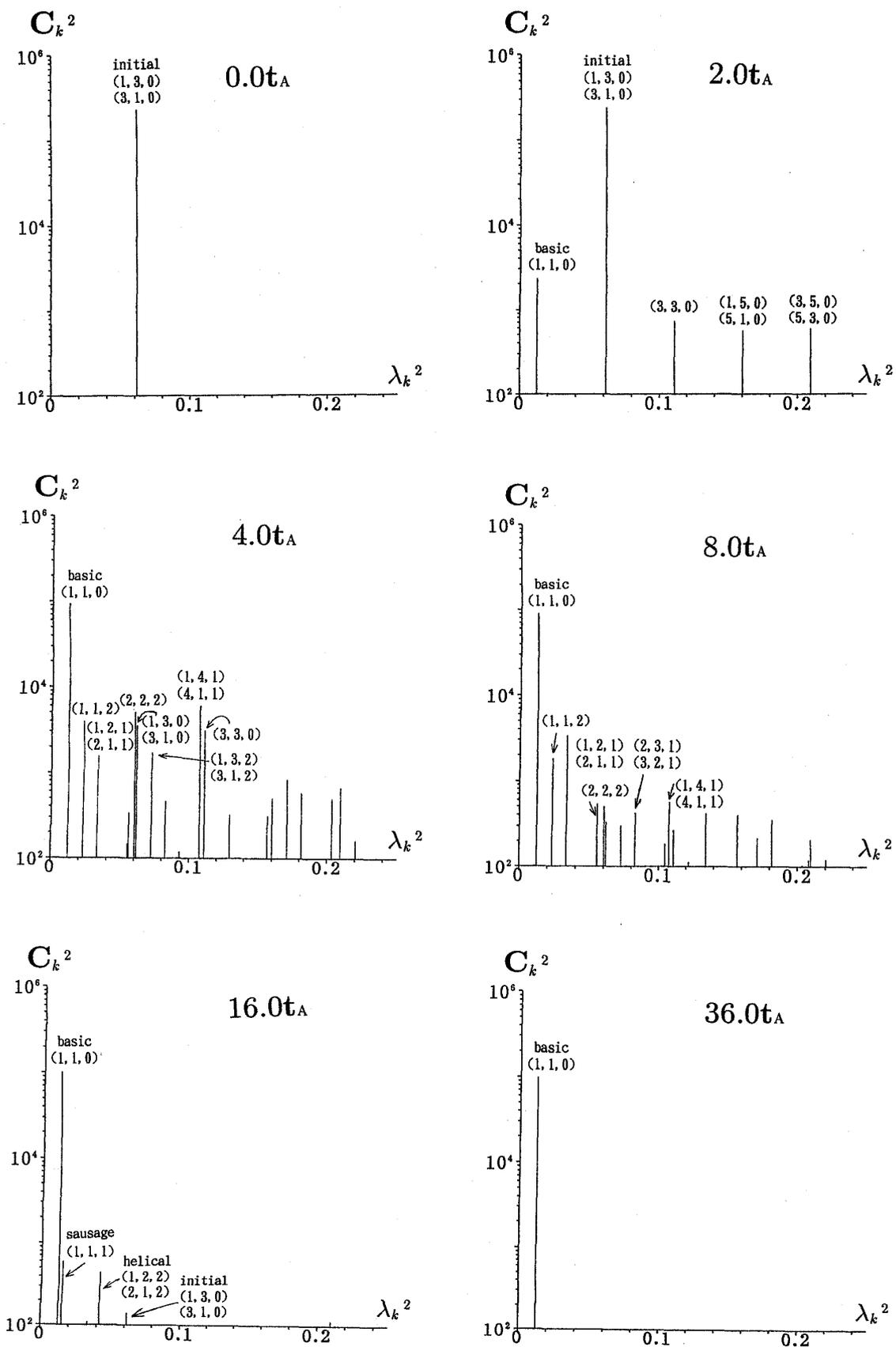


Fig. 3 Typical time evolutions of the energy spectrum distributions of the magnetic field C_k^2 for eigenvalues $\lambda_k^2 < 0.25$.

のスペクトル成分が多数発生して、ノーマルカスケード現象とインバースカスケード現象[27]がスペクトル上でほぼ並行して起こっていることを明確に確認することができる。このような高低両側へのスペクトル遷移の激しい不安定な状態では、非線形項が支配的なオペレータになっている。 $t=8.0t_A$ でも高低両固有値モードのスペクトル成分が多数発生している。しかし、 $t=4.0t_A$ に比べると高固有値モードのスペクトル成分が低固有値モードのスペクトル成分に対して減少割合が大きい傾向が見られる。すなわち、高い固有値を持つ高モード成分ほど速く散逸する選択的散逸がエネルギースペクトル上で視覚的に観測される。 $t=16.0t_A$ では基本モード(1,1,0)が大きな値で残っている。その他、sausageモード(1,1,1)とhelicalモード(1,2,2)+(2,1,2)、それに初期モードの(1,3,0)+(3,1,0)のスペクトル成分が小さな値で観測される。 $t=36.0t_A$ では、基本モード(1,1,0)のみが残り、磁場構造で観測する限り、コヒーレントな自己組織化された散逸構造が形成されている。この $t=36.0t_A$ 近くでは散逸項が支配的となり、文献[32]で報告したような支配的オペレータの交代が起こっている。

Fig. 4では、磁場スペクトルを求めた手順と同様に、速度 u の空間データと(23)式~(29)式を用いて得られた $l, m, n \leq 5$ の範囲の各時刻のエネルギースペクトルの図である。横軸は固有値 $(\lambda_k)^2$ で、縦軸は速度のエネルギースペクトル $(v_k)^2$ である。初期 $t=0.0t_A$ の速度場では平衡方程式(10)式~(12)式を満たすように与えているので $u^*=0$ であり、スペクトル成分は現れない。 $t=2.0t_A$ になると磁場の再結合に伴う流体の流れが起こり、(2,4,0)+(4,2,0)モードのスペクトル成分が現れる。これは(32)式で計算されたように、磁場のモード(1,3,0),(3,1,0)と(1,1,0)により、各々和と差の組み合わせたモード(2,4,0),(4,2,0)が現れている。 $t=4.0t_A$ になるとこの(2,4,0)+(4,2,0)のスペクトルに対して高低両固有値モードのスペクトル成分が多数観測される。これは初期に与えた磁場のエネルギーの一部が不安定性を通して流体の運動エネルギーに変換

されていることを示す。(31)式,(32)式で計算されたように、磁場は速度場に、速度場は磁場に相互作用をし、非線形モード間結合によって次々と新たなモードが励起され、不安定性の成長に伴ってスペクトル遷移が激しく起きている。 $4.0t_A, 8.0t_A, 16.0t_A$ の順に各スペクトル成分を比較すると、高固有値モード成分の減少割合が大きい。これは磁場のスペクトルの選択的散逸に伴う速度場への影響と考えられる。 $t=36.0t_A$ のスペクトルでは、(1,2,1)+(2,1,1)や(2,4,0)+(4,2,0)のモードの他、幾つかのモードが小さな値で残っている。この時刻の速度場のスペクトルでは完全な平衡状態には達していないことが示唆される。

Fig. 5にシミュレーションより得られた磁気エネルギー(太線)と運動エネルギー(細線)を、またスペクトルから計算された磁気エネルギー(\diamond)と運動エネルギー(\times)のプロットを示す。第2章の(34)式と(35)式を用いて計算した値を、磁気エネルギーの初期値で除して規格化している。スペクトルより計算された磁気及び運動エネルギーは緩和の激しい相を除く $0.0t_A \sim 3.0t_A$ と $12.0t_A \sim 36.0t_A$ の間の値はシミュレーションの結果と良く一致する。従って、緩和の激しい相を除いて運動エネルギーへの圧縮性の効果は小さいと考えられる。しかし、激しく緩和している $4.0t_A \sim 10.0t_A$ の時刻では、スペクトル成分の大きさから計算された W_m, W_k の値がシミュレーションより得られた値に対し小さな値となっている。この時刻では、磁場が盛んに磁気リコネクションを起こし、圧縮性の効果も影響して本解析に用いたモード数 $l, n, m \leq 5$ より高い固有値モードのスペクトル成分が多く現れ、スペクトルから計算された W_m, W_k の値が小さくなったものと考えられる。エネルギー緩和が激しい時刻においてのエネルギー計算を行う場合には、解析のためのモード数を高く設定する必要性が示唆される。

Fig. 6には、Fig. 3で示した磁気エネルギースペクトルの中から典型的なモードのスペクトルを選んで描いた時間発展のグラフである。各時刻の間のデータについてはスプライン補間を用いて補

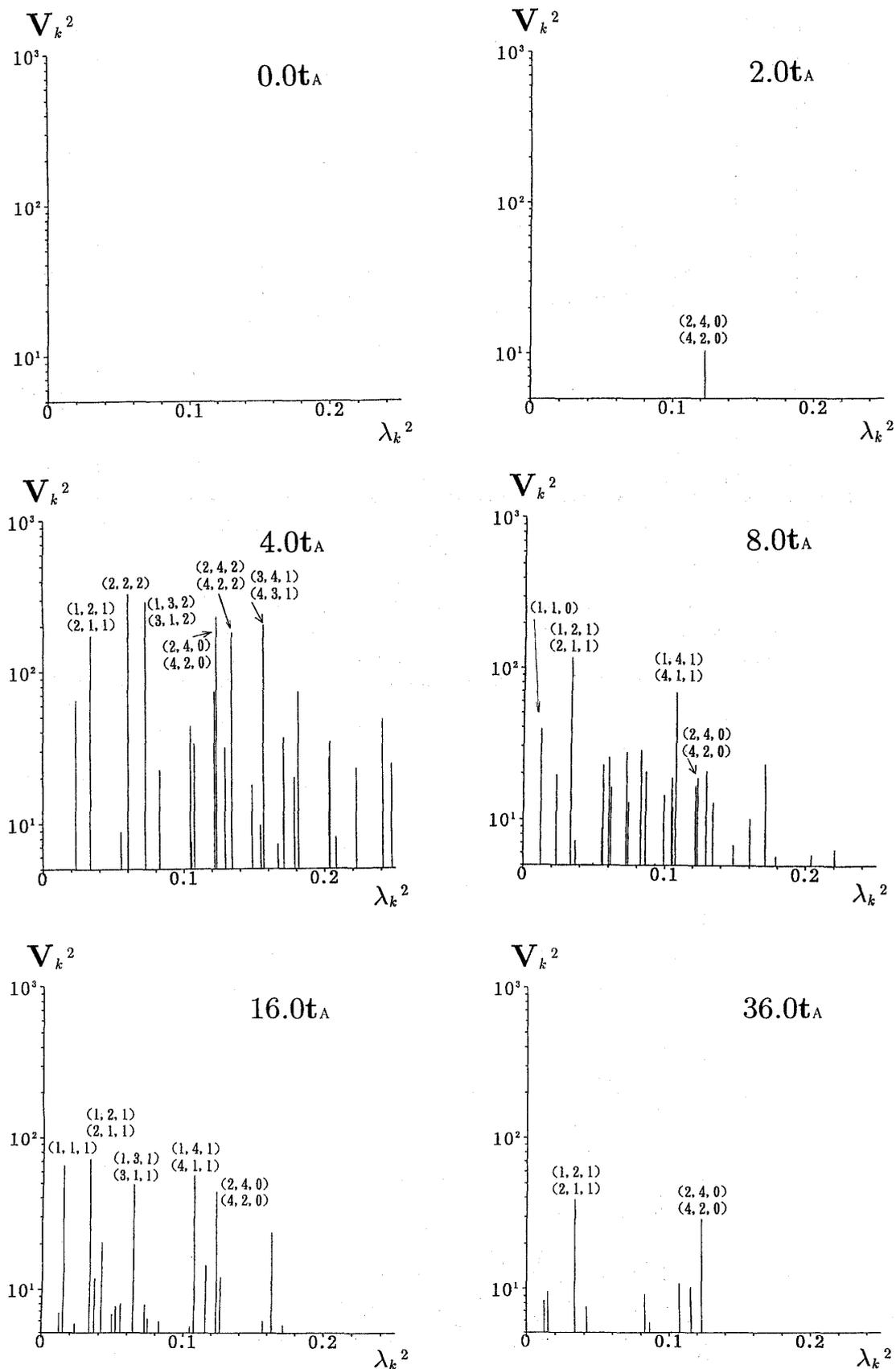


Fig. 4 Typical time evolutions of the energy spectrum distributions of the velocity V_k^2 for eigenvalues $\lambda_k^2 < 0.25$.

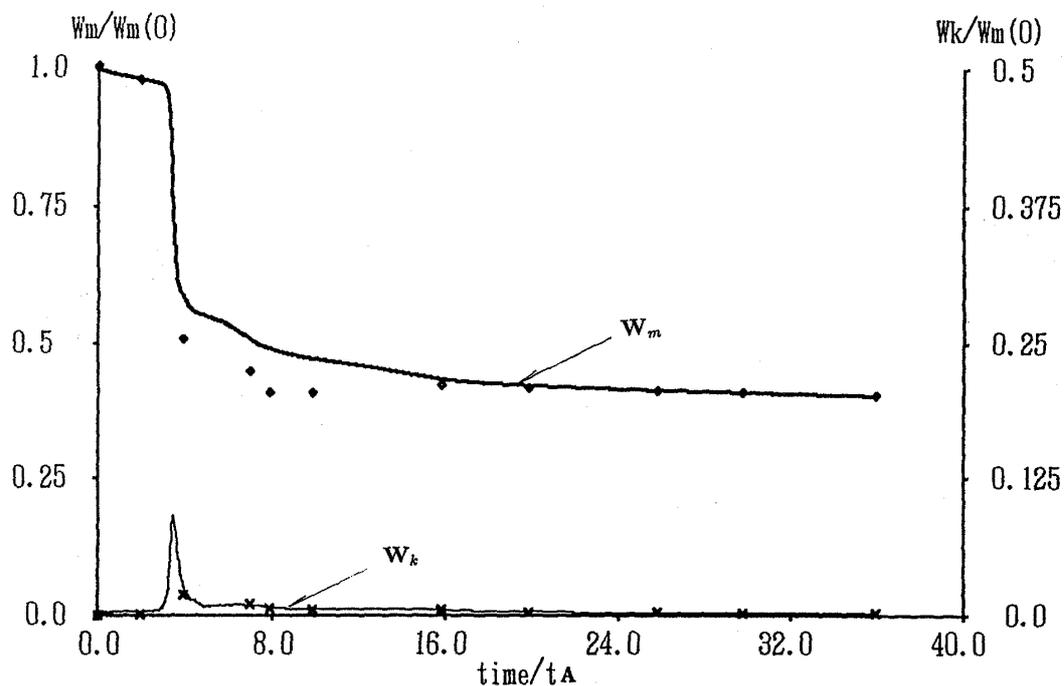


Fig. 5 Time history of the magnetic energy and the kinetic energy. The bold line shows the magnetic energy W_m and thin line shows the kinetic energy W_k . Both W_m and W_k are normalized by the initial magnetic energy. The mark \diamond and \times denote the results calculated from the energy spectrum amplitude respectively.

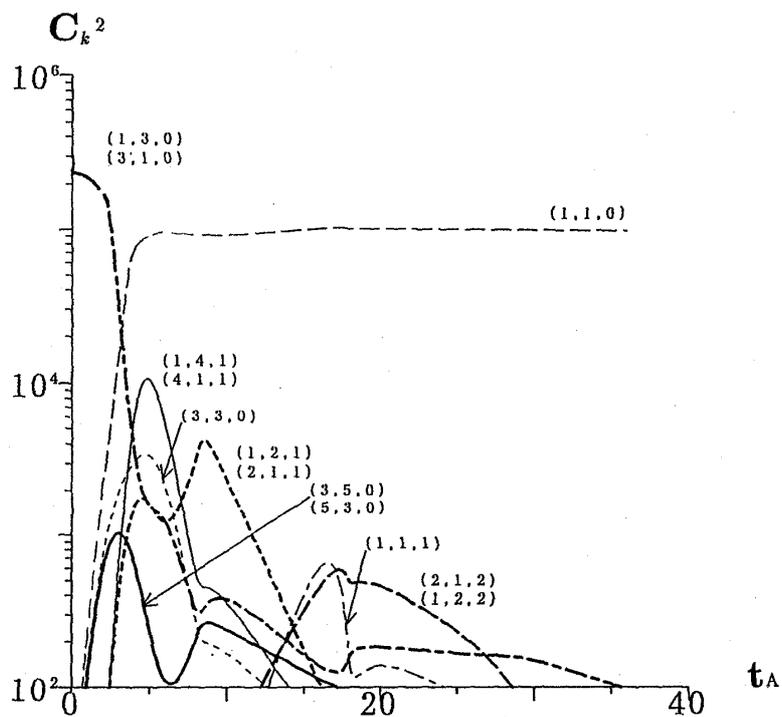


Fig. 6 Typical time history of the energy spectrum of the magnetic field.

間した. 図の最低固有値モード $(1,1,0)$ は $t=0.0t_A$ から $t=5.0t_A$ 付近まで急増し, その後 $t=36.0t_A$ までほとんど変化が見られない. 不安定性の成長が始まって間もない時刻に, 基本モード $(1,1,0)$ が成長を始め散逸構造の支配的モードとなっている. Fig. 5 のエネルギー緩和とこれらのモードの時間発展を比較すると, 不安定性の開始と同時に初期に与えた $(1,3,0) + (3,1,0)$ モードは $(1,1,0)$ の準位の低いモードと, $(3,3,0)$ と $(3,5,0) + (5,3,0)$ の準位の高いモードを励起している. $(1,1,0)$ は最低固有値モードのため, このモードにスペクトルの堆積が起こり, 早い時期に成長した後, ほぼ一定の値を保っている. $(3,3,0)$ や $(3,5,0) + (5,3,0)$ モードはこの系にとっての安定なモードではなく, 初期モード $(1,3,0) + (3,1,0)$ との非線形モード間結合によって $(1,4,1) + (4,1,1)$ や $(1,2,1) + (2,1,1)$ などのモードが次々に励起され, その後高固有値モードほど速い選択的散逸により次第に減少し, より安定な最低固有値モードの $(1,1,0)$ が残ると考えられる.

Fig. 7 には Fig. 4 で示した速度エネルギースペクトルの中から典型的なモードスペクトルを選ん

で描いた時間発展のグラフである. 磁場スペクトルの初期モード $(1,3,0) + (3,1,0)$ と励起された $(1,1,0)$ のモード間結合によって, $t=2.0t_A$ では速度スペクトルに $(2,4,0) + (4,2,0)$ のモードが励起される. 励起されたモードのスペクトルは (31)式および(32)式で計算されたように, 和および差の組み合わせのモードを次々と結合していき, $(2,4,0) + (4,2,0)$ モードと磁場の $(1,3,0) + (3,1,0)$ および $(1,1,0)$ モードによって, 磁場に $(1,2,1) + (2,1,1)$, $(1,4,1) + (4,1,1)$ のモードが現れる. その磁場のモードによって, 速度スペクトルに同じモードのスペクトルが励起されている. このようにして, $(1,3,1) + (3,1,1)$, $(1,4,2) + (4,1,2)$, または $(1,2,2) + (2,1,2)$ といったモードが次々と励起されているのが観測される. これらの励起したスペクトルは $t=20.0t_A$ 付近から緩やかに減少していくのが観測される. 従って, この時刻には磁場の状態が平衡状態に近づきつつあり, 速度場に対する磁場の影響が小さくなったものと考えられる.

4. まとめ

本研究では散逸オペレータに随伴する固有関数

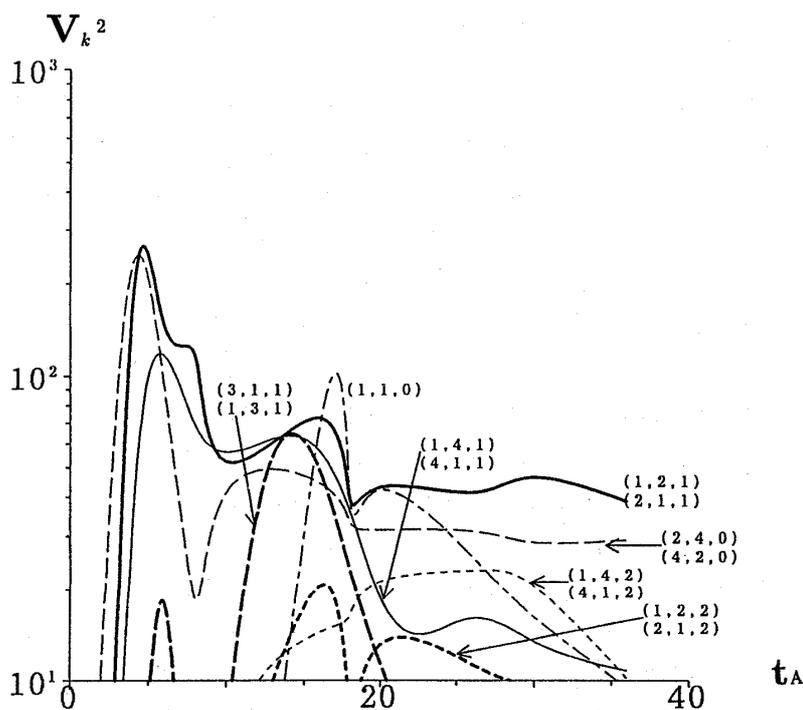


Fig. 7 Typical time history of the energy spectrum of the velocity.

のスペクトル上で現象を追跡することによって、三角関数（直交関数）やそれ以外の直交関数を用いた場合には、その最小固有モードによっては一般的に導くことができない、散逸構造のアトラクターを含む自己組織化過程の描像を明らかにした。この散逸オペレータに随伴する固有関数によるスペクトル解析から、そのスペクトル上で起こる自己組織化の重要な基礎物理過程と考えられる次のことが明らかになった。

(A)不安定性の成長過程では、スペクトル遷移が初期に与えた固有値モードのスペクトルの高低両モード側に、同時刻に激しく起こっていることが観測された。このようなスペクトル遷移の激しい不安定な状態では非線形力学オペレータ $L_i^N[\mathbf{q}]$ が支配的であり、系内では強い非線形相互作用が起こっている。このスペクトル遷移において、高モード側には上限がなく無数の高固有値モードが次々に駆動されて遷移していく傾向が見られるが、低固有値モード側には下限が存在するため、最低固有値モードへのエネルギーの堆積が起こっていることが、スペクトルの時間発展から確認された。

(B)遷移したスペクトルは(20)式の固有値 λ_k ($=\sqrt{\frac{\mu_0 \alpha_k}{2\eta}}$) の時定数 α_k によって必然的に高い固有値モード成分ほど速く散逸していく。緩和過程の後半 (Fig. 3 $t=8.0t_A \sim$) の磁場のスペクトルからは高い固有値モード成分が大きく減衰していくのが観測され、系がコヒーレントなアトラクターへと自律的に秩序形成を行う過程のスペクトル上での選択的散逸の挙動が明らかにされた（ただし、ここでの選択的散逸はエネルギースペクトル上での選択的散逸であり、文献[11,12,14]等で用いられている2つの不変量間の選択的散逸を意味していない）。系が緩和した平衡状態の $L_i^N[\mathbf{q}] = 0$ に近づくにつれて、散逸力学オペレータ $L_i^D[\mathbf{q}]$ の方が相対的に支配的となり、支配的オペレータの交代が起こっていることがわかる。したがって、最終的な緩和状態の空間分布は必然的に $L_i^D[\mathbf{q}]$ とそれに含まれる散逸パラメータの空間分布で決定される。本解析に用いた MHD シミ

ュレーションの自己組織化した散逸構造のアトラクターは、抵抗 η が一様であったため、(1,1,0) の基本モードのみの磁場スペクトルが確認された。この (1,1,0) 基本モードは、Taylor の求めた緩和の状態 [11] $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ と一致する。

(C)固有解(23)式～(29)式を用いて導かれた(31)式並びに(32)式で求められるように、磁場と速度場の固有値モードの差および和のモードが励起および結合されることが、磁場及び速度場の各エネルギースペクトルから確認された。系が不安定な状態になると、速度場は $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ によって磁場のエネルギーの一部を運動エネルギーとして受け取るとともに、新たなモードの速度スペクトルが励起される。励起された速度スペクトルは、速度場 \mathbf{u} を含む $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ によって運動エネルギーの一部を磁場のエネルギーに返還するとともに、磁場との非線形モード間結合をして、新たなモードの磁場スペクトルを励起する。このように互いに非線形相互作用を及ぼし合いながらエネルギーの交換を行い、モード間結合による新しいモードの励起を繰り返して、高低両固有値モードへのスペクトル遷移が次々と同時刻に並行して起こっていく。この時、低モード側に下限があるため最低モードへの蓄積が起こると同時に高モード側は無数のモードへ分散していく。

以上述べたように、散逸構造のアトラクター、スペクトル遷移と選択的散逸、支配的オペレータの交代、非線形モード間結合および磁場と速度場相互間のエネルギー輸送並びに各時刻におけるスペクトルの描像など、Taylor の理論 [11] のような全磁気ヘリシティの保存の仮説を用いなくても、自己組織化の物理過程と、最終的に自己組織化した状態を散逸オペレータの固有関数を用いて描き出すことができることを本研究で示した。更に、この散逸オペレータの固有関数によるスペクトル解析は、原理的には各時刻に散逸パラメータが空間依存性を持つ場合にも適用が可能なので、近年注目されている Taylor 理論では説明できない反転磁界配位 (FRC) [20] や non-Taylor self-organization [29] の解析等にも広く適用できると考えられる。加えて、水面で起こるグリッド乱流

の後の2次元の渦構造[30]や乱流パフに続く螺旋流構造[31]などの非圧縮粘性流体中に自己形成される流れの構造解析並びに散逸性ソリトンの自己組織化現象[32]の解析にも適用が可能であると考えられる。

5 謝 辞

本研究を行うにあたり、有益な示唆と御意見を頂いた国立核融合科学研究所の堀内利得助教授、佐藤哲也教授に感謝いたします。この研究の一部は国立核融合科学研究所の共同研究として行われ、また、1994年度文部省科学研究費補助金(課題番号06680439)の助成の下で行われた。

参考文献

- [1] I. Prigogine, *Etude Thermodynamique des Phenomenes Irreversibles* (Dunod, Paris, 1974).
- [2] P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability, and Fluctuations* (Wiley-Interscience, New York, 1971).
- [3] S. Chandrasekhar and P.C. Kendall, *Astrophys. J.* **126**, 457 (1957).
- [4] S. Chandrasekhar and L. Woltjer, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **44**, 285 (1958).
- [5] H.A.B. Bodin and A.A. Newton, *Nucl. Fusion* **20**, 1255 (1980).
- [6] T. Tamano, W.D. Bard, C. Chu, Y. Kondoh, R.J. LaHaye, P.S. Lee, M. Saito, M.J. Schaffer and P.L. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1444 (1987).
- [7] Y. Hirano, Y. Yagi, T. Shimada, K. Hattori, Y. Maejima, I. Hirota, Y. Kondoh, K. Saito and S. Shiina, in *Proc. 13th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, Washington, D.C., U.S.A., Oct. 1990 (IAEA, Vienna), CN-53/C-4-12.
- [8] K. Sugisaki, *Jpn. J. Appl.* **24**, 328 (1985).
- [9] K. Sugisaki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 3176 (1987).
- [10] K. Sugisaki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **57**, 4175 (1988).
- [11] J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1139 (1974).
- [12] J. B. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 741 (1986).
- [13] Y. Kondoh, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 1813 (1985).
- [14] A. Hasegawa, *Adv. Phys.* **34**, 1 (1985).
- [15] Y. Kondoh, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 489 (1989).
- [16] T. Kato and T. Furusawa, *Proc. 2nd Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, November 27-30, 1990, National Institute for Fusion Science, Toki, Japan, VIII-2.
- [17] Y. Kondoh, *Thought Analysis on Relaxation and General Principle to Find Relaxed State*, Research Rep., National Institute for Fusion Science, Nagoya, Japan, 1991, NIFS-109.
- [18] Y. Kondoh, *Relaxed State of Energy in Incompressible Fluid and Incompressible MHD Fluid*, Research Rep., National Institute for Fusion Science, Nagoya, Japan, 1991, NIFS-123.
- [19] Y. Kondoh, "Internal Structures of Self-Organized Relaxed States and Self-Similar Decay Phase", Research Rep., National Institute for Fusion Science, Nagoya, Japan, 1992, NIFS-141.
- [20] Y. Ono, A. Morita, T. Tategaki and M. Katsurai, *Proc. 14th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, Würzburg, Germany, Oct. 1992 (IAEA, Vienna), IAEA-CN-56/C-4-4.
- [21] Y. Kondoh, T. Yumoto, M. Yamaguchi, N. Kondoh, R. Horiuchi and T. Sato, *J. Plasma and Fusion Res.* **71**, 432 (1995).
- [22] Y. Ono and M. Katsurai, *Nucl. Fusion* **31**, 233 (1991).
- [23] Y. Kondoh, Y. Hosaka, J. Liang, R. Horiuchi and T. Sato, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 546 (1994).
- [24] Y. Kondoh, *Phys. Rev.* **E48**, 2975 (1993).
- [25] Y. Kondoh, *Phys. Rev.* **E49**, 5546 (1994).
- [26] R. Horiuchi and T. Sato, *Phys. Fluids* **29**, 4174 (1986).
- [27] R. Horiuchi and T. Sato, *Phys. Fluids* **29**, 1161 (1986).
- [28] R. Horiuchi and T. Sato, *Phys. Fluids* **31**, 1142 (1988).
- [29] S.P. Zhu, R. Horiuchi and T. Sato, "Non-Taylor Magnetohydrodynamic Self-Organization", Research Rep., National Institute for Fusion Science, Nagoya, Japan, 1994, NIFS-314;
- [30] S. Loewen, B. Ahlborn and A.B. Filuk, *Phys. Fluids* **8**, 2388 (1986).
- [31] K. Kose, *J. Phys. D* **23**, 981 (1990).
- [32] Y. Kondoh and J.W. Van Dam, *Self-organization of Solitons for the Dissipative Korteweg-de Vries Equation*, *Phys. Rev.* **E52** (1995) No. 2 in press.