

研究開発ノート

ミラー閉じ込めプラズマにおける核反応率について

北 條 仁 士

(筑波大学プラズマ研究センター)

(1995年6月12日受理/1995年8月29日改訂原稿受理)

On Nuclear Reaction Rates of Mirror-Confined Plasmas

HOJO Hitoshi

Plasma Research Center, University of Tsukuba, Tsukuba 305, Japan

(Received 12 June 1995/revised manuscript: received 29 August 1995)

Abstract

Nuclear reaction rates of DT and D-³He reactions in bi-Maxwellian and loss-cone plasmas in the range of $1\text{keV} < T_{\perp} < 100\text{keV}$, $T_{\perp}$ being the perpendicular temperature, are calculated by a Monte-Carlo method. It is found that the nuclear reaction rate of a bi-Maxwellian plasma is less than that of a Maxwellian plasma (by about factor three in low $T_{\perp}$ region) when the parallel to perpendicular temperature ratio is much less than unity, and that the nuclear reaction rate of a loss-cone plasma can be larger than that of a Maxwellian plasma when ambipolar hole is created. The accuracy of the Monte-Carlo Method is also discussed.

Keywords:

nuclear reaction rate, D-T reaction, D-³He reaction, mirror, bi-Maxwellian plasma, loss-cone plasma, Monte-Carlo method,

1. はじめに

JET, TFTR そして JT-60 と, 世界三大トカマクにおける最近の研究成果は, 炉心の面からは核融合炉実現に一步近づいたという印象を与えるものである. 一方タンデムミラーガンマ10においても最近重水素プラズマによる実験を行い, D-D 核反応によって生成された中性子を観測した[1]. ここで核反応率について考えてみると, 核融合炉ではプラズマは十分に熱化され, したがってプラズマはほぼマックスウェル分布になって

いると考えられる. しかし, 現状のタンデムミラープラズマはマックスウェル分布ではないし, また中性子源のような閉じ込めをそれほど問題にしないような装置では熱化が不十分で, プラズマはマックスウェル分布にはならないと考えられる.

本論文の目的は, このようなマックスウェル分布ではないプラズマに対して代表的な核反応の核反応率を計算することである. 具体的には, 二重マックスウェル分布の場合とそれを基にしたロスコーン分布の場合に対して核反応率を求める. 次

節で核反応率の計算方法について説明し、第3節では計算結果について述べる。

2. 核反応率の計算方法

プラズマ中の i -種イオンと j -種イオンの衝突による核反応率は、各々の速度分布関数を $f_i(\mathbf{v}_i)$, $f_j(\mathbf{v}_j)$, またその反応断面積を $\sigma_{ij}(\mathbf{v})$ とすると、

$$\langle \sigma v \rangle_{ij} = \int d\mathbf{v}_i \int d\mathbf{v}_j \sigma_{ij}(|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|) |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| f_i(\mathbf{v}_i) f_j(\mathbf{v}_j) \quad (1)$$

で求められる。分布関数がマックスウェル分布で速度積分に条件が無い場合、相対速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ と重心速度 $\mathbf{V} = (M_i \mathbf{v}_i + M_j \mathbf{v}_j) / (M_i + M_j)$ を導入すると、(1)式は重心速度に関しては積分が実行できて、次のように表すことができる。

$$\langle \sigma v \rangle_{ij} = \frac{4}{\sqrt{2\pi\mu} T^{3/2}} \int_0^\infty dE E \sigma_{ij}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \quad (2)$$

ここで、 $E = \mu v^2/2$, $\mu = M_i M_j / (M_i + M_j)$ は換算質量、また T は温度である。この(2)式は容易に台形公式等で数値積分できるが、分布関数が二重マックスウェル分布であったり、また速度積分にロスコーンの条件がある場合には、(1)式は(2)式のような簡単な積分には帰着しない。そこで本論文では(1)式の数値積分をモンテカルロ法を用いて行うことにする。単純なモンテカルロ法の数値積分ではその精度はあまり期待できないが、反応断面積 $\sigma_{ij}(\mathbf{v})$ の実験精度の問題もあるし、また我々自身も普通そんなに高精度な $\langle \sigma v \rangle_{ij}$ の値を必要としないので、ここでは単純なモンテカルロ法を用いることにする（もちろん、数値積分の精度を上げるための工夫は可能ではあるが）。

本論文のモンテカルロ法では、二重マックスウェル分布

$$f_{\text{BM}}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{M}{2\pi T_{\parallel}}} \frac{M}{2\pi T_{\perp}} \exp\left[-\frac{M(v_x^2 + v_y^2)}{2T_{\perp}} - \frac{Mv_z^2}{2T_{\parallel}}\right] \quad (3)$$

の場合に対しては、次のようにして(1)式の数値積分を行う。まず i -種イオンの速度を

$$x_i = \frac{v_{xi}}{\sqrt{T_{\perp}/M_i}}, \quad y_i = \frac{v_{yi}}{\sqrt{T_{\perp}/M_i}}, \quad z_i = \frac{v_{zi}}{\sqrt{T_{\parallel}/M_i}}$$

のように規格化する。 j -種イオンの速度も同様に $\sqrt{T_{\perp}/M_j}$ または $\sqrt{T_{\parallel}/M_j}$ で規格化する。そして6個のガウス乱数 $(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j)$ を1セットとして、 N セットのガウス乱数を発生させる。このとき(1)式の積分は

$$\langle \sigma v \rangle_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_{ij}(E_n) v_n \quad (4)$$

$$E_n = \frac{M_j}{M_i + M_j} \frac{T_{\perp}}{2} [(x_i - \alpha x_j)^2 + (y_i - \alpha y_j)^2 + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} (z_i - \alpha z_j)^2]_n$$

$$v_n = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{M_i}} [(x_i - \alpha x_j)^2 + (y_i - \alpha y_j)^2 + \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} (z_i - \alpha z_j)^2]_n^{1/2}$$

で求められる。ここで、 E_n は n セット目の相対運動のエネルギー、 v_n は相対速度、また $\alpha = \sqrt{M_i/M_j}$ である。

次にロスコーン分布の場合を考える。ここではロスコーン分布として

$$f_{\text{LC}}(\mathbf{v}) = CH \left[(R-1)(x^2 + y^2) + \frac{2e\Phi}{T_{\perp}} - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} z^2 \right] f_{\text{BM}}(\mathbf{v}) \quad (5)$$

を仮定する。ここで $H[g(x, y, z)]$ は Heaviside の階段関数で、ロスコーン境界は $g(x, y, z) = 0$ で与えられる。また C は規格化定数、 R はミラー比、そして Φ は電位の大きさを表す。 $\Phi > 0$ の場合は閉じ込め電位、また $\Phi < 0$ の場合は両極性電位ホールに対応する。このときの核反応率は、 N セットのガウス乱数のうち i -種および j -種イオンの両者が速度空間での粒子の存在領域にあるという条件

$$(R-1)(x^2 + y^2) + \frac{2e\Phi}{T_{\perp}} - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} z^2 > 0 \quad (6)$$

を満たす個数を N_C として、

$$\langle \sigma v \rangle_{ij} = \frac{1}{N_C} \sum_{n=1}^{N_C} \sigma_{ij}(E_n) v_n \quad (7)$$

で与えられる。(4)および(7)式における核反応断面積 σ_{ij} に関しては文献[2]にある公式

$$\sigma_{ij}(E_{in}) = \frac{A_5 + A_2 / [(A_4 - A_3 E_{in})^2 + 1]}{E_{in} [\exp(A_1 / \sqrt{E_{in}}) - 1]} \quad (8)$$

を用いる。(8)式における係数 $A_1 \sim A_5$ は Duane 係数で文献[2]で与えられている。また E_{in} は静止した j -種ターゲットイオンに衝突する i -種入射イオンの運動エネルギーであり、相対運動のエネルギー E とは $E_{in} = E(M_i + M_j) / M_j$ の関係にある。ここで文献[2]にある Duane 係数と(8)式を用いて(2)式から核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ を計算すると、D-T 反応と D- ^3He 反応に関してはマックスウェル分布での核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ の値を正しく再現する(文献[3]にある $\langle \sigma v \rangle$ の表式から求めた値とも一致する)が、しかし D-D 反応に関してはマックスウェル分布での核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ の値を再現しない(同じ文献[2]や文献[3]の値とも一致しない)ことがわかった。したがって、文献[2]にある D-D 反応に関する Duane 係数は間違っていると思われる。ゆえに、ここでは D-T 反応と D- ^3He 反応に対して、(3)式の二重マックスウェル分布と(5)式のロスコーン分布の場合の核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ の数値計算を行うことにする。

3. 計算結果

この節では計算結果について述べる。まず平均値が0で分散が1のガウス乱数は中心極限定理を利用した方法で発生させる。即ち、一様乱数 ξ_i ($i=1, \dots, 12$) を12個発生させ、 $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{12} - 6$ の公式からガウス乱数を作る。以下の計算では、発生乱数の個数は $N=10^4$ である。

Fig. 1 は D-T 反応(a)と D- ^3He 反応(b)の核反応率を表す。実線はマックスウェル分布の場合の核反応率を(2)式から計算したものであり、黒丸は同じくマックスウェル分布の場合の核反応率をモンテカルロ法により(4)式から求めたものである。モンテカルロ法の誤差については後で述べ

る。また Fig. 1 における白丸と白四角は二重マックスウェル分布の場合の核反応率であり、イオ

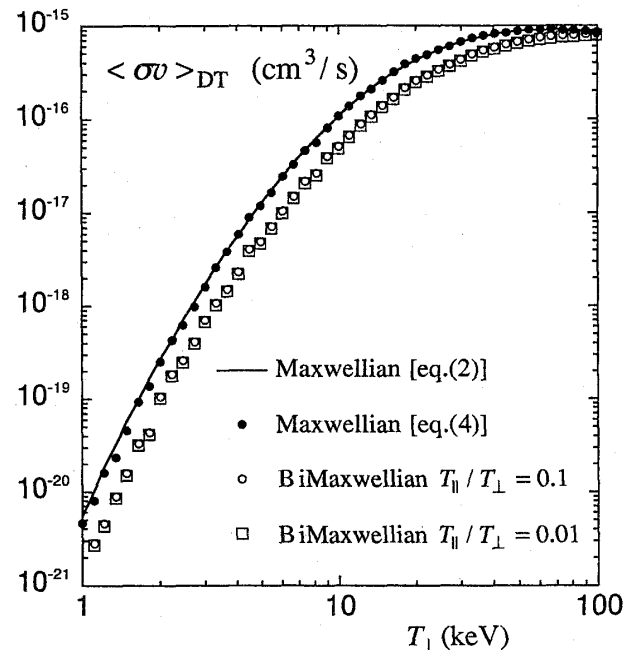


Fig. 1 (a) Nuclear reaction rates for D-T reaction, where solid line is given by eq. (2) and closed circles by eq. (4) for a Maxwellian plasma, and open circles and open squares are given by eq. (4) for a bi-Maxwellian plasma.

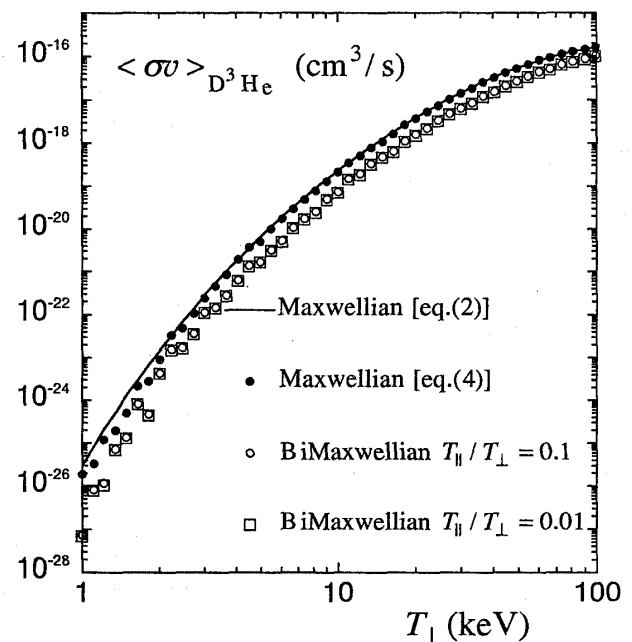


Fig. 1 (b) Nuclear reaction rates for D- ^3He reaction, where the notation is the same as Fig. 1 (a).

ンの温度非等方性が $T_{\parallel}/T_{\perp} = 0.1$ (白丸) と $T_{\parallel}/T_{\perp} = 0.01$ (白四角) の場合の計算であるが、図からわかるように両者の核反応率はほぼ等しくなっている。

Fig. 2 は Fig. 1 で示した二重マックスウェル分布の場合の核反応率 $\langle \sigma v \rangle_{\text{BM}}$ とマックスウェル分布の場合の核反応率 $\langle \sigma v \rangle_{\text{M}}$ の比を表したものである。 $T_{\parallel} < T_{\perp}$ の場合、我々の関心のあるエネルギー領域 $1 \text{ keV} < T_{\perp} < 100 \text{ keV}$ では二重マックスウェル分布での核反応率はマックスウェル分布のそれよりも小さく、低エネルギー領域ではマックスウェル分布の場合の約三分の一程度にまで減少していることがわかる。ただし、 $T_{\perp} < 3 \text{ keV}$ では次の Fig. 3 に示すようにモンテカルロ法の誤差が非常に大きくなるので、この比に対する誤差も大きいと思われる。

Fig. 3 はマックスウェル分布における各核反応に対して、(4)式のモンテカルロ法から求められる核反応率 $\langle \sigma v \rangle_{\text{MC}}$ と(2)式から求められる核反応率 $\langle \sigma v \rangle_{\text{M}}$ との比を表している。したがって、この比の1からのずれはモンテカルロ法の計算誤差と考えることができる。既に述べたように、 $T_{\perp} < 3 \text{ keV}$ ではモンテカルロ法の誤差が特に大きい、高温になっていくにしたがってモン

テカルロ法の精度は段々と良くなっていることがわかる。逆に言えば、低温になるにしたがって誤差が大きくなっていく訳であるが、この理由は今の所良くわからない。一つの可能性としては、温度が低くなるに従い核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ に寄与するプラズマ粒子はマックスウェル分布の非常にすその方に位置する、より高エネルギーの粒子になっていくが、このようなマックスウェル分布の非常にすその方に位置する高エネルギー粒子を現在のサンプル数程度のモンテカルロ法で表現するには全く不十分で、したがってマックスウェル分布に従うだけの高エネルギー粒子を表現できていないことが核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ の過小評価につながっているのではないかと考えられる。したがってこの傾向は反応断面積の小さい $\text{D-}^3\text{He}$ 反応の方が D-T 反応より顕著に現れる。発生乱数の個数を $N=10^6$ にすると、 D-T 反応の場合は $5 \text{ keV} < T < 100 \text{ keV}$ の範囲でモンテカルロ法の相対誤差は4%以内に収まる[4]。しかしあまり高精度を要求しないのであれば、この程度の計算でも用は足りるかも知れない。

Fig. 4 はモンテカルロ法で計算したロスコーン分布に対しての D-T 反応の核反応率を表す。磁場のミラー比は $R=5$ であり、また $T_{\parallel}/T_{\perp} = 1$

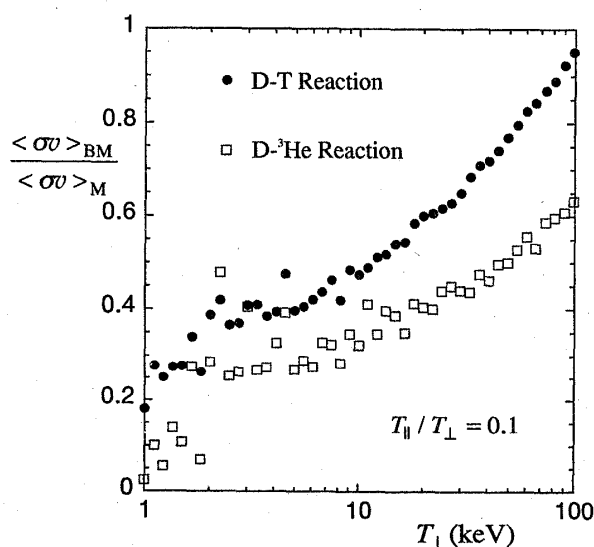


Fig. 2 Ratios of the nuclear reaction rate of a bi-Maxwellian plasma to that of a Maxwellian plasma (eq. (2)) for D-T and D- ^3He reactions.

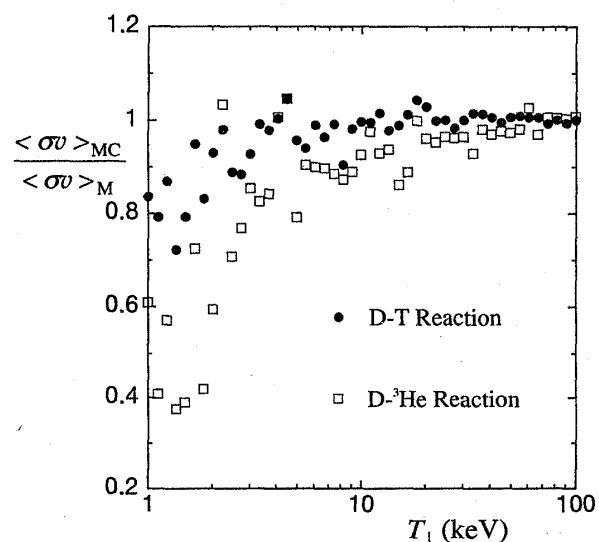


Fig. 3 Ratios of the nuclear reaction rate by eq. (4) to that by eq. (2) in a Maxwellian plasma for D-T and D- ^3He reactions.

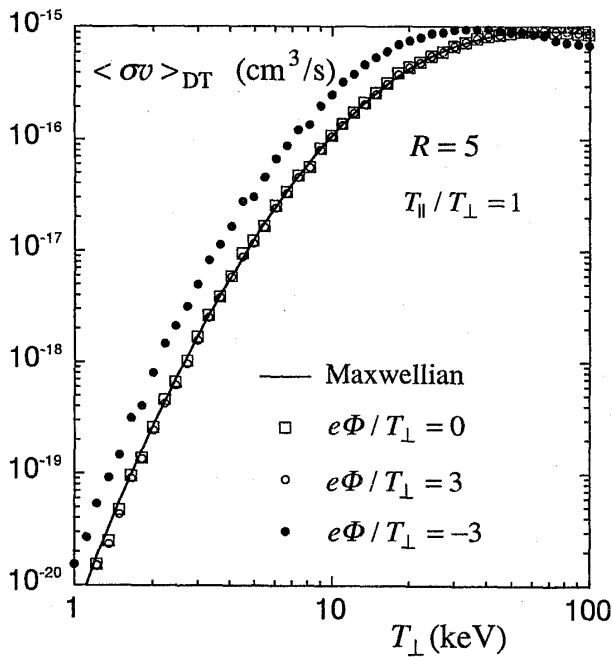


Fig. 4(a) Nuclear reaction rates of a loss-cone plasma for D-T reaction with $R=5$, $T_{\parallel}/T_{\perp}=1$ and different values of $e\Phi/T_{\perp}$.

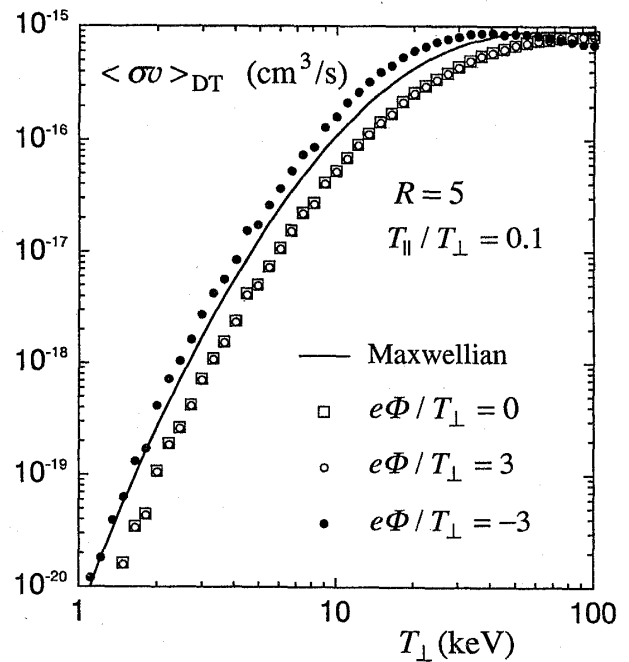


Fig. 4(b) Nuclear reaction rates of a loss-cone plasma for D-T reaction with $R=5$, $T_{\parallel}/T_{\perp}=0.1$ and different values of $e\Phi/T_{\perp}$.

(a), $T_{\parallel}/T_{\perp}=0.1$ (b)である。Fig. 4において、電位の大きさは $e\Phi/T_{\perp}=0$ (白四角), $e\Phi/T_{\perp}=3$ (白丸), $e\Phi/T_{\perp}=-3$ (黒丸) であり、また実線はマクスウェル分布の場合の核反応率 $\langle \sigma v \rangle_M$ である。 $T_{\parallel}/T_{\perp}=1$ の場合、電位の無い $e\Phi/T_{\perp}=0$ と閉じ込め型電位 $e\Phi/T_{\perp}=3$ での核反応率はマクスウェル分布の核反応率にほぼ等しくなっている。しかし両極性ホール型電位 $e\Phi/T_{\perp}=-3$ での核反応率は、大体 $T_{\perp} < 50 \text{ keV}$ ではマクスウェル分布の核反応率より大きくなっていることが分かる (大きい所で約3倍)。一方 $T_{\parallel}/T_{\perp}=0.1$ の場合、電位の無い $e\Phi/T_{\perp}=0$ と閉じ込め型電位 $e\Phi/T_{\perp}=3$ での核反応率はマクスウェル分布の核反応率より小さく、二重マクスウェル分布の核反応率にほぼ等しくなっている。両極性ホール型電位 $e\Phi/T_{\perp}=-3$ での核反応率は、やはり大体 $T_{\perp} < 50 \text{ keV}$ ではマクスウェル分布の核反応率よりも大きくなっていることがわかる (大きい所で約1.5倍)。

Fig. 5 はモンテカルロ法で計算したロスコーン分布に対しての $D-^3\text{He}$ 反応の核反応率を表す。ミラー比は同じく $R=5$ であり、また $T_{\parallel}/T_{\perp}=1$

(a), $T_{\parallel}/T_{\perp}=0.1$ (b) である。同様に Fig. 5 においても、電位の大きさは $e\Phi/T_{\perp}=0$ (白四角), $e\Phi/T_{\perp}=3$ (白丸), $e\Phi/T_{\perp}=-3$ (黒丸) であり、また実線はマクスウェル分布の場合の核反応率 $\langle \sigma v \rangle_M$ である。 $T_{\parallel}/T_{\perp}=1$ の場合、電位の無い $e\Phi/T_{\perp}=0$ と閉じ込め型電位 $e\Phi/T_{\perp}=3$ での核反応率はマクスウェル分布の核反応率にほぼ等しくなっているが、両極性ホール型電位 $e\Phi/T_{\perp}=-3$ での核反応率は $1 \text{ keV} < T_{\perp} < 100 \text{ keV}$ でマクスウェル分布の核反応率より大きくなっている (大きい所で約3倍)。一方 $T_{\parallel}/T_{\perp}=0.1$ の場合、電位の無い $e\Phi/T_{\perp}=0$ と閉じ込め型電位 $e\Phi/T_{\perp}=3$ での核反応率はマクスウェル分布の核反応率より小さく、やはり二重マクスウェル分布の核反応率にほぼ等しくなっている。また両極性ホール型電位 $e\Phi/T_{\perp}=-3$ での核反応率は、 $T_{\parallel}/T_{\perp}=1$ の場合と同様に $2 \text{ keV} < T_{\perp}$ ではマクスウェル分布の核反応率より大きくなっていることがわかる (大きい所で約1.5倍)。

$D-^3\text{He}$ 反応の核反応率の計算誤差が特に大きいので、発生乱数を $N=10^5$ にした場合の計算結果を $N=10^4$ の場合と比較して Fig. 6 に示してお

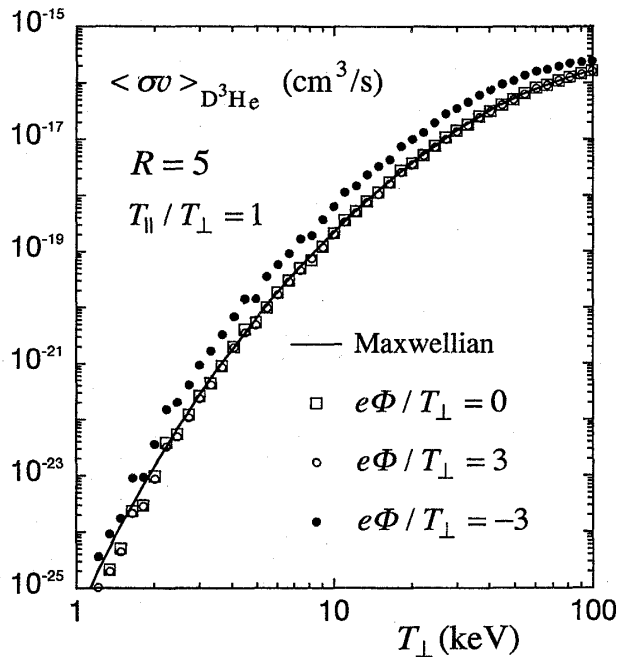


Fig. 5(a) Nuclear reaction rates of a loss-cone plasma for $D^3\text{He}$ reaction with $R=5$, $T_{\parallel}/T_{\perp}=1$ and different values of $e\Phi/T_{\perp}$.

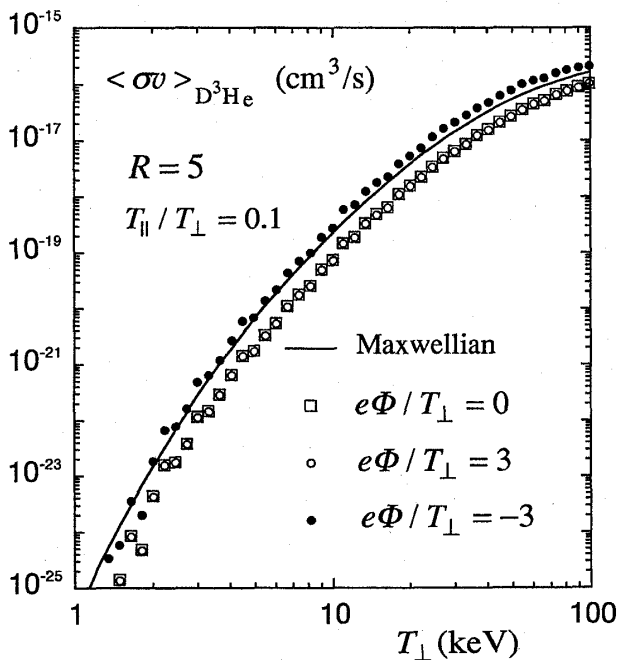


Fig. 5(b) Nuclear reaction rates of a loss-cone plasma for $D^3\text{He}$ reaction with $R=5$, $T_{\parallel}/T_{\perp}=0.1$ and different values of $e\Phi/T_{\perp}$.

く、予想されるように精度の大きな向上は見られないが、計算値のばらつきが確かに減少していることが容易にわかる。総じて、誤差の大きい

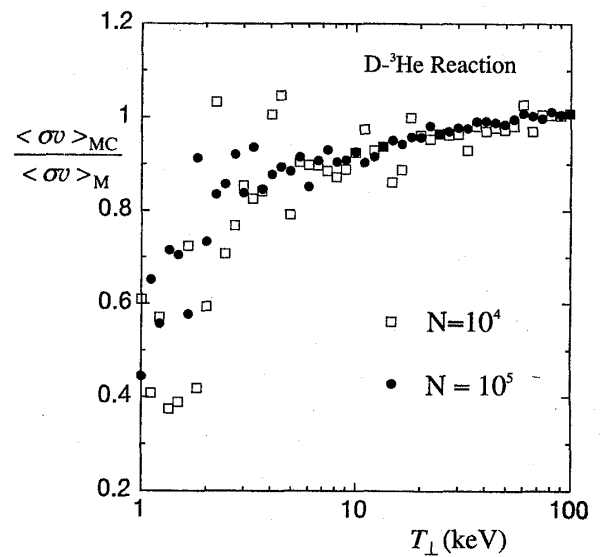


Fig. 6 Ratios of the nuclear reaction rate by eq. (4) to that by eq. (2) in a Maxwellian plasma for $D^3\text{He}$ reaction with $N=10^4$ (open squares) and $N=10^5$ (closed circles).

1 keV $< T_{\perp} < 3$ keV の領域でのモンテカルロ法の計算には特別な工夫が必要であると思われる。これは Fig. 3 の所でも述べたように、温度が低くなるに従い核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ に寄与するプラズマ粒子はマックスウェル分布の非常にすその方に位置するより高エネルギーの粒子になっていくのに対し、現在のサンプル数程度のモンテカルロ法ではこのようなマックスウェル分布の非常にすその方に位置する高エネルギー粒子をマックスウェル分布に従うように表現できていないことが核反応率 $\langle \sigma v \rangle$ の過小評価につながっているのではないかと考えられる。

最後に、ここでは i -種イオンと j -種イオンの温度は等しいと仮定したが、 i -種イオンと j -種イオンの温度が異なる場合の解析は文献[4]でなされている。

参考文献

- [1] T. Tamano *et al.*, *Proc. 15th IAEA Conf.* (Seville, 1994) CN-60/C-1-1.
- [2] D. L. Book, *NRL Plasma Formulary* (Office of Naval Research, Washington, 1978) p. 36.
- [3] L. M. Hively, *Nuclear Fusion* **17**, 873 (1977).
- [4] H. Hojo, *Jpn. J. Appl. Phys.* **34**, 5825 (1995).