

研究論文

平行平板電極間の高周波放電における 生成プラズマ密度の理論的検討

野中 繁彦, 柘植 重人*

(豊田工業大学)

(1996年5月17日受理)

Theoretical Study for Plasma Density Determination
on Planar RF Discharges between Parallel Electrodes

NONAKA Shigehiko and TSUGE Shigeto

Toyota Technological Institute, Nagoya 468, Japan

(Received 17 May 1996)

Abstract

Several characteristic features of radio frequency (RF) discharges between a pair of dielectric-covered planar electrodes were found by solving an electrostatic four-rank Laplace equation. In this theory, effects of electron temperature on the stationary RF plasma were studied from a view point of wave-produced plasmas. It was concluded that the stationary plasmas can be produced by the lowest main ($m=0$) and the next lower ($m=1$) resonances of an electron plasma wave. The produced plasma density was determined, depending on electron temperature, thickness of the plasma, an operating RF frequency and so on. Two thresholds for applied RF voltage and gas pressure to maintain the plasma were also obtained.

Keywords:

main ($m=0$) resonance, $m=1$ resonance, electron temperature, electron plasma wave, thresholds

1. ま え が き

プラズマによる薄膜プロセスの分野では、平行平板電極間の高周波放電が汎用されている。例えば、シリコン基盤表面のドライエッチング、アッシングなどである[1,2]。しかしながら、そのプラズマ生成機構は必ずしも明らかではない[1-5]。放電解析のためには、電子の生成・消滅(拡散)のバランス方程式(いわゆる、粒子バランス)を解くことが一般的に行われる[3-5]。すなわち、拡散方程式が解かれる。しかしこの方法の場合、原理的に電子温度と電子密度分布を決定することを意味

し、生成プラズマ密度を決定することにはならない。またこの方法の場合、電離電圧、電離周波数、電離断面積など封入ガス特有の多数のデータを必要とする。プラズマ生成機構が必ずしも明らかでない理由は、これらの要因が複雑に重なることによると考えられる。

一方、無電極高周波放電の一種として、近年プラズマの表面波によるプラズマ生成(表面波プラズマ)の研究が盛んである[5,6]。このプラズマは通常、無電極の低ガス圧ガラス管の外側に設置される励振装置により局部的に高電界を印加するとき、管内軸方向に得られる長尺のプラズマを意味する。その解析には生成電子密度を決定するために、管断面の一樣密度分布を仮定し、表面波の分散とパワーバランスを同時に満足することが要求さ

* 現勤務先：〒448 愛知県刈谷市昭和町1-1
デンソウ(日本電装)株式会社

れる。我々は、高周波放電の機構解明の手段としては拡散方程式よりもこの方法のほうが有用と考え、先般これを平行平板電極の場合に適用した[7,8]。その方法は表面波プラズマの場合と同様に、ポアソン方程式(または、等価なラプラス方程式)を解き、パワーの吸収と損失のバランスによりプラズマ密度を決定する。その結論として、プラズマ生成機構は比較的広範囲のガス圧に適用可能な表面波の幾何学的共振に帰することを示した[8]。この共振は直流放電管に高周波を照射する場合に観測される最大の吸収ピーク(いわゆる、主共振; main resonance)に対応する[9,10]。しかし、この主共振の吸収によるプラズマ生成密度を測定値と比較するとき[7]、測定値は理論値より常にいくらか低いことを経験した。この原因はプラズマ中の電子温度の影響によると考えられる。一方、前記のプロセス用プラズマの分野では、イオン衝撃による基盤表面の損傷を避けるため、近年、低ガス圧、低電子温度のプラズマが要望されている[2]。しかし、低ガス圧放電の場合、一般に電子温度が高くなる。このため低ガス圧高周波放電の場合、電子波の影響を受けると推測される。

このような観点から、本文では主共振の共振密度に対する電子温度の影響について検討した。前文[8]では電子温度を考慮していない。本研究の結果、プラズマ生成機構に関する次の主要事項を解明した;(1)主共振($m=0$)による生成密度は電子温度の上昇とともに低下する。(2)新たな電子波低次モード($m=1$)の存在を発見した。このためプラズマ生成に寄与するモードは、パラメータ条件に依存して、主共振($m=0$)あるいは電子波の $m=1$ モードの共振に帰する。

2. 高周波放電のモデルと電子波固有モード

平行平板電極間の高周波放電のための標準モデルを Fig. 1 に示す。システムは中央面 $x=0$ に関して対称である。高周波電圧 $V=V_0 \exp(j\omega t)$ を電極に印加する。電極の縦・横幅は電波の半波長よりも充分短く設定する。この条件では印加電圧は電極全面で同相となるため、静電近似の適用が可能となる[9,10]。また、電極端部の電界乱れの影響を無視するため、電極の横寸法は間隔 $2b$, $2a$ に比べ充分大とする。プラズマの横方向拡散を防ぐため電極端部の位置に誘電体の側壁を想定する。各電極($x=\pm b$)は肉厚 $d(=b-a)$ の誘電体層($-b \leq x \leq -a$ and $a \leq x \leq b$, 比誘電率 ϵ_g)によりプラズマ層($-a \leq x \leq a$, 等価比誘電率 ϵ_p)から遮断される。各層は下付添字(1,2,3)により区別する。このモデルで取り入

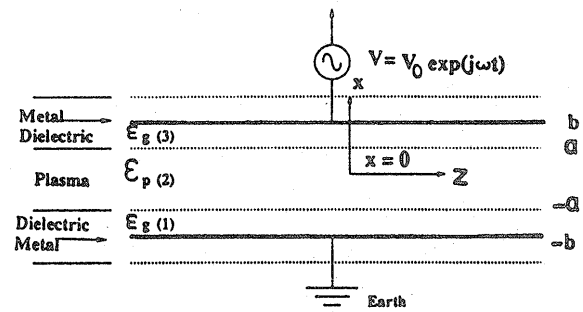


Fig. 1 Cross-sectional view of a standard planar RF discharge between a pair of electrodes. (x,y,z) : Cartesian coordinates. ϵ_p , ϵ_g : relative dielectric constants. $d \equiv b-a$.

れた誘電体層は、裸電極使用の際に通常パワー電極側に挿入されるブロッキングコンデンサの役割を果たす。またこのモデルは実際にはこうした誘電体層を挿入しない場合のシース層を近似的に模擬するのにも利用できる。説明の便宜上、プラズマは当面、直流放電などにより予め生成されているものとする。そのプラズマ密度は一律と仮定する(第5章参照)。一律密度は実際に x 方向に分布する密度の平均値を表す。

流体モデルを用いる場合、プラズマ領域の振動電位 ϕ_2 の満足すべき方程式は、付録 A の手続きを経て、次の4階ラプラス方程式となる; $(\nabla^2 + k^2) \nabla^2 \phi_2 = 0$ 。 k は、

$$k^2 \equiv (1 - N - j\eta) (\omega/v_T)^2 \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $j = \sqrt{-1}$, $N = (\omega_p/\omega)^2$, $\eta = \nu/\omega$, $v_T = \sqrt{\gamma k T_e/m_e} (\simeq \sqrt{2k T_e/m_e})$: ほぼ電子の熱速度, $\omega_p (\equiv \sqrt{n_0 e^2/m_e \epsilon_0})$: 電子プラズマ角周波数, n_0 : 電子密度, ν : 電子・中性粒子間の運動量変換衝突周波数, T_e : 電子温度, $\gamma = 5/3$: 理想電子ガスの定積・定圧比熱の比, k はボルツマン定数, m_e と e は電子の質量と電荷, ϵ_0 は真空の誘電率, である。 N は規格化密度, η は規格化衝突周波数を表す。プラズマの等価比誘電率は $\epsilon_p = 1 - N/(1 - j\eta)$ で与えられる。

上記のように励振電圧波の位相は電極全面で同相となるので境界条件により、後述の表面波および電子波の横方向伝搬は阻止され x 方向伝搬のみに限定される。このため、横方向波数を零と置き、電子波として $\phi_2 = \phi_{02} \exp[j\{\omega t - (\beta - j\alpha)x\}]$ の形の減衰波を仮定すれば充分である。これを上記の4階ラプラス方程式に代入すると、 $k^2 = (\beta - j\alpha)^2$ を得る。これをさらに(1)式に入れると、次式を得る:

$$\left. \begin{aligned} \beta/(\omega/v_T) &= \sqrt{(1/2) \{ \sqrt{(1-N)^2 + \eta^2} + 1 - N \}} \\ \alpha/(\omega/v_T) &= \sqrt{(1/2) \{ \sqrt{(N-1)^2 + \eta^2} + N - 1 \}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1), (2)式とともに, 電子波の分散関係を表す. Fig. 2 に波数 β と減衰定数 α の密度依存性を示した. 規格化密度 N を固定すると, β と α は η の増加とともに増加する.

伝搬定数 $k (= \beta - j\alpha)$ は Fig. 2 のように一般に複素数であるが, 特に $\eta = 0$ (損失無し) の場合に限り正の実数または純虚数のいずれかをとる. このことは(1), (2)式または Fig. 2 からわかるように, k は $\eta = 0$ の場合, 明らかに $0 \leq N \leq 1$ の範囲において正の実数 (即ち, $k = \beta \neq 0, \alpha = 0$), $1 \leq N$ の範囲では純虚数 $-j\alpha$ (即ち, $k = -j\alpha \neq 0, \beta = 0$) をとる. 前者は Fig. 2(a)の電子波伝搬領域 ($0 \leq N \leq 1$) における β ($\eta = 0$: ほぼカーブ A)

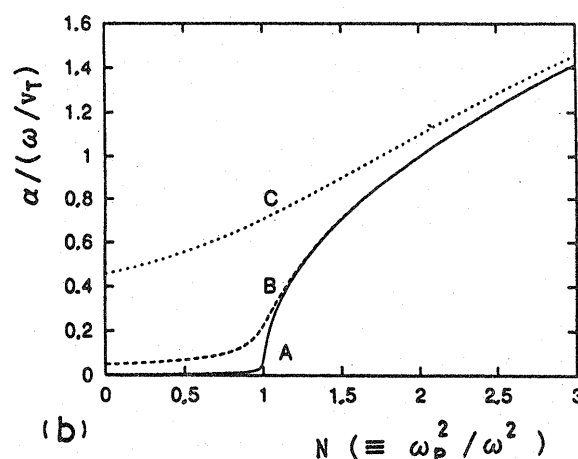
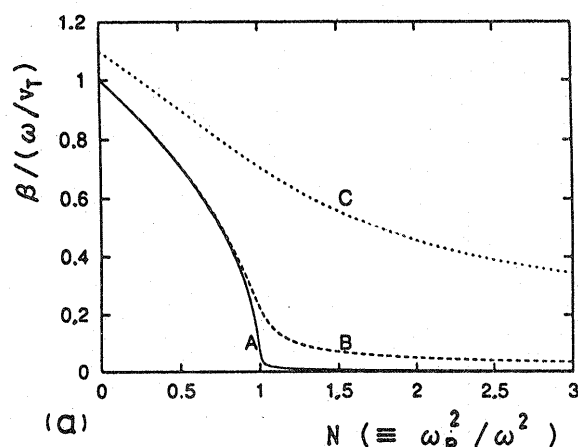


Fig. 2 Normalized wave number (a) and attenuation constant (b) for electron plasma wave. (A): $\eta = 0.01$, (B): $\eta = 0.1$, (C): $\eta = 1$.

を表し, 後者は Fig. 2(b)の電子波の遮断領域 ($1 \leq N$) における α ($\eta = 0$: ほぼカーブ A) に対応する. 特に後者は一般に遮断電子波と呼ぶことができ $\eta = 0$ の場合伝搬しないが, Fig. 2 のように損失 $\eta (\neq 0)$ により長波長・強減衰の伝搬波に変わる.

2.1 電界分布

各領域の電界を求めるために, まずプラズマ中の振動電位 ϕ_2 は上記の 4 階ラプラス方程式の解として求まる. 同様に, 誘電体中の振動電位 ϕ_1, ϕ_3 は 2 階のラプラス方程式から求まる. 境界条件に関する手続きは付録 B に述べた. 結果は次のように整理される;

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -E_{g1}(x+b) & (-b \leq x \leq -a), \\ \phi_2 &= -E_{pC}\{x + \delta \sin(kx)\} + V_0/2 & (-a \leq x \leq a), \\ \phi_3 &= -E_{g3}(x-b) + V_0 & (a \leq x \leq b), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } E_{pC} &= -\epsilon_g (V_0/2d)/\Delta \\ E_{g1} &= E_{g3} = -\epsilon_p (V_0/2d)/\Delta \\ \delta &= -\{N/(1-j\eta)\}/\{k \cos(ka)\}, \\ \Delta &= \epsilon_p + (a/d) \epsilon_g \{1 - (N/(1-j\eta)) \\ &\quad \times (\tan(ka)/ka)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

ϕ の時間因子 $\exp(j\omega t)$ は省略した. E_{g1}, E_{pC}, E_{g3} は電界を表し印加電圧 V_0 に比例する. 誘電体中の電界 E_{g1} と E_{g3} は等しい. プラズマ領域の電界 $E_p (= -\nabla \phi_2)$ は, 次のように二成分に分割することができる;

$$E_p = -\epsilon_g (V_0/2d) \{1 + \delta k \cos(kx)\}/\Delta = E_{pC} + E_{pw} \quad (5)$$

$$\text{ここで, } E_{pw} = E_{pC} \{\delta k \cos(kx)\}$$

である. E_{pC} はプラズマ中の一様な電界で波長無限大の反対称表面波の電界に対応する (付録 C 参照). E_{pw} は電子波定在波の電界を表す. (3)式により, δ は電位の表面波成分に対する定在電子波成分の比 (重畳度) を表す. また, k が純虚数の場合, (3)~(5)式中の三角関数はすべて双曲線関数に変わる.

2.2 電子波固有モード

$\eta = 0$ (損失無し) の場合, $\Delta = 0$ を満たせば, 電界は無限大となる. すなわち, 固有モードの共振が起こる. この共振条件は次式で表される;

$$N = N_G / \{1 + K_G^* \tan(ka)/ka\} \quad (6)$$

$$\text{ここで, } N_G \equiv 1 + K_G^*, \quad K_G^* \equiv (a/d) \epsilon_g$$

である. $k (= \beta - j\alpha)$ は, (1)または(2)式において η

$=0$ とする次式も満足しなければならない；

$$N=1-(ka)^2/R^2 \quad (7)$$

ここで、 $R \equiv \omega a/v_T$ である。 K_G^* (または、 N_G) と R は後で重要な二つの縮約パラメータとなる。 K_G^* はシステムの幾何学的寸法に、 R は電子温度に依存する。

$\eta=0$ の今の場合、前述のように k は、正の実数 ($k=\beta$) または純虚数 ($k=-j\alpha$) のいずれかに限る。したがって、(6)、(7)式を満足する固有モードもこの条件下に限定される。

固有モードの解は Fig. 3 のグラフの交点で表される。実線は(6)式、破線は(7)式を表す。双方とも N を ka の関数として表した。右半面は N を正数 βa の関数として表し、左半面は純虚数 $-j\alpha a$ の関数として表した。二本のカーブはともに周知の反共振点 D (anti-resonance, $N=1$, $ka=0$) を起点として右半面と左半面へ向かって描かれる。二本のカーブの交点のもつ密度 N と ka (βa , または $-j\alpha a$) が、固有共振モード (固有解) を表す。

パラメータ R を変えると、破線が反共振点 D を中心に左右に伸縮するので、固有解の数も変わる。Fig. 3 の m 値は固有解を分類しており、電子波定在波の個数を表す。 $m=0$ (即ち、 $1 \leq N \leq N_G$, ka : 純虚数) の範囲は、いわゆる主共振の存在領域を表す。 $m=1, 2, \dots$ (即ち、

$0 < N \leq 1$, ka : 実正数) の範囲は電子波高次モードの存在領域を表す。高次モードのとり得る βa の領域はかなり狭い。

これらの固有解は、それぞれ直流放電管で観測される共振群[9,10]、いわゆる、主共振と Tonks-Dattner (T-D) 共振、に対応する。特に純虚数をとる主共振 ($m=0$) は境界面 $X=\pm a$ で反射するが定在波の立たない「遮断電子波の共振」を意味すると解釈される。

2.3 固有モードの存在領域

Fig. 3 の破線が R の変化により反共振点 D を中心に横方向に伸縮するにつれて、前述のように固有解 (交点) の数も大幅に変わる。 R が零から増加するとき、次の範囲では実線 A との交点はない；

$$0 < R \leq \pi/2 \quad (8)$$

このとき破線と実線の出発点 (反共振点 D) は、共振点 (交点) とは見なされない。ここで注目すべきことに、 R が増加し $\pi/2$ を越えると、 $m=1$ ($0 \leq N \leq 1$) の共振点 (交点) が現れる。例えば、Fig. 3 の破線 B ($R=1.8$) は実線 A と一点で交わる。この解の存在条件は(6)、(7)式から次のように求まる；

$$\pi/2 \leq R \leq \sqrt{3N_G/K_G^*} \quad (9)$$

R がさらに増加するとき、 $m=1$ の共振点は、 $m=0$ ($1 \leq N$) へ滑らかにつながるの、次の範囲では $m=0$ の共振点に変わる；

$$\sqrt{3N_G/K_G^*} \leq R \leq 3\pi/2 \quad (10)$$

続いて R がさらに増加すると、 $m=0$ が存続するとともに、 $m=2$ 以上 ($0 \leq N \leq 1$) の交点が次々に現れる。例えば、破線 C ($R=10$) は実線 A と $m=0, 2, 3$ の三点で交わる。このようにして R が増加しその値が $(m-1/2)\pi$ を越えるごとに、 $0 \leq N \leq 1$ の範囲に次々と高次モードが現れるが、 $m=0$ およびいったん現れた $m=2$ 以上のモードはなくなることはない。

$R \rightarrow \infty$ の極限では破線は水平となり、 $N=N_G$ ($-j\alpha a \rightarrow -j\infty$) および $N=1$ ($m=2, 3, 4, \dots$, $\beta a \neq 0$) が得られる。

R に含まれるパラメータ (ωa , T_e) 平面上において、各固有モードの存在領域を Fig. 4 に示した。図は $K_G^*=1$ の場合で、 R に関する上の不等式の上下境界を曲線 (A, B, C) で区切り、各曲線のもつ R 値を図中に記入した。電子温度 T_e は通常の放電で妥当な範囲を用いた。

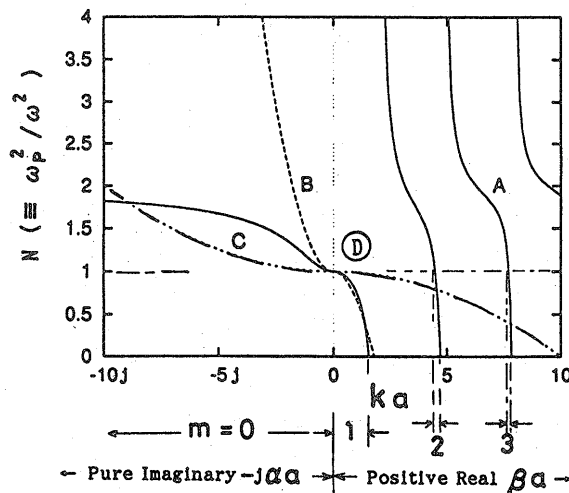


Fig. 3 Graphical representation for normal mode resonances in a lossless plasma. A: equation (6). B: $N=1-(ka)^2/R^2$ ($R=1.8$). C: $N=1-(ka)^2/R^2$ ($R=10$). (D): anti-resonance point ($N=1$, $ka=0$). m : mode number. $K_G^*=1$ ($\therefore N_G=2$).

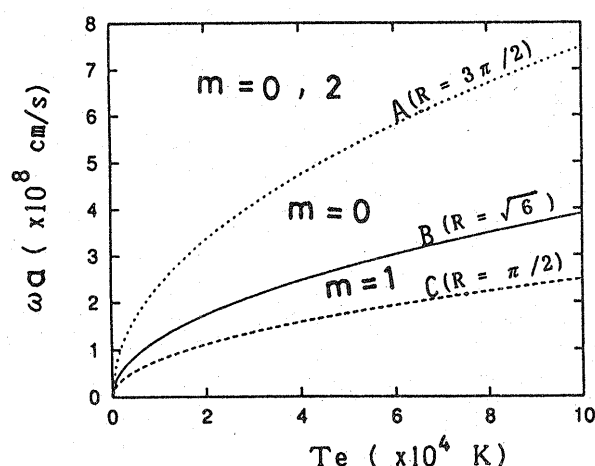


Fig. 4 $\omega\alpha$ as a function of electron temperature T_e . A: $\omega\alpha = v_T 3\pi/2$ ($\approx 4.71v_T$). B: $\omega\alpha = v_T \sqrt{3N_G/K_G^*}$ ($= v_T \sqrt{6} \approx 2.45v_T$). C: $\omega\alpha = v_T \pi/2$ ($\approx 1.57v_T$). $K_G^*=1$ ($\therefore N_G=2$). $\gamma=5/3$. m : mode number.

各曲線の間にモード名を記した。曲線 C の下部領域に共振モードは存在しない。 $m=0$ は曲線 B の上部全領域に存在する。曲線 BC 間の最下部領域には $m=1$ モードだけが存在し、 $m=0$ へ連続的につながる。通常の実験条件では K_G^* は 1 より大である。このとき曲線 B が多少降下し $m=1$ の領域が狭くなるが、モードの配置に変更はない。

特に、電子温度零 ($T_e \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$) における共振密度 $N=N_G$ ($-j\omega a \rightarrow -j\omega$) は、Fig. 1 の z 方向 (または、 y 方向) に伝わる反対称表面波の波長無限大における共振に対応するので、幾何学的共鳴 (Geometrical resonance) と呼ぶことができる (付録 C 参照)。

筆者らの調査によれば、固有解 $m=1$ の存在は従来実験的にも [9] 理論的にも [10] 指摘されていない。その原因は、その滑らかな連結のため見掛け上 $m=0$ に含まれ区別がつかないことによると推測される。文献 [9, 10] の $m=1$ (the 1st) and 2 (the 2nd) は、それぞれ本文の $m=2$ and 3 に対応する。

3. 高周波放電の維持

次に高周波放電へ移行する。すなわち、これまでの直流放電プラズマを完全に除去し、プラズマは今後「高周波単独の放電」により維持されているものとする。このとき、第 2 章で導いた電界の式はそのまま適用できる。プラズマ維持のためには、電子の吸収パワーと損失パワーとがバランスする必要がある。

3.1 吸収パワー

電極単位面積当たりのプラズマ中 x 方向電流密度 J は、その連続性から $\nabla \cdot J = 0$ ($J_y = J_z = 0$) を満足する。電流 J_x は付録 A の関係式から次のように導出される；

$$J_x = j\omega\epsilon_0 E_p - n_0 e u = j\omega\epsilon_0 \epsilon_p E_{pC} \\ = \epsilon_0 \omega \epsilon_g (V_0/2d) \frac{\eta N + j(1 + \eta^2 - N)}{(1 + \eta^2) \Delta} \quad (11)$$

高次モードの電流成分は外部端子電流 JS (S = 電極面積) に陽には現れず、単に Δ を通してのみ影響が顕れる。

電極単位面積当たりの吸収パワー P_{ab} は、(5), (11) 式を用い冗長な演算を経て、次のように求まる；

$$P_{ab} = (1/2) \int_{-a}^a R_e (J \cdot E_p) dx \\ = \omega a \epsilon_0 U^2 N \{ \eta (1 - TA_{Re}) - (1 - N) TA_{Im} \} / |\Delta^*|^2 \quad (12)$$

ここで、 $U \equiv \epsilon_g V_0/2d$,

$$|\Delta^*|^2 \equiv (1 + \eta^2) |\Delta|^2 = (N_G - N - NK_G^* TA_{Re})^2 + (\eta N_G + NK_G^* TA_{Im})^2$$

上線 “ $-$ ” は複素共役を表す。 U は高周波電圧 V_0 に比例する。 TA_{Re} , TA_{Im} は $\tan(ka)/ka$ の実数部と虚数部を意味し、 $\eta \neq 0$ における関係式 $ka = (\beta - ja)R$ を用いて、それぞれ次のように表される；

$$TA_{Re} = \{ C_* \sin(2C_*) + D_* \sinh(2D_*) \} / \{ (C_*^2 + D_*^2) [\cos(2C_*) + \cosh(2D_*)] \}, \\ TA_{Im} = \{ D_* \sin(2C_*) - C_* \sinh(2D_*) \} / \{ (C_*^2 + D_*^2) [\cos(2C_*) + \cosh(2D_*)] \}$$

ここで、 $C_* = \beta R$, $D_* = \alpha R$ である。特に電子温度零の極限の場合 ($T_e \rightarrow 0$)、 TA_{Re} と TA_{Im} は零となるので、 P_{ab} は簡単になる； $P_{ab} = \omega a \epsilon_0 U^2 \eta N / \{ (N_G - N)^2 + (\eta N_G)^2 \}$ 。この式は電子温度零の前文 [8] の結果と一致する。

3.2 損失パワー

単位時間単位体積あたり 1 個の電子の失うエネルギーを Q と置けば、 Q_{loss} は次式で表される：

$$Q_{loss} = 2aQn_0 = a\epsilon_0 \omega Q_* N \quad (13)$$

ここで、 $Q_* \equiv 2\omega (m_e/e^2) Q$ と置く。上式では Q_{loss} が密度 n_0 に比例するが、この比例関係が近似的に成り立つ放電は、表面波の分野において“拡散領域 (Diffusion gas-discharge regime)” [11] と呼ばれ、 10^{13} cm^{-3} 以下の密度の放電に対してほぼ成立する。 Q の表式は、ガス分子 (原子) の電離・励起・衝突、壁面への衝突およ

びそれらの衝突断面積など電子のエネルギー損失に関係する全ての要因を含むので一般に単純ではないが、確度のある表式が提案されている[11].

3.3 パワーバランス

$P_{ab} = Q_{loss}$ と等置し共通因子を除去すれば、次のパワーバランス式を得る;

$$\frac{\eta(1 - TA_{Re}) - (1 - N)TA_{Im}}{(N_G - N - NK_G^*TA_{Re})^2 + (\eta N_G + NK_G^*TA_{Im})^2} = \left(\frac{\sqrt{Q_*}}{U}\right)^2 \quad (14)$$

左辺は $\omega a \varepsilon_0 U^2 N$ で規格化された吸収パワー $P_{ab}/\omega a \varepsilon_0 U^2 N$ を表す。前述同様、電子温度零の場合、 TA_{Re} と TA_{Im} は零となる。

4. 放電特性

パワーバランス式(14)はプラズマ維持に必要な電子密度を与える。実際の実験における可変パラメータはガス圧と印加電圧である。その縮約パラメータはそれぞれ η および U である。 η および U はそれぞれガス圧および注入 RF パワーの増加とともに増加する。他の独立な縮約パラメータ N_G と R は任意に選択可能である。ここでは規格値 $K_G^* = 1$ ($\therefore N_G = 2$) を選び、 R を適宜変化させた。

4.1 $\sqrt{3N_G/K_G^*} \leq R$ の場合

前述のように、縮約パラメータ R がこの範囲の場合、多数の固有解が存在する。Fig. 5 と Fig. 6 は、(14)式の左辺を N の関数として表す。 R と η の値は Fig. 5 と Fig. 6 とで異なる値を用いた。図のいくつかのピークは吸収パワーの増大を意味し、Fig. 3 の交点(固有モード)近傍に現れる。電子温度零の場合、Fig. 5 の実線(A)で示すように最高の主共振ピーク($m=0$)だけが $N=N_G(=2)$ に現れ、電子波の高次モードのピークは現れない。一方、電子温度が零でない場合($R \neq \infty$, $T_e \neq 0$, $\eta < 1$)、破線(B)で示すように、上と同じ主共振($m=0$)の最高ピークがいくらか低い密度側($1 < N < N_G$)に現れるとともに、電子波高次モード($m=2, 3, 4, \dots$)の小さなピーク群が $0 < N < 1$ の領域に現れる。反共振($N=1$)の存在の影響は何ら確認されない。また、この場合 R が大であるので、 $m=1$ のピークは現れない。

(14)式の右辺 Q_*/U^2 (即ち、損失レベル)を Fig. 5 に水平線で示す。この損失線は印加電圧 U の増加とともに無限大のレベル位置から降下する。主共振カーブの最高値(頂点)に達すると、定常放電が開始する。すな

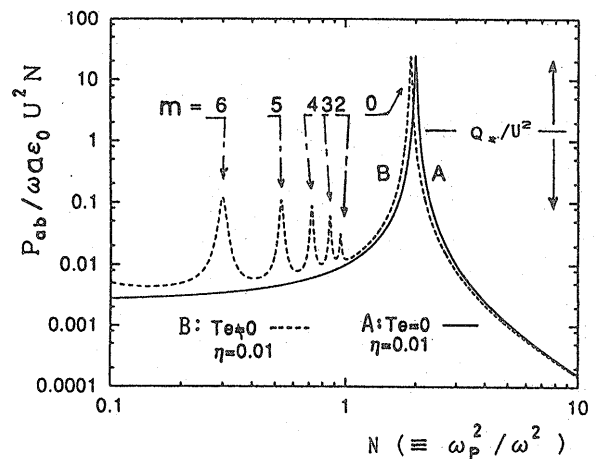


Fig. 5 $P_{ab}/\omega a \varepsilon_0 U^2 N$ and Q_*/U^2 as a function of N in a range of $\sqrt{3N_G/K_G^*} \leq R$. A: $R=\infty$ ($\therefore T_e=0$). B: $R=20$ ($\therefore T_e \neq 0$). $K_G^*=1$ ($\therefore N_G=2$). $\eta=0.01$. m : mode number.

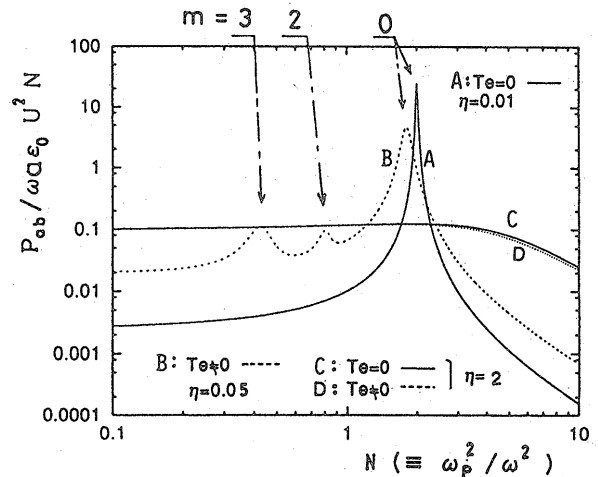


Fig. 6 $P_{ab}/\omega a \varepsilon_0 U^2 N$ as a function of N in a range of $\sqrt{3N_G/K_G^*} \leq R$. A: $R=\infty$ ($\therefore T_e=0$) and $\eta=0.01$. B: $R=10$ ($\therefore T_e \neq 0$) and $\eta=0.05$. C: $R=\infty$ ($\therefore T_e=0$) and $\eta=2$. D: $R=10$ ($\therefore T_e \neq 0$) and $\eta=2$. $K_G^*=1$ ($\therefore N_G=2$). m : mode number.

わち、頂点はパワーバランス式を満足する最初の解を表す。この頂点は定常放電のためのいくつかの“しきい値”(最小電圧、最小密度、最大衝突周波数)を与える(4.4-2節参照)。

電圧の増加とともに損失線が更に降下すると、Fig. 5 の実線(A)の主共振カーブとの交点は二つに分離する。容易にわかるように、これらのうち低密度側の交点は放電の“ゆらぎ”に対して安定でなく(不安定解)、実際の放電では実現されない。一方、高密度側の交点は物理的に安定で(安定解)、実際の放電で実現される。高密度

側の安定解は, $N_G < N$ の範囲に得られ, 電圧 U の増加とともに単調に増加する. 温度効果を示す Fig. 5 の破線(B)は実線(A)の左へいくらか移動するので, 安定解は電子温度の存在によりいくらか減少するが, 電圧 U の増加により $N_G (= 2)$ を越えることができる.

つぎに Fig. 5 と Fig. 6 を比較すると, R の減少 (即ち, 電子温度の増加) とともに, 高次ピークは左へ移動しピークの高さが減少する. また η が増加すると, 吸収が増え, カーブの底辺は全体として上昇するが, 各ピークの高さが低くなる. 損失線を上下させれば, これらの結果から, 安定解 N の電圧 U , R および η 依存性の概略を知ることができる (4.5節参照).

特に $1 < \eta$ の範囲に入ると, 電子波の減衰が増大するので, Fig. 6 C と D のカーブに見るように全ピークがほぼ完全に消失し, 同時に主共振の存在した N 値付近から吸収レベルが低下する. すなわち, “非共振” の状態となる. 損失線を引けば, その安定解は $N_G < N$ の範囲に得られる. また C と D の比較からわかるように, この領域においても電子温度の影響により生成密度はいくらか低下する.

4.2 $\pi/2 \leq R \leq \sqrt{3N_G/K_G^*}$ の場合

前述のように, R がこの範囲の場合 $m=1$ だけが存在可能となる. Fig. 7 は, $N_G=2$ ($\therefore K_G^*=1$) および $\eta=0.01$ のもとで, R を無限大から 1.8 ($\pi/2 < 1.8 < \sqrt{6}$) まで変化させ, 規格化吸収パワーを N の関数として表す. $R=\infty$ ($\therefore T_e=0$) の場合, 主共振 ($m=0$) のピークは, 実線(A)の $N=N_G$ の位置に現れる. カーブ B, C, D の順に電子温度が上がり R が小さくなると, 共振ピークの高さは一定のまま, 頂点の位置が $1 < N < N_G$ の高密度側から $0 < N \leq 1$ の低密度側へ滑らかに移動する. 同時に, モード名もカーブ B の $m=0$ からカーブ D の $m=1$ へ順次滑らかに変わる. しかしながら, これらのカーブを見る限り $m=0$ と 1 の区別は困難であり, 密度に頼るしか判定法はない. こうして, $0 < N \leq 1$ の範囲は $m=1$, $1 \leq N$ の範囲は $m=0$ と判定される.

いま, $0 < \eta \ll 1$ の場合, Fig. 7 の共振カーブ D に対して損失線を引くと, $m=1$ による生成密度は明らかに $0 < N < 1$ の範囲に得られる. 一方, $1 \leq \eta$ の場合, 本節の R の範囲の場合にも, Fig. 6 の C, D とほぼ類似の “非共振カーブ” が得られる. したがって前述同様, 安定解は $N_G < N$ の範囲に得られ, 電子温度により生成密度はいくらか低下する.

4.3 電位 (電界) 分布

(3)式は虚数部をもつので, その電位 (電界) 分布を

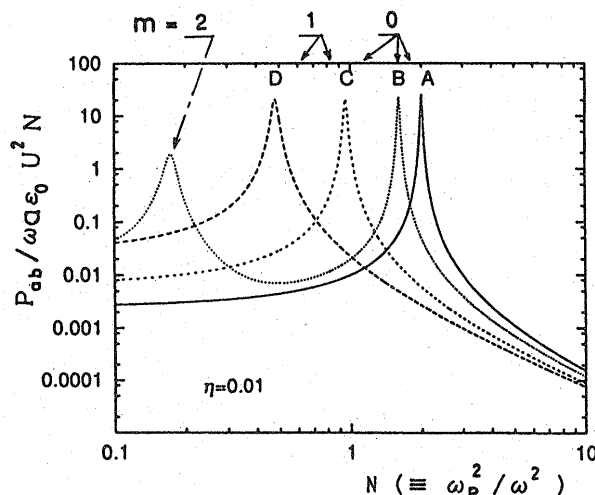


Fig. 7 $P_{ab}/\omega\epsilon_0 U^2 N$ as a function of N in a range of $\pi/2 \leq R \leq \sqrt{3N_G/K_G^*}$ (curve D). A: $R=\infty$ ($\therefore T_e=0$). B: $R=5$ ($\therefore T_e \neq 0$). C: $R=2.3$ ($\therefore T_e \neq 0$). D: $R=1.8$ ($\therefore T_e \neq 0$). $\eta=0.01$. $K_G^*=1$ ($\therefore N_G=2$). m : mode number.

描くことは必ずしも容易ではない. ここでは定性的理解を得るために, $\eta=0$ の場合における各領域の電位分布 ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 の概略を求める. 結果を Fig. 8 (a) および (b) に実線で示した. 誘電体中の電位 ϕ_1 , ϕ_3 は $x=\pm a$ においてプラズマ中の電位 ϕ_2 と連続的につながる.

Fig. 8 (a) は $1 < N$, かつ $\sqrt{3N_G/K_G^*} \leq R$ の場合である. プラズマ中の電位 ϕ_2 (実線) は表面波成分: $E_{pc}x + V_0/2$ (破線 A) と電子波成分: $E_{pc}\delta\sin(kx)$ (破線 B) の和となる. この分布は (3) 式の各係数の符号を判定することにより得られる. まず Fig. 5 の安定解に対する場合, その N 値は Fig. 3 の $m=0$ の固有解の N 値より大であるので, $\eta=0$ の場合 $\Delta < 0$ となる. また δ は純虚数, $\epsilon_p < 0$ となる. このため各係数の符号は $-E_{g1}$ (または, $-E_{g3}$) > 0 , $-E_{pc} < 0$, 電子波成分 $-E_{pc}\delta\sin(-j\alpha x)$ の係数は正となり, Fig. 8 (a) の破線および実線が得られる. プラズマ中の破線 B は遮断電子波により正弦双曲線関数となる. この結果電界 ($\propto -\partial\phi/\partial x$) は $x=0$ の面に関して対称となる. 結果として実線の傾きは $x=\pm a$ では正, $x=0$ では負となるので, 電界は表面近傍で強くなる. 即ち, 表面波的性格をもつ. 傾きの表式は図説に示した. $x=0$ における負の不自然な傾きは, $\eta \neq 0$ の場合損失効果により零または正に改善されると推測される. この電位 (電界) 分布は Fig. 5 の B および Fig. 6 の B および D の主共振 ($m=0$) の安定解のもつ分布を近似すると考えられる.

$0 < N < 1$ かつ $\pi/2 \leq R \leq \sqrt{3N_G/K_G^*}$ の場合も同様の方法で得られる. この場合, $\delta < 0$ であり, 数値計算に

よれば $\Delta > 0$, $\epsilon_p > 0$ のように符号が変わる. この結果, $-E_{g1}$ (または, $-E_{g3}$) > 0 , $-E_{pc} > 0$, $-E_{pc}\delta < 0$ となり, Fig. 8(b)が得られる. (a)図と比較すると, 直線 A の傾きが逆転し破線 B が定在電子波により正弦三角関数に変わるが, その形は(a)図とほぼ似ている. この(b)図は Fig. 7 D の主共振 ($m=1$) の安定解 ($N < 1$) のもつ分布を近似すると考えられる. ここで, 印加電圧増加により例えば Fig. 7 D の主共振カーブに沿って 1 以下の安定解の密度 N が 1 を越えるとき, $x=0$ における破線 A と B の各係数は上記同様符号が逆転するが実線の傾きは滑らかに変化するので, その分布は Fig. 8(b)の形から Fig. 8(a)の形へ滑らかに変化する.

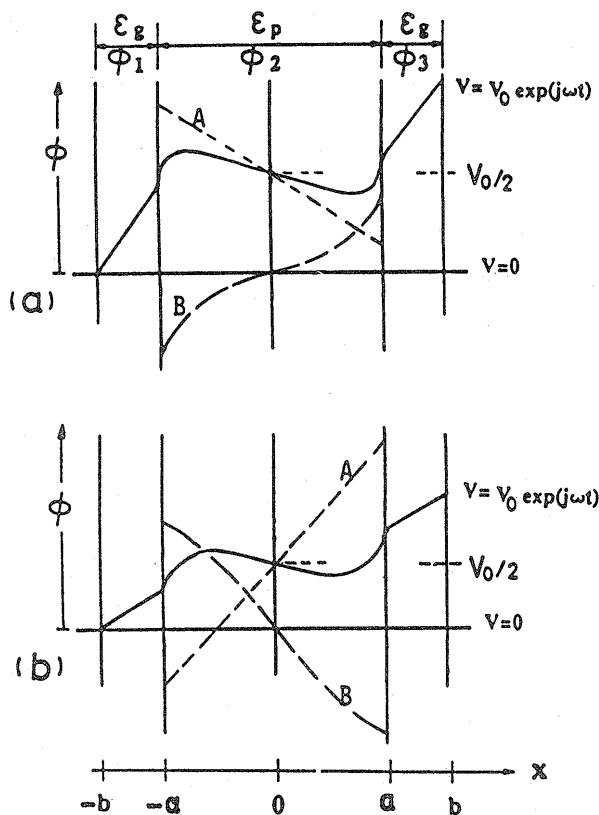


Fig. 8 Illustrations for potential profile in each region (full lines).

(a): $1 < N$ and $\sqrt{3N_G/K_G^*} \leq R$, $\partial\phi_2/\partial x$ ($x=\pm a$) $= -E_{pc}$ ($1-N$) $\{>0\}$ and $\partial\phi_2/\partial x$ ($x=0$) $= -E_{pc}\{1-N/\cosh(R\sqrt{N-1})\} \{<0\}$.

(b): $0 < N < 1$ and $\pi/2 \leq R \leq \sqrt{3N_G/K_G^*}$, $\partial\phi_2/\partial x$ ($x=\pm a$) $= -E_{pc}$ ($1-N$) $\{>0\}$ and $\partial\phi_2/\partial x$ ($x=0$) $= -E_{pc}\{1-N/\cos(R\sqrt{1-N})\} \{<0\}$.

$\partial\phi_1/\partial x = \partial\phi_3/\partial x$ (>0). A (---): $-E_{pc}x + V_0/2$. B (----): $-E_{pc}\delta \sin(kx)$.

4.4 安定解の一次近似

パワーバランス式は超越関数 $\tan(ka)/ka$ を含むので, 安定解 N の関数表示は不可能となる. ここでは生成プラズマ密度の定性的性質を調べるために, $m=0$ と 1 に対する近似解を求める.

4.4.1 生成プラズマ密度

まず, $kacot(ka)$ を $ka=0$ (即ち, $N=1$) のまわりに一次近似すると, $kacot|ka| \approx 1 - (ka)^2/3$ (但し $0 \leq |ka| < \pi$) を得る. これを $TA \equiv \tan(ka)/ka$ に代入して, $TA \approx 3\{3 - (1-N)R^2 - j\eta R^2\} / \{[3 - (1-N)R^2]^2 + (\eta R^2)^2\}$ を得る. さらに, この実数部と虚数部を(14)式に入れると, 次の四次方程式を得る;

$$\{(1-N)^2 + \eta^2\} \{N^2 - 2N_G(1 - 3/R^2)N + N_G^2(1 - 3/R^2)^2 + \eta^2 N_G^2 - \eta U^2/Q_*\} = 0$$

その 4 個の解のうち, 第一因子の複素根 $N=1 \pm j\eta$ は反共振に関する解と見られるが, 物理的意味はない. 第二因子による次の二実根のみ物理的意味がある;

$$N = N_G(1 - 3/R^2) \pm \sqrt{(U^2/Q_*)\eta - \eta^2 N_G^2} \quad (15)$$

負符号の根は不安定解で有用でない. 正符号の根が安定解に対応する. $3/R^2$ の項は前文[8]の結果に対する補正項である. 一次近似の有効範囲は, 収束半径 π から決まり, $(1-N)^2 + \eta^2 \leq (\pi/R^2)^2$ で表される円内に限られる.

4.4.2 しきい値

(15)式の根号内が正の条件から, U および η に対するしきい値 U_c および η_m が求まる;

$$U^2 \geq \eta Q_* N_G^2 \quad (\equiv U_c^2) \quad (16)$$

$$\eta \leq U^2/Q_* N_G^2 \quad (\equiv \eta_m) \quad (17)$$

U_c と η_m はそれぞれ最小しきい値電圧, 衝突周波数最大しきい値を定義する. 放電維持のためには, 電圧 U および衝突周波数 η は各不等式を満足する必要がある. これらのしきい値は前文[8]の結果と同一で修正されない.

4.5 電子密度 N の V_0 および η 依存性

Fig. 9 および Fig. 10 は縮約パラメータ R を一定値 ($A: R^2 = \infty$, $B: R^2 = 6$, $C: R^2 = 3$) に選んで, (15)式の規格化密度 N を規格化電圧 U および規格化衝突周波数 η の関数としてそれぞれ表した. 図のように, 生成密度 N はそれぞれ双曲型および半楕円型の曲線に従う変化をする.

Fig. 9 の場合, しきい値電圧 U_C で放電を開始し, 電圧の増加とともに密度は徐々に増加し, その後ほぼ直線的に増加する. 直線部の傾きは $\partial N / \partial U \approx \sqrt{\eta / Q_*}$ となる. R の増加とともに, カーブは全体として降下する. すなわち, 放電開始時のしきい密度値および定常放電の密度は, 電子温度の増加とともに全体として低下する. また図中の U_G より充分高い電圧を印加すると, 密度は N_G 以上に高くなる. 前述同様, 密度 N が 1 より大きか小により動作モードが判定される. モード名の範囲を図中に, U_G の表式を図説に示した.

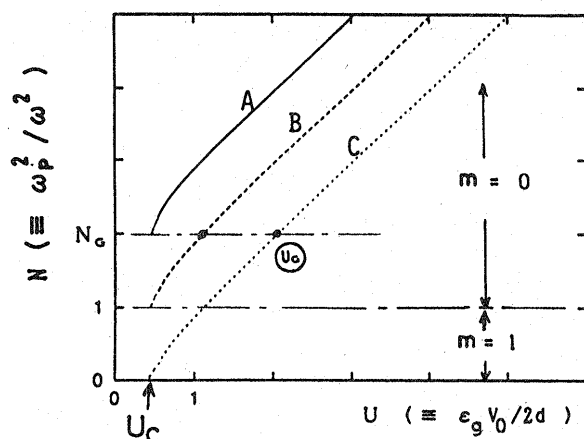


Fig. 9 Normalized plasma density N as a function of U . A: $R^2 = \infty$ ($\therefore T_e = 0$). B: $R^2 = 6$ ($\therefore T_e \neq 0$). C: $R^2 = 3$ ($\therefore T_e \neq 0$). $K_G^* = 1$ ($\therefore N_G = 2$). m : mode number. U_C : threshold for RF voltage. Points $\bullet$ for $N = N_G$; $U_G = \sqrt{(Q_*/\eta) \{ \eta^2 N_G^2 + (3/R^2)^2 \}}$

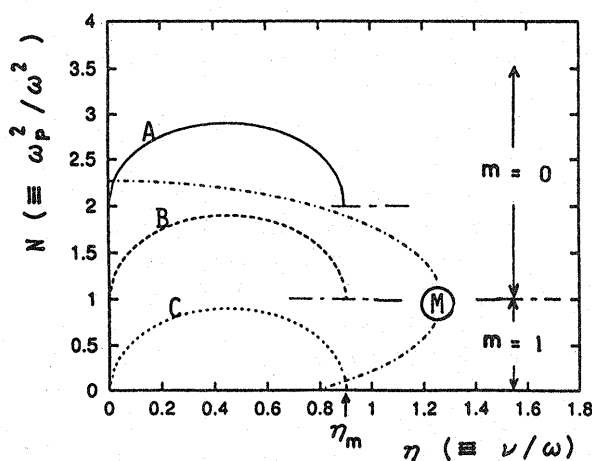


Fig. 10 Normalized plasma density N as a function of η . A: $R^2 = \infty$ ($\therefore T_e = 0$). B: $R^2 = 6$ ($\therefore T_e \neq 0$). C: $R^2 = 3$ ($\therefore T_e \neq 0$). $K_G^* = 1$ ($\therefore N_G = 2$). m : mode number. η_m : threshold for η . (M): maximum ellipse for the first approximation.

ガス圧の上昇とともに, 規格化衝突周波数 η は一般に増加する. このため Fig. 10 の場合, 電圧一定でガス圧が充分大の状態から低下するとき, η の最大しきい値 η_m で定常放電を開始し, η の減少とともに生成密度は徐々に増し, $\eta = \eta_m/2$ で最大値に達した後再び低下し, $\eta = 0$ で放電が停止する. η_m は印加電圧の増加とともに増加する. この半楕円型カーブは R の増加とともに全体として降下する. 動作モードの範囲を図中に示した. 実際の放電において, ガス圧と衝突周波数 ν とは必ずしも比例せず, 且つガス圧の増加とともに電子温度が減少 (または, R が増加) する傾向をもつので, この半楕円型カーブはある程度変形することが予想される.

Fig. 10 における $N=1$, $\eta=0$ を中心とする楕円 (M) は, 一次近似の成り立つ最大範囲を表す. この楕円は最大の収束半径 $\pi/R^2 \{ = 2(2/\pi), R = \pi/2 \}$ をもつ円に対応する. 楕円 (M) の内部において一次近似が成り立つ. この近似円の半径 $\pi/R^2 \{ = \pi(\gamma k T_e / m_e) / (\omega a)^2 \}$ は, ωa の増加および T_e の減少とともに小さくなるが, 充分小さな電圧 U を印加すれば半楕円型生成密度を楕円 (M) の内部に収めることができる. 一方, η_m が大の場合, 生成密度用半楕円は近似用楕円 (M) の外側へ拡大する. この領域の近似は粗いので, 拡大部分の生成密度用半楕円も, η_m の増加とともにいくらか変形すると考えられる.

5. 検 討

$m=0$ の主共振は電子波の遮断領域 ($1 < N$) に現れるので, 本文記述のように定在波の立たない遮断電子波が境界条件により共鳴したものと言える. 一方, 幾何学的共振は電子温度零における反対称表面波の波長無限大の極限值として得られ (付録 C), 実験的にも平板型直流放電の高周波共振として観測されている [10]. しかし現実に電子温度零の仮定はあり得ないので, 本文の導出過程から考えると両者は明らかに同一である. すなわち, 幾何学的共振は「遮断電子波の共振 ($m=0$)」の近似と見なすことができる. また温度零の幾何学的共振の密度が温度効果により低下する理由は, プラズマの蓄積エネルギーとして $m=0$ の場合電子 1 個当たりの運動エネルギーが追加されることによると考えられる.

現実の高周波プラズマは電子の粒子バランスとパワーバランスを同時に満足するように生成されると考えられる. 二者を両立させることは可能と考えられるが, かなりの複雑化が予想される. 本文では粒子バランスを無視した. 第 1 章に述べたように粒子バランスを考慮することは, 電子温度と密度分布を同時に考慮することと等価

である。本解析では一様電子密度を仮定したが、高周波放電では密度は平坦化されると言われる。事実、その例として、平行平板の場合数値計算例[3]があり、円筒ガラス管の場合直流放電の場合よりも平坦化するという比較観測例[12]もある。その理由は、境界近傍の低密度領域には高周波電界が集中するため、表面近傍の電子温度と電離周波数が高くなりこの近傍の密度が上昇することによると推測される[3,4]。

本解析に密度分布の影響を追加する場合かなり複雑になる。しかし波長の長い円柱型双極表面波モード（今の場合、主共振 $m=0$ に対応）に対する影響は少ないので[14,15]、本結果は近似的に成立すると考えられる。

本解析では電子温度は予め与えられる量として補助的に用いた。Fig. 4において、 $K_G^* = 1$, $\eta = 0$ の場合に、通常の電子温度 $T_e = 4 \sim 9$ 万度, $a = 1 \sim 5$ cm とすれば, 2.45 GHz 動作で, $\omega a = 1.54 \times 10^{10} \sim 7.69 \times 10^{11}$ cm/s ($R \approx 150 \sim 5100$) となるので、プラズマ生成に寄与するモードは $m=0$ となる。一方、 13.56 MHz 動作とすれば, $\omega a = 8.52 \times 10^7 \sim 4.25 \times 10^8$ cm/s ($R \approx 0.84 \sim 2.8$) となるので、生成寄与モードは $m=1$ の動作領域に入る。

本理論の結果は約 1 MHz から約 5 GHz 程度までの周波数範囲で有用と推定される。瞬時電界が零となる時刻近傍では拡散により瞬時的にプラズマが消失するので、定常状態に関する本解析は低周波では採用できなくなる。周波数の下限はその消失時間（拡散時間）から概略推定される。一方、周波数の上限は、密度が 10^{-13} cm $^{-3}$ を越えない範囲 (Q_{loss} の線形条件) から決まり、正確には印加電圧にも依存する。適用ガス圧条件は、Fig. 10 からほぼ $0 < \eta \leq \eta_m$ の範囲となる。 η_m は概略(17)式で与えられ、印加電圧、周波数、損失 Q および幾何学的共鳴周波数 N_G により大幅に変化する。

6. 結 論

誘電体遮蔽電極で構成された平行平板電極間の高周波放電に関して、電子温度の影響に着目しながら流体モデルを用いて解析した。この結果次の諸事項が明らかとなった。(1)これまで指摘されていなかった $m=1$ の電子波固有モードが存在する。この結果、プラズマ生成に寄与する固有モードは、パラメータ R に依存して $m=0$ ($1 \leq N$) と $m=1$ ($0 < N \leq 1$) の二つである。(2)電子温度が零でない場合には、温度零の場合よりも生成電子密度が低下する。低下量は電子温度の増加とともに増加

する。(3) η 固定の条件下では、印加電圧の増加とともに、プラズマ密度は双曲線型のカーブを描きながら増加する。(4)一定の印加電圧下では、電子・中性粒子衝突周波数 ν の増加とともに、プラズマ密度は半楕円型のカーブを描きながら増減する。(5)定常放電の開始条件（しきい値）は、一次近似の範囲内では従来の結果と同じである。その最低しきい値電圧および最大しきい値衝突周波数の近似式を与えた。

謝辞

著者の一人 (S. N.) はソフィア大学 (ブルガリア) 物理学科 Professor I. Zhelyazkov 氏およびモントリオール大学物理学科 Professor M. Moisan 氏からの激励に対し深謝する。本研究は一部文部省科学研究費（一般研究 C-07680516）により行われた。

参 考 文 献

- [1] M. N. Hirsh and H. J. Oskam, *Gaseous Electronics*, (Academic Press, New York, 1978).
- [2] 堀池靖浩, 進藤春雄: プラズマ・核融合学会誌 **71**, 697 (1995)
- [3] W. P. Allis, S. C. Brown and E. Everhart, *Phys. Rev.* **84**, 519 (1951).
- [4] D. B. Graves and K. F. Jensen, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-14**, 78 (1986).
- [5] C. M. Ferreira and M. Moisan, *Physica Scripta* **38**, 382 (1988).
- [6] 野中繁彦: プラズマ・核融合学会誌 **72**, 622 (1996).
- [7] S. Nonaka, *Proc. of the 1989 International Conf. on Plasma Phys. Vol. 3*, p. 1205, Nov. 22-28 (1989), New-Delhi, India.
- [8] S. Nonaka, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3217 (1990); Errata, **60**, 1432 (1991).
- [9] J. V. Parker, J. C. Nickel and R. W. Gould, *Phys. Fluids* **7**, 1489 (1964).
- [10] P. E. Vandenplas, *Electron Waves and Resonances in Plasmas*, Interscience Publishers, London (1968) Chpts. 2 (p. 43-69) and 6 (p. 173-191).
- [11] Zhelyazkov, E. Benova and V. Atanassov, *J. Appl. Phys.* **59**, 1466 (1986).
- [12] 砂盛 論, 池沢俊治郎: 電気学会論文誌 A-52, 397 (1987).
- [13] S. Nonaka, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 1449 (1992).
- [14] Y. Akao and Y. Ida, *Jpn. J. Appl. Phys.* **6**, 525 (1967).
- [15] S. Nonaka and Y. Akao, *J. Appl. Phys.* **54**, 3798 (1983).

付録A：流体モデル

電子温度を考慮するためにプラズマの流体モデルを用いる。静電近似の範囲内で電子群の運動を記述する方程式は、連続の式、運動方程式、ポアソン式、の三式である。これらを $\exp(j\omega t)$ をもつ振動量 n , u , E_p に関して線形化すると、それぞれ次式を得る；

$$j\omega n + n_0 \nabla \cdot u = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$j\omega(1-j\eta)m_en_0u = -en_0E_p - \gamma\kappa T_e \nabla n \quad (\text{A-2})$$

$$\nabla \cdot E_p = -(e/\epsilon_0)n \quad (\text{A-3})$$

ここで、変量は電子密度 ($=n_0+n$)、速度 ($=u$)、電界 ($=E_p$) であり、下付添字 0 は零次量を表す。他の記号は(1)式の下部に説明した。つぎに、 $E_p = -\nabla\phi$ により振動電位 ϕ を定義すると、振動量 n , u は ϕ を用いて表される；

$$n = -(\epsilon_0/e)\nabla \cdot E_p = (\epsilon_0/e)\nabla^2\phi \quad (\text{A-4})$$

$$u = -j\omega\epsilon_0/n_0e\{\omega_p^2\nabla\phi - v_T^2\nabla\nabla^2\phi\}/\{\omega^2(1-j\eta)\} \quad (\text{A-5})$$

続いて、(A-4)、(A-5)式を(A-1)の連続の式に入れると、振動電位 ϕ_2 に関する本文の4階ラプラス方程式が導かれる。

付録B：電位分布

本文の4階ラプラス方程式は4個の独立な解を持ち、一般解はその線形結合 $\phi_2 = Ax + B + C\cos(kx) + D\sin(kx)$ (A, B, C, D ; 任意定数) で表される。いま、電子

は壁 $x = \pm a$ で完全反射する (即ち、 $u=0$) と仮定する。この境界条件は電子速度の振動成分がシース電位により反転することに対応する[9,10]。この条件を課すと、 $C=0$ となり、かつ A と D の比 (本文の δ) が決まる。したがって、 ϕ_2 の任意定数は A と B のみとなる。

同様に、誘電体中の振動電位 ϕ_1, ϕ_3 は、静電近似の場合2階ラプラス方程式 $\nabla^2\phi=0$ を満足する。その解は双方とも、 $\phi = Gx + F$ (G, F ; 任意定数) の形で表される。

続いて、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 に対して、境界 $x = -b$ で電位が零、 $x = b$ で電位が V_0 、 $x = \pm a$ で電位および電束 (または、等価的に高周波電流) が連続という境界条件を課することにより、六個の任意定数がすべて決まる。すなわち、各領域の電位は本文(3)式のように得られる。

付録C：幾何学的共振

Fig. 1 と同じ構造で無限平行平板の導波路においては、対称および反対称の表面波が境界 $x = \pm a$ に沿って伝搬可能となる[13]。金属面の静電近似波動電位は零となる。反対称表面波の電位分布は面 $x=0$ に関し奇関数となる。反対称表面波の静電近似分散式は付録Bと同様の手続きを経て、次のように得られる； $N = 1 + \epsilon_g\{\tanh(k_za)/\tanh(k_zd)\}$ 。 k_z は z 方向波数である。 N は k_z の増加とともに単調に増加 (または、減少) する。 $k_z \rightarrow 0$ の極限で $N \rightarrow N_G$ 、 $k_z \rightarrow \infty$ の極限では $N \rightarrow 1 + \epsilon_g$ へ近づく。前者が本文の幾何学的共振を表す。