

講座

プラズマにおけるカオス現象の観測と実験解析Ⅱ

3. シースに関連したカオス

3.1 周期倍分岐ルート

河野 光雄

(中央大学総合政策学部)

(1997年5月29日受理)

Chaos Associated with the Nonlinearity of Ion Sheaths
Period-Doubling Route

MITSUO Kono

Faculty of Policy Studies, Chuo University, Hachioji, Tokyo 192-03, Japan

(Received 29 May 1997)

Abstract

An experiment focused specifically on period-doubling bifurcation to chaos in a current-carrying stable plasma is described as well as the theory which explains the observed data. A dc plasma current is used to produce an electron-depleted thick sheath (the Child-Langmuir sheath) on a grid, which provides a nonlinear potential as a basis of cascading bifurcations leading to chaos associated with ion dynamics.

Keywords:

period-doubling bifurcation, chaos, ion sheath

3.1.1 はじめに

プラズマにおける振動現象の分岐カスケードとカオスへの遷移に関する実験的な研究の中で、最も多く報告されているのが、周期倍分岐カスケードである。電子ビーム源とこれから1 m離れた接地された銅板のあいだに電場をかけて、ビーム電流に現れる振動の分岐を見いだした Boswell[1] や、グロー放電領域での自励振動の倍分岐を観測した Cheung 等[2,5], Braun 等[3], 電離波動で周期倍分岐の現象を見いだした Ohe 等[4]の実験などが草分けであるが、分岐現象の報告にとどまり、その物理機構についての解明がなされないままであった。その後、Ohno 等[6-7]や Komori 等[8]がシースの関与するカオス過程を実験的に見だし、その物理を明らかにしたことをうけて、シースにかかわる多くの実験的研究が積み重ねられ[9-11], 周期倍分岐だけでなく、準周期過程[12-13]や間欠カオス[14]なども見いだされ、プラズマに潜むカオスの多様な姿が暴きだされた。

クリアーカットなデータを提供できる実験はほとんどシースに関わるものである。ダブルプラズマ装置でプラズマを2つに分けるグリッドのシースは粒子を捕捉するので、グリッドに変動電場をかけることは、ちょうど振りに振動外場をかけるようなもので、ここに分岐カスケードが明快に観測される基礎があるといえる。しかもシースのポテンシャルは単純な調和ポテンシャルで表されるものではなく、本質的に非線形であり、加えてプラズマの作り方によって非対称になったりするので、それだけに多様な現象が隠されていると考えられる。バルクプラズマが主役を演ずると主張されている実験での物理プロセスがはっきりと同定され難いのは、プラズマの挙動をプラズマ電流の変動から読みとろうとするかぎり、閉じた回路をつくることになりシースがどうしてもかかわってきて、バルクプラズマの現象とシースで起こっていることとの切り分けが難しいこと、バルクプラズマにおける振動現象は波動の振動現象であり、波の共鳴相互

作用による吸収・放出のために、境界条件によって波の自由度が制限されていない限り、一般には自由度の変化する系であるので、カオス理論における分岐カスケードとは異なる範疇にある、といったことによるからであろう。

シースに起因する分岐現象は確かにはっきりしたデータを提供してきたが、現象を見つけることに努力が向けられ、理解することにはあまり力は注がれていない。たとえば、分岐現象の前段のモードロッキングを観測したので、系は van der Pol 方程式で記述されると短絡する論文も見られる。以下ではいくつかあるシースにかかわったカオス過程の実験のうち、周期倍分岐カスケードとカオスを定量的に同定し、あわせて実験データによって分岐過程とカオスへの遷移のシナリオを組み立てた最初のものである Komori 等[14]の実験とそれに対する解析[14-15]を解説する。

3.1.2 実験装置

実験は Fig. 1 に示すような、直径70 cm、長さ120 cm の大容量チャンバが直径0.05 mm のステンレスの微細なメッシュ状のグリッドで2つに分けられたダブルプラズマ装置で行われた。プラズマ（アルゴン）はフィラメントとチャンバ壁との間の直流放電によってつくられ、放電電圧 V_d は20-100 V の範囲で変化し、チャンバはアースされている。ターゲットプラズマのパラメータは、密度 $n_0 = (0.9-7) \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ 、電子温度 $T_e = 0.3-0.7 \text{ eV}$ 、イオン温度 $T_i \approx 0.1 \text{ eV}$ である。電子温度と密度は放電電圧とヒータ電流を調整することによりそれぞれ

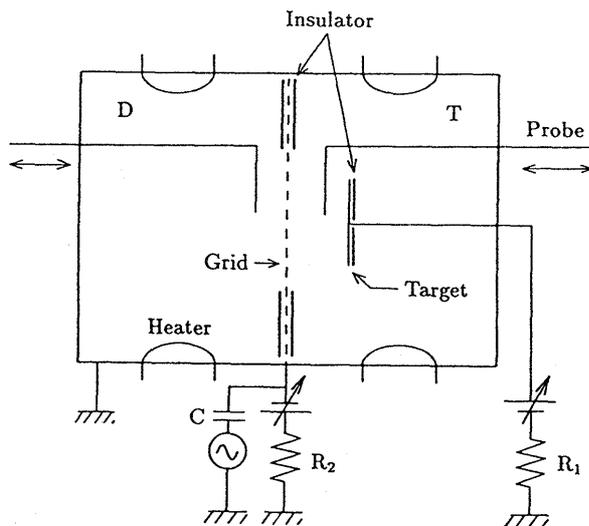


Fig. 1 Experimental set-up.

一定に保たれている。ドライバプラズマの密度はターゲット側のそれに比べて1桁小さく押さえられているので、ドライバ側の空間電位 ϕ_{0D} は、ターゲット側の空間電位 ϕ_0 に比べて数ボルト大きい。プラズマパラメータやその揺らぎの測定には直径6 mm の平面 Langmuir プロブが、プラズマの空間ポテンシャルの測定にはエミッシブプロブが使われ、イオン温度はファラデーカップで測定された。ガス圧は $(1-4) \times 10^{-4} \text{ Torr}$ の範囲で変化する。グリッドとグリッドから5 cm のところにおかれたターゲット（半径12 cm）はそれぞれ負と正にバイアスされ（直流電圧を V_0 とする）、直流電流が流された。プラズマ電流は絶縁体を適当に配置することによって、主としてグリッドとターゲットの間を流れるようになっている。グリッドのターゲット側のシースでは、電子はほとんど反射され、イオンが流れ込むように厚いイオンシースが作られているので、グリッド前面のターゲット側のポテンシャルドロップはほとんど V_0 と考えられる。プラズマ電流 I_p の時間平均 I_0 と揺らぎ I は抵抗 R_1 での電圧降下から求められた。

3.1.3 実験結果

Fig. 2 (a)に時間平均されたプラズマ電流 I_0 の直流電圧 V_0 依存性を示す。この電流-電圧特性は Langmuir プロブのそれと同様で、また Fig. 2 (b)に示したように、電流 I_0 がプラズマ密度 n_0 に比例しているの、 I_0 はボーム電流と期待される。実際

$$I_B = S n_0 e (\kappa T_e / m_i)^{1/2}, \quad (1)$$

与えられるボーム電流 I_B と比較すると、ファクタ2の範囲で一致している。ボーム電流を求めるにあたっては $T_e \gg T_p$ を使った。Sはターゲットの面積 ($S \approx 0.14 \text{ m}^2$) である。グリッドのターゲット側のシースの厚さ d は V_0 に対して Fig. 3 に示されたように $V_0^{3/4}$ に比例する。これはシースのポテンシャルが Child-Langmuir 則

$$I_0 = (4\sqrt{2} \epsilon_0 S / 9 d^2) (e / m_i)^{1/2} V_0^{3/2}, \quad (2)$$

にしたがっていることを示している。ここでシースの厚さは実験データから求めたものとファクタ3の範囲で一致している。このファクタはドライバプラズマとターゲットプラズマのポテンシャル差によるイオンの反射に関係していることが調べられている[6]。

$V_0 = 0$ のときは、プラズマ電流に揺らぎは観測されない。グリッドのターゲット側にイオンシースが形成されると、すなわち V_0 の増加によってプラズマ電流が飽和

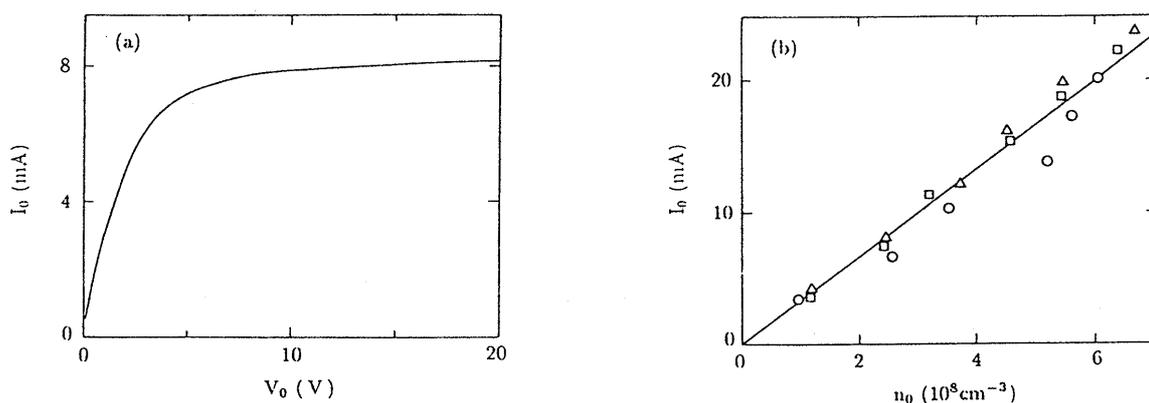


Fig. 2 Dependence of time-averaged plasma current I_0 on (a) the dc voltage V_0 and (b) the plasma density n_0 .

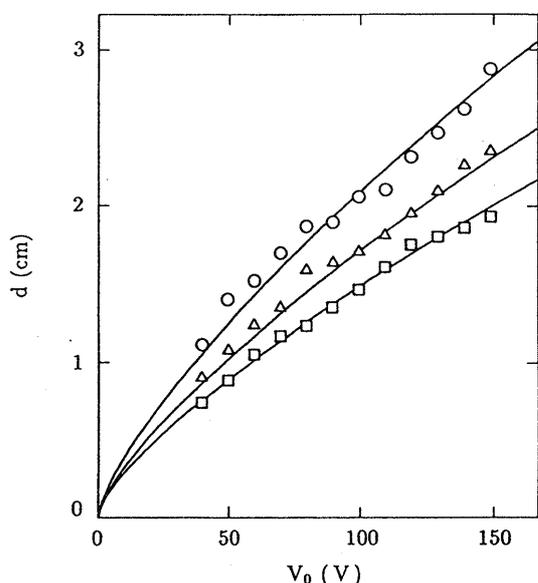


Fig. 3 Dependence of the thickness d of the sheath on the dc voltage V_0 .

すると、コヒーレントな揺らぎが励起されるようになる。この不安定性の励起には、Fig. 4 に示したようにポテンシャル差 $\Delta\phi (= \phi_{0D} - \phi_0)$ が関係しており、 $\Delta\phi$ に閾値が存在している。不安定性の周波数は V_0 とともに減少する。不安定性の振幅は V_0 の比較的小さい領域で最大になる。このとき、揺らぎのレベルは $I/I_0 \approx 5\%$ である。ポテンシャル差は、ターゲット側からドライバ側へ入り込んだイオンが反射されて、グリッドを通過してターゲット側に戻るために必要である。ポテンシャル差の閾値から決まるイオンの速度 $(2e\Delta\phi/m_i)^{1/2}$ はシース端のイオンドリフト速度にほぼ一致している。また、メッシュのグリッドを金属で置き換えると、グリッドとターゲット

との間のポテンシャル構造はほとんど変化しないのに不安定性は観測されない。このことは、ドライバ側に入り込んだイオンが反射されて再びドライバ側に戻ることが本質的に重要であることを示している。

ドライバ側とターゲット側とのポテンシャル差によって反射されて、再びターゲット側のシースに入り込んだイオンが揺らぎによってバンチングを起こすと、電子が極端に少ないため電荷が中和されず、揺らぎを増大させることになる。反射されたイオンは、いわば正のフィードバックを生じる役割を果たしていると考えられる。こうしてイオンシースのポテンシャル中のイオンの往復運動に起因する不安定性が現れる。ところで外から印加された電圧 V_{appl} とプラズマ電流 I_p 、プラズマのポテンシャルドロップ V の関係は $V_{\text{appl}} = V + (R_1 + R_2)I_p$ で与えられるから、不安定性は負の微分抵抗 $R = \partial V / \partial I_p$ を伴い、この負抵抗が電気回路における抵抗をキャンセルしている。この不安定性については次節で詳しく述べられることになっている。

Fig. 4 は、ドライバプラズマの密度 n_{0D} を変化させることによって不安定性を制御することができることを示している。ドライバプラズマの密度を、不安定性が抑制されるように選び、グリッドに周期外場をかけたときに得られるプラズマの非線形レスポンスを調べよう。イオンシースのポテンシャルプロファイルは不安定性の有無には影響されないことが調べられている。振動外場の周波数と振幅をそれぞれ $f_1 (= \omega_1/2\pi)$, V_{ext} とし、 V_{ext} をほぼ 4.7 V に固定して、周波数 f_1 を 100 kHz から増加させる。Fig. 5 に見られるように、はじめプラズマ電流 I_p に外場に同期した振動が現れるが、 $f_1 = 139$ kHz で最初のサブハーモニックが現れ、ついで 4 倍周期への

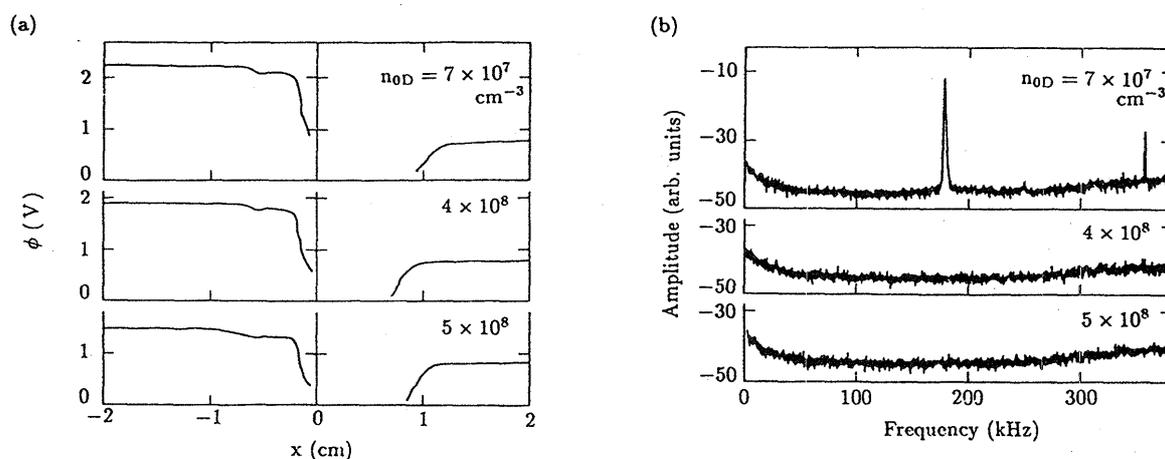


Fig. 4 (a) Axial profiles of the potential for the various n_{0D} 's.
 (b) n_{0D} dependence of frequency spectra of the perturbed plasma current I .

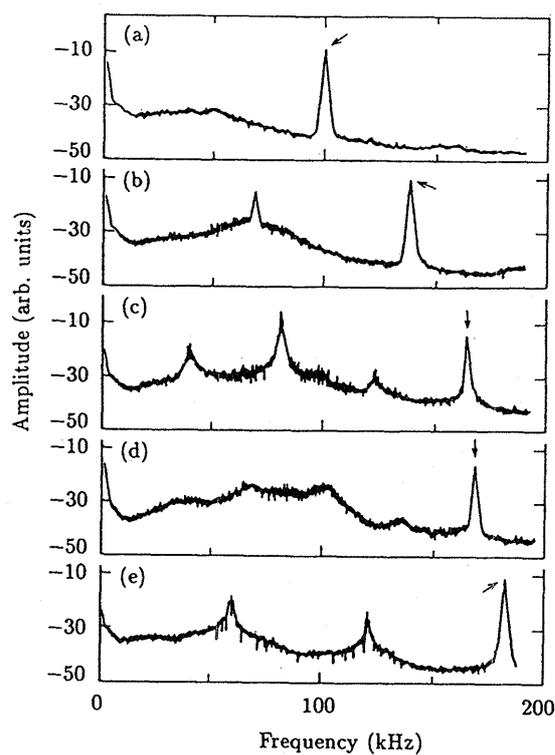


Fig. 5 Cascading bifurcation observed in the frequency spectra of the plasma current for $n_0 = 1.2 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$, $n_{0D} = 8 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $V_0 = 53 \text{ V}$, $V_{\text{ext}} = 4.7 \text{ V}$.

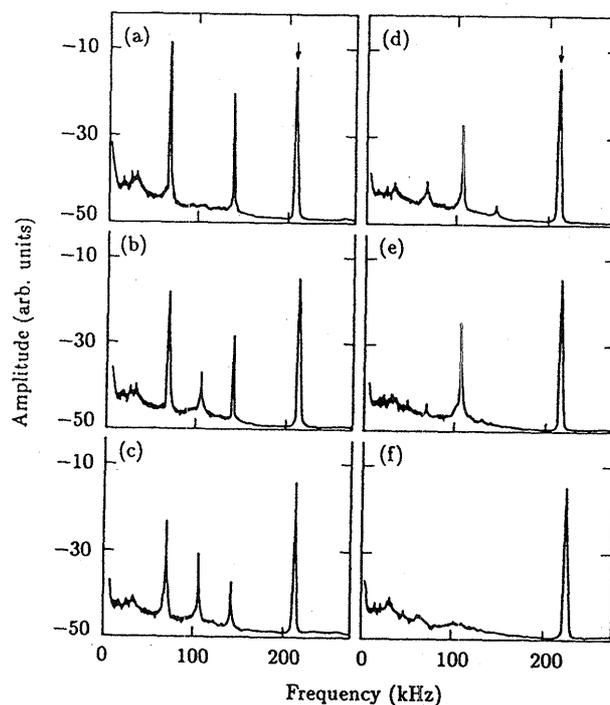


Fig. 6 Cascading bifurcation observed in the frequency spectra of the plasma current for $n_0 = 9 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $n_{0D} = 1 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $V_0 = 61 \text{ V}$, $V_{\text{ext}} = 2.9 \text{ V}$.

分岐がはっきりと観測される。しかし f_1 をさらに増加させてもそれ以上の分岐はマスクされて観測されず、周波数スペクトルがブロードになって、カオス状態になる。さらに周波数 f_1 を増加させると周期3倍化分岐が見られる。これは Feigenbaum[16] の周期倍加のシナリオを示していると考えられる。

カオスへの分岐カスケードは、 f_1 と V_{ext} を一定にして n_0 を変化させることによって、また f_1 と n_0 を一定にして V_{ext} を増加させることによって観測されるが、 n_0 や V_{ext} に大変敏感で、周期倍化と周期3倍化の分岐のどちらが先に現れるかはこれらのパラメータに依存している。また、これらの分岐の混合型がしばしば観測される。たとえば Fig. 6 では f_1 を増加すると最初に周期3倍化が起り、そのあとカオスを経ないで周期倍化分岐へと発展している。このように非線形挙動はパラメータに依存して多様なシナリオを示す。

カオスを示す低次元系では相関次元が非整数で表され、系の自由度の下限を与えることが知られている。実験で得られた電流の揺らぎの時系列データ $I(t)$ から、適当な τ に対して k 次元ベクトル $\mathbf{r} = \{I(t), I(t+\tau), I(t+2\tau), \dots, I(t+(k-1)\tau)\}$ をつくる。実験データは時間に関して離散的 $\{t_i, i=1, 2, \dots, m\}$ だから、ベクトル $\{\mathbf{r}_i, i=1, 2, \dots, m\}$ から k 次元位相空間での軌道が構成できることになる。この軌道から相関次元 η を計算する手法は Grassberger と Procaccia[17] によって与えられていて、

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H(r - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \propto r^\eta, \quad (3)$$

から決められる。ここで H は Heaviside 関数で、正の x に対して $H(x) = 1$ 、それ以外に対して $H(x) = 0$ であるような関数である。実験ではシグナルは 1-20 MHz でデジタル化されていて、実時間シグナルにたいして 128 キロバイトのデータが記録される。 τ を 1-4 μsec に選んで、カオス領域で $\eta = 1.54 \pm 0.22$ を得た。このことは実験は低次元の物理系であることを示している。

3.1.4 実験結果の解析

実験からグリッドの両側のイオンシースは、振動外場に応答するイオンの振動運動の原因であるポテンシャル井戸と見なされる。問題は一次元として、イオンシースの構造と揺らぎをイオン流体モデル、

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} nv = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} v = \frac{e}{m_i} E, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = \frac{en}{\epsilon_0}, \quad (6)$$

に基づいて調べよう。定常シースに対してフラックスは一定 ($nv = I_0$) だから、式(5)-(6)は、

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{I_0^2}{n} - \frac{E^2}{8\pi m_i} \right) = 0 \quad (7)$$

となる。式(7)は直ちに積分できて、

$$n = \frac{n_0}{1 + A(E^2/E_0^2 - 1)} \quad (8)$$

を得る。ただし $A = (\omega_{pi} E_0 \epsilon_0 / I_0)^2 / 2$ で、添え字の 0 はシースの端でグリッドからの距離 x_0 での値であることを示している。これを Poisson 方程式に代入して

$$x - x_0 = \frac{eE_0}{m_i \omega_{pi}^2} \left\{ (1-A) \left(\frac{E}{E_0} - 1 \right) + \frac{A}{3} \left(\frac{E^3}{E_0^3} - 1 \right) \right\}, \quad (9)$$

を得る。ポテンシャルで書き換えると、

$$\phi - \phi_0 = -\frac{1}{2} \frac{eE_0}{m_i \omega_{pi}^2} \left(\frac{E^2}{E_0^2} - 1 \right) \left[1 + \frac{A}{2} \left(\frac{E^2}{E_0^2} - 1 \right) \right]. \quad (10)$$

大きい電場に対して、上の式から、

$$\frac{E}{E_0} \simeq \left(\frac{3}{A} \frac{x - x_0}{eE_0 / m_i \omega_{pi}^2} \right)^{1/3} \quad (11)$$

$$\phi - \phi_0 \simeq -\frac{1}{2} \frac{eE_0^2}{m_i \omega_{pi}^2} \frac{A}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^4 \quad (12)$$

となるから Child-Langmuir 則が得られる：

$$\frac{\phi_0 - \phi}{eE_0^2 / m_i \omega_{pi}^2} \simeq \frac{3^{4/3}}{4} \left(\frac{x - x_0}{eE_0 / m_i \omega_{pi}^2} \right)^{4/3} A^{-1/3}. \quad (13)$$

$A > 1$ に対してイオンの密度は $E^2/E_0^2 = 1 - 1/A$ で発散し、反射が起こることを示しているが、それを反映して電場 (ポテンシャル) は x の多価関数となる。したがってシースがプラズマと連続的につながっているためには $A < 1$ でなければならないが、これは同時にターゲットからの電子がイオンシースによって反射される条件になっている。すなわち、厚いイオンシースができ、それに捕捉されたイオンの振動運動が外部振動電場によって分岐カスケードを示す条件を与えているのである。

イオンシースの中でのイオンの運動は、

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (14)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m_i} (E_0 - E), \quad (15)$$

で記述される。しかしここでは振動外場に対するイオンの動的応答を見るために、運動方程式として式(15)の代わりに、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m_i}(E_0 - E) - \nu v + E_{\text{ext}} \sin(\omega_1 t), \quad (16)$$

を考える。ここで散逸項を導入したのは実験では無視できないからである。式(9)から、 $E_0 - E$ を $(x - x_0)/(eE_0/m\omega_{pi}^2) \equiv x$ で顕わに表わすために、

$$\frac{E_0 - E}{E_0} \approx -\frac{x}{1 + A[x + (1 - 3A)x^2/3]}, \quad (17)$$

と近似する。式(14), (16), (17)から次の方程式を得る。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu \frac{dx}{dt} + \frac{x}{1 + A[x + (1 - 3A)x^2/3]} + E_{\text{ext}} \sin(\Omega t) = 0, \quad (18)$$

ここで E_0 は負に選んで $E_0 = -|E_0|$ としてある。また $\omega_{pi}t$, ν/ω_{pi} , ω_1/ω_{pi} , $E_{\text{ext}}/|E_0|$ をそれぞれ t , ν , Ω , E_{ext} と置き換えた。実験条件をこの規格化されたパラメータで表すと、Fig. 5 は $A \approx 0.192$, $\nu \approx 0.1$, $E_{\text{ext}} \approx 2.29$ を固定し Ω を 0.382 (周期 2), 0.452 (周期 4), 0.471 (カオス), そして 0.507 (周期 3) と選んだときに相当し、Fig. 6 は $A \approx 0.224$, $\nu \approx 0.1$, $E_{\text{ext}} \approx 1.18$ を固定し Ω を 0.67 (周期 3), 0.68 (周期 2) と選んだときに相当する。

方程式(18)は A が小さいときその第 3 項の分母を A に関して展開して一次の項のみをのこすと、Duffing 方

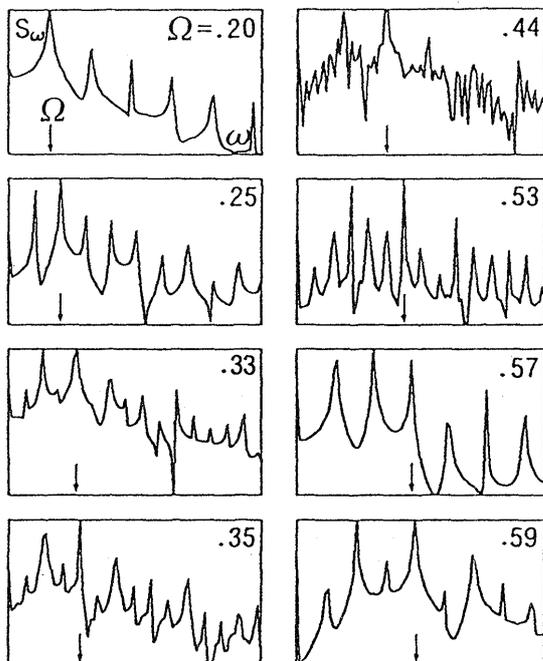


Fig. 7 Theoretical cascading bifurcation for $A=0.2$, $V=0.18$, $E_{\text{ext}}=2.2$.

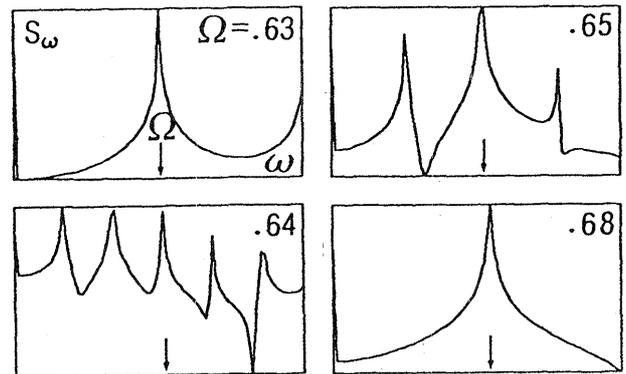


Fig. 8 Theoretical cascading bifurcation for $A=0.225$, $V=0.1$, $E_{\text{ext}}=1.47$.

程式に変換される。このことは式(18)が多様な非線形挙動を示しうることを示唆している。Fig. 7 は $A \approx 0.2$, $\nu \approx 0.18$, $E_{\text{ext}} \approx 2.2$ に固定したときのいくつかの Ω に対する $x(t)$ のフーリエスペクトルである。周期倍化分岐を経てカオスへ遷移していく様子がはっきりと見える。同様の分岐過程は A , ν , Ω を固定して E_{ext} を変化させても見る事ができる。

Fig. 6 に示された分岐過程に対応する非線形挙動は $A = 0.225$, $\nu = 0.1$, $E_{\text{ext}} = 1.47$ のときに観測される。Fig. 8 に示されているように、最初に周期 3 倍化分岐が現れ、あとに周期倍化分岐が続いて現れる。周期 3 は周期 2 へカオスを経ないで遷移し、多様な非線形過程を内包していることを示している。

数値的な結果は実験の結果を驚くほどよく再現しているが、数値的な時系列データから求めた相関次元は $\eta = 1.54 \pm 0.04$ となり、実験値 $\eta = 1.54 \pm 0.22$ とほぼ一致している。このような実験と理論の良い一致は、観測された分岐過程が Child-Langmuir シースでのイオンのダイナミクスによって引き起こされているということを結論させる。

3.1.5 まとめ

これまでに見てきた分岐カスケードとカオスへの遷移は、ダブルプラズマ中のグリッドのドライバ側とターゲット側の非対称なシースに捕捉されたイオンが、外部から印加された変動電場との相互作用によってさまざまな運動様式を生み出したものである。ここで強調されるべきことは、実験データによって分岐カスケードとカオス発生背後にある物理過程を明らかにしてシナリオを組み立てたこと、そのシナリオに基づいた微分方程式が実験結果を見事に再現したということである。とはいえ、

シースにおけるカオス現象は、それがシースのポテンシャルに捕捉された粒子運動に起因しているという意味で、もともと少数自由度の力学系のものであり、プラズマの特徴に依拠したものとは言い難い。だからこそバルクプラズマにおけるカオス過程を掴まえることは、プラズマの理解にとって大きな意味を持ちうるし、いまもまだ課題として残されているといえよう。

参考文献

- [1] R. W. Boswell, *Plasma Phys.* **27**, 405 (1985).
- [2] P. Y. Cheung and A. Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 551 (1987).
- [3] T. Braun, J. A. Lisboa, R. E. Francke and J. A. C. Gallas, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 613 (1987).
- [4] K. Ohe and S. Takeda, *J. Plasma Phys.* **23**, 21 (1980).
- [5] P. Y. Cheung, S. Donovan and A. Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1360 (1988).
- [6] M. Ohno, M. Tanaka, A. Komori and Y. Kawai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** 28 (1989).
- [7] N. Ohno, A. Komori, M. Tanaka and Y. Kawai, *Phys. Fluids* **B3**, 228 (1991).
- [8] A. Komori, M. Kono, T. Norimine and Y. Kawai, *Phys. Fluids* **B4**, 3573 (1992).
- [9] N. Ohno, A. Komori, M. Kono and Y. Kawai, *Phys. Fluids* **B5** 796 (1993).
- [10] D. Weixing, H. Wei, W. Xiaodong and C. X. Yu, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 170 (1993).
- [11] A. Buragohain, J. Chutia and Y. Nakamura, *Phys. Lett.* **A163**, 425 (1992).
- [12] F. Greiner, T. Klinger, H. Klostermann and A. Piel, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3071 (1993).
- [13] A. Piel, H. Klostermann, A. Rohde, N. Jelic and R. W. Schrittwieser, *Phys. Lett.*, **A216**, 296 (1996).
- [14] M. Kono and A. Komori, *Phys. Fluids*, **B4**, 3569 (1992).
- [15] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978).
- [16] P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346 (1983).