

研究論文

標準写像における異常拡散と多重周期加速モード

広瀬 敬一, 上村 鉄雄¹⁾, 市川 芳彦²⁾
 (総合研究大学院大学, ¹⁾核融合科学研究所, ²⁾中部大学工学部)

Anomalous Diffusion and Multiple-Periodic Accelerator Modes in the Standard Map

HIROSE Keiichi, KAMIMURA Tetsuo¹⁾ and ICHIKAWA Yoshihiko²⁾

Graduate University for Advanced Studies, Toki 509-5292, Japan

¹⁾*National Institute for Fusion Science, Toki 509-5292, Japan*

²⁾*College of Engineering, Chubu University, Kasugai 487-8501, Japan*

(Received 29 October 1997/Accepted 23 January 1998)

Abstract

Multiple-periodic accelerator modes give rise to anomalous enhancement of the stochastic diffusion process in the standard map in the domain of the nonlinear stochastic parameter $A < 1$. The quantitative analysis of the multiple-periodic accelerator modes has been undertaken to explore contribution of the accelerator modes for the anomalous diffusion. In particular, detailed information of the period-3 and the period-5 accelerator modes such as their existence domain and their stability have been presented in connection with the anomalous enhancement of the diffusion process.

Keywords:

standard map, stochastic diffusion, multiple-periodic accelerator mode

1. 序論

熱核融合制御において超高温プラズマをトロイダル磁気容器に閉じ込める目的のためには磁気面の構造を詳しく解析しなければならない。この磁気容器に閉じ込められたプラズマ粒子の長時間におよぶ振る舞いを分析することは重要な課題である[1]。磁力線の配位を定める基礎方程式がHamiltonの正準方程式に従うことから、非線形力学系の理論体系に基づく磁気面の研究が数多く行われている[2,3]。また、与えられた磁気面に閉じ込められるプラズマ粒子の動的特性やプラズマ粒子の波動加熱の研究にもこの非線形力学系の理論的手法は極めて有意義な結果をあたえることが知られている[4,5]。

非線形力学系の理論的手法としては、統計力学的運動方程式に基づく方法も用いられるが、自由度の小さい

Hamilton力学系の取り扱いとしてはポアンカレの写像の方法が有効である。とくに、二次元位相平面における面積保存写像はトカマクやステラレータなどのトロイダル磁気容器の磁気面の解析に広く用いられている。それらの面積保存写像は多くの場合、局所的な近似によりChirikov [6]などにより詳しく研究された写像、

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+F & 1 \\ F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} \pmod{1}$$

$$Fq_n \equiv A \sin(2\pi q_n) \quad (1)$$

に還元される。この写像は非線形保測写像の特徴を示す標準的な写像であるので、広く標準写像と呼ばれている。非線形パラメータ A が十分小さい場合にはこの写像によって記述される軌道の軌跡は安定な不動点 ($q_f=0, p_f$

Corresponding author's e-mail: ichikawa@isc.chubu.ac.jp

$=0$) の周りに閉じた規則軌道を描くが、非線形パラメータ A が臨界値 $A_c = 0.1546 \dots$ において最大不変曲面 (KAM surface) が崩壊し、系は広域的なカオスの状態に遷移し系の統計的特性は位相平面における軌道の統計的拡散によって特徴づけられる。

数値実験による運動量変数の自乗平均の観測結果から定められる拡散係数は、ファインマンの経路積分によって漸近的に評価された理論値[7]

$$D = \frac{A^2}{4} \frac{1 - 2J_1^2(2\pi A) - J_2^2(2\pi A) + 2J_3^2(2\pi A)}{[1 + J_2(2\pi A)]^2} \quad (2)$$

(ただし、 $J_n(x)$ は n 次のベッセル関数) と比較することにより、(1)式に対して得られる加速モード

$$q_0^{(a)} = \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \left(\frac{l}{A} \right) \quad p_0^{(a)} = 0 \quad (3)$$

$(l = \pm 1, \pm 2, \dots)$

による異常拡散の寄与が $A \approx |l|$ の領域で顕著になることが観察された。この基本加速モードの周囲にはポアンカレ・バーコフ分岐により高周期の加速モードが生成し個々の軌道の時間発展の長時間相関効果を生ずる。この現象はKarney[8]などにより研究され、またMeiss等は安定な島構造の周辺領域の粘着性という概念を導入してハミルトン力学系の輸送現象を研究している[9]。

我々は、この標準写像の統計的性質の詳しい解明をすすめ[10]、特に非線形パラメータ A が1より小さく(3)式で定められている基本加速モードの存在が許されない領域においてもいくつかの拡散現象の共鳴的增加を観測し、これらの異常拡散の鋭いピークが標準写像の多重反復写像に対して存在が許される多重周期加速モードの寄与による可能性を観察した。

ハミルトン力学系における広域的ストキャスティシティへの遷移点の近傍における輸送現象についてMacKay[11]などは拡散係数が

$$D \propto (A - A_c)^\eta \quad \eta \approx 3.0 \quad (4)$$

というスケール則に従うと主張しているが、我々の見出した多重周期加速モードの寄与は非線形パラメータ A が1より相当に小さい領域にも見られることから、非線形パラメータ A の小さい領域における異常拡散現象の寄与に注意しなければならないことを強調しておきたい。

これまで過去に行われていた数値解析の結果は、観察事実を述べた現象論であったが、そこに現われる多重周

期加速モードの構造、その安定性などを多重反復写像の解析により明らかにする研究が進められ、2周期加速モード[12]の構造が明らかにされた。今回の報告では、3重周期加速モードおよび5重周期加速モードの存在条件、安定性などについて詳細な解析を行い文献[10]において観察されていた結果を定量的に精密化する。

2. 3周期加速モードの解析

この節では、標準写像において3周期の加速モードの理論的解析を行う。

(1)式を2回反復して得られる写像式は

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_{n+1} + p_{n+2} \\ &= q_n + 2p_n + 2F(q_n) + F[q_n + p_n + F(q_n)] \\ p_{n+2} &= p_n + F(q_{n+1}) \\ &= p_n + F(q_n) + F[q_n + p_n + F(q_n)] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、 $F(q_n) = A \sin 2\pi q_n$ である。この2周期における加速モードが存在する座標 (p_0, q_0) 条件および安定性は広瀬等[12]によって解析された。我々はここで拡散係数に対しての多重周期加速モードの寄与の統計的な性質を明らかにするため3周期の加速モードの解析を行う。(5)式をさらに反復させ、得られる3回の反復写像式(6)を考える。

$$\begin{aligned} q_{n+3} &= q_{n+2} + p_{n+3} \\ &= q_n + 3p_n + 3F(q_n) + 2F[q_n + p_n + F(q_n)] \\ &\quad + F[q_n + 2p_n + 2F(q_n) + F[q_n + p_n + F(q_n)]] \\ p_{n+3} &= p_{n+2} + F(q_{n+2}) \\ &= p_n + F(q_n) + F[q_n + p_n + F(q_n)] \\ &\quad + F[q_n + 2p_n + 2F(q_n) + F[q_n + p_n + F(q_n)]] \end{aligned} \quad (6)$$

一般に3周期加速モードの条件は

$$\begin{aligned} p_3 &= p_0 + m \\ q_3 &= q_0 + l \end{aligned} \quad (7)$$

で求められる。ここで m, l は任意の整数であり、 m が運動量空間における加速ステップの大きさを与える。実際、市川等によって観測されている3周期加速モードは初期値 $p_0 = 0$ に対応するものであった。今回は、このことを考慮し(7)式を(6)式に適応し、3周期加速モードの存在条件を導くと、運動量成分については

$$F(q_0) + F[q_0 + F(q_0)] + F[q_0 + 2F(q_0) + F[q_0 + F(q_0)]] = m \quad (8)$$

同様に位置座標に対しては

$$3F(q_0) + 2F[q_0 + F(q_0)] + F[q_0 + 2F(q_0) + F[q_0 + F(q_0)]] = l \quad (9)$$

と書ける. よって(8), (9)式から

$$\Phi^{(3)}(A, q_0) \equiv 2F(q_0) + F[q_0 + F(q_0)] = l - m = M \quad (10)$$

の条件をえる. M は任意の整数である.

次に, 具体的に(10)式の条件をみたす解を求め, 3周期加速モードの座標 q_0 を定めることにする. (10)式を非線形パラメータ $A = 0.5 \sim 1.2$ に関して描いたものが Fig. 1 で, 横軸は位相平面における位置座標を表している. この Fig. 1 において(10)式の各パラメータ A に対する関数 $\Phi^{(3)}(A, q_0)$ が任意の整数 $M = l - m = 1, 2, \dots$ において交わる場合に3周期で運動量が m ステップ増加する加速モードが存在することがいえる.

$A > 1$ の場合, 過去に市川等により基本加速モード (fundamental accelerator mode) の解析が行われており, 基本加速モードすなわち Period-1 Step-1 の周囲に存在する3周期モードの範囲は $1.030 < A < 1.100$ と報告されている. この結果は, Fig. 1 において $A = 1.1$, $M = 3$, $q = 0.288$ 付近の振る舞いから読みとることができる. また, この点に変曲点でもあることから period-3 squeezing 現象が予測される.

$A < 1$ の場合を考えてみる. Fig. 1 を見れば $A < 1$ に

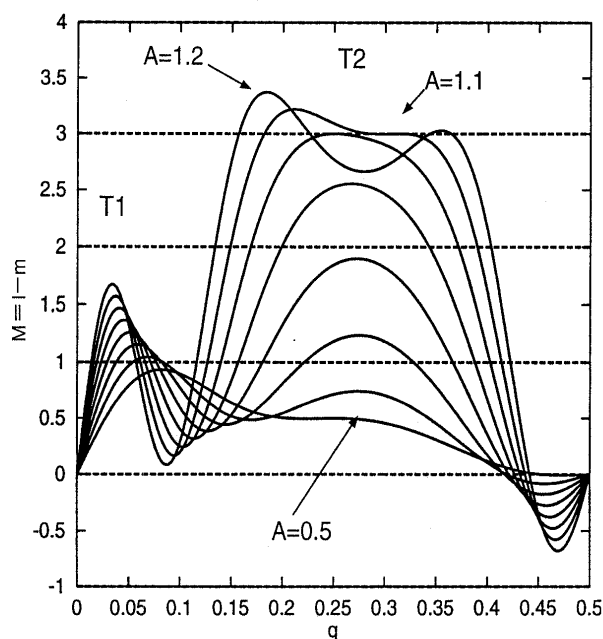


Fig. 1 Existing condition $\Phi^3(A, q)$ for period-3 accelerator modes at $A = 0.5 \sim 1.2$.

おいても各パラメータと任意の整数 M との交点が数多く存在している. そこで Fig. 2 のように左側の頂点 T1, 右側の頂点を T2 とし, 非線形パラメータ A に対して関数 $\Phi^{(3)}(A, q_0)$ が任意の整数 M と交わる点を c1, c2, c3, c4 とする.

T1 が $M=1$ で接するパラメータ A の臨界値は

$$\frac{d}{dq} \Phi^{(3)}(A, q) = 4\pi\alpha + 2\pi A(1 + 2\pi\alpha) \cos 2\pi(q + \beta) \quad (11)$$

の $\frac{d}{dq} \Phi^{(3)}(A, q) = 0$ となる点を数値計算すれば求まる.

ただし $\alpha = A \cos 2\pi q$, $\beta = A \sin 2\pi q$ である. 頂点 T1 が $M=1$ で接する条件として

$$A_{s1} = 0.5589, \quad q_0 = 0.0733 \quad (12)$$

と定まり, 同様に頂点 T2 が $M=1$ と接する条件は,

$$A_{s2} = 0.6578, \quad q_0 = 0.2762 \quad (13)$$

と定められた.

同様な手法を用いて $M=2$ の場合を考える. $M=2$ の場合, 頂点 T1 は交点をもたず, 頂点 T2 だけが交点をもつ. その時の臨界値は,

$$A_{s3} = 0.8144, \quad q_0 = 0.2720 \quad (14)$$

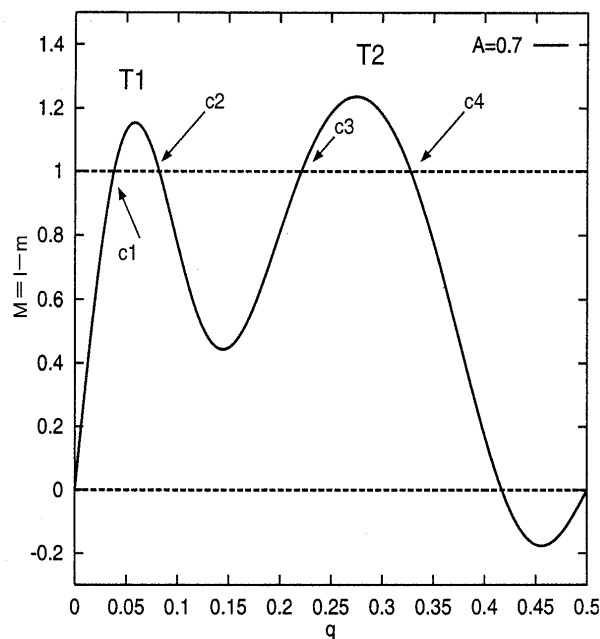


Fig. 2 Existing condition $\Phi^3(A, q)$ for period-3 accelerator modes at $A = 0.7$. Solid line indicates value of $\Phi^3(A, q)$. c3 ~ c4 satisfy the equivalent condition eq. (10).

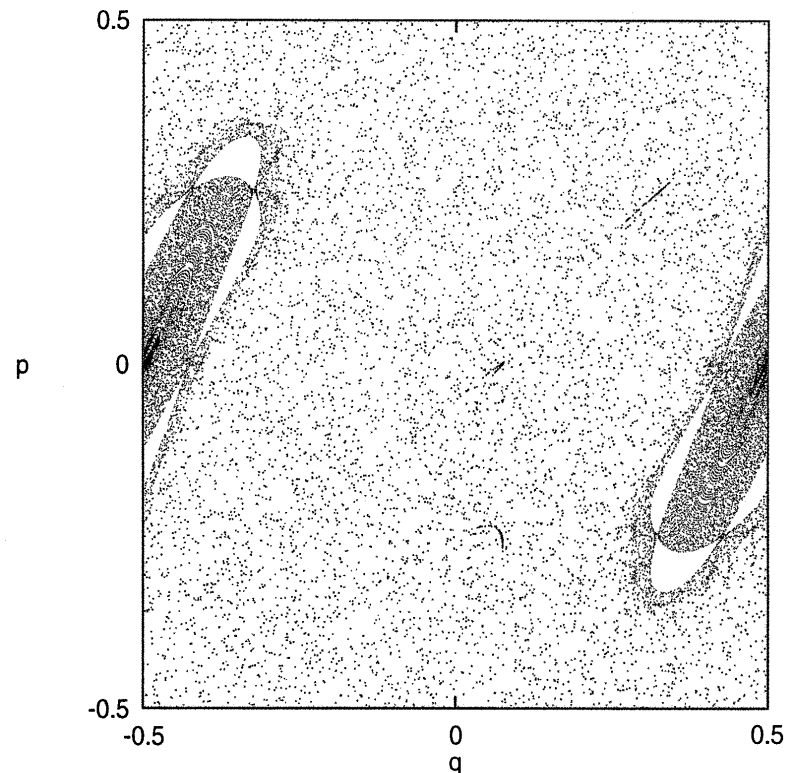


Fig. 3 Phase portrait of the standard map at $A=0.5595$. Period-3 step-1 accelerator mode islands are observed near $q = 0.075$.

であることがわかった。

これらの臨界値における加速モードのステップの大きさは、(12), (13), (14)を初期値にとり、(1)式の時間発展 t に対する運動量の増加をしらべることで同定することができる。それらは3周期加速モード特有の比例増加を示しており $\frac{p_n}{n} = \frac{m}{3}$ ($m=1, 2$) と書ける。

その結果、臨界値(12), (13)は、period-3 step-1の加速モード、(14)は、period-3 step-2の加速モードであることを確認した。

これら加速モードの運動量の初期値は $p_0 = 0$ であるため、3周期加速モードの位相平面における位置座標の関係は、(10)式と(5), (6)式から

$$q_0 = q_2 = q_3 \quad (15)$$

がいえる。同様に運動量座標には(5), (10)式から modulus を考慮して

$$p_2 = M - F(q_0) = F(q_0) = -p_1 \quad (16)$$

の関係を得られる。したがって

$$p_1 = -p_2 \quad (\text{mod } M = l - m) \quad (17)$$

であることがいえる。実際に(12)式の臨界値付近 $A = 0.55951$ $q_0 = 0.074$ $p_0 = 0$ に初期値をおいた位相平面が Fig. 3 である。そこでは微細な構造であるが、3周期の加速モード (period-3 step-1) が存在しているのが確認できる。その加速モードの初期値 (p_0, q_0) は時間発展とともに時計回転の方向に写像されている。このことより3周期加速モードの(15), (17)式の関係が成立していることが確認できる。

このようにして、加速ステップ $m=1, 2$ の値に対応する3周期加速モードの出現する臨界値を決定できた。しかし臨界値 A_s を超えるとき生じる4つの交点 $c1 \sim c4$ は3周期加速モードが存在する可能性を示しているもので、交点 $c1 \sim c4$ におけるそれらの安定性を議論しなければならない。次の節においてこの交点 $c1 \sim c4$ における3周期加速モードの安定性について議論する。

3. 3周期加速モードの安定性

3周期加速モードの安定性を議論する。線形安定性により Fig. 1, Fig. 2 に描かれている各非線形パラメータに対して得られた交点 $c1 \sim c4$ の線形安定性を解析する。 (q_n, p_n) の近傍 $(q_n + \delta q_n, p_n + \delta p_n)$ の点は、標準写像

(1)式により (q_{n+1}, p_{n+1}) の近傍 $(q_{n+1} + \delta q_{n+1}, p_{n+1} + \delta p_{n+1})$ に変換される. この時 $(\delta q_n, \delta p_n)$ と $(\delta q_{n+1}, \delta p_{n+1})$ は, 接線写像 δT によって

$$\begin{pmatrix} \delta q_{n+1} \\ \delta p_{n+1} \end{pmatrix} = \delta T \begin{pmatrix} \delta q_n \\ \delta p_n \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\delta T = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} \\ \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n & 1 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. ここで

$$\alpha_n = 2\pi A \cos 2\pi q_n$$

である. (p_0, q_0) に対する三次の接線写像は

$$\begin{pmatrix} \delta p_3 \\ \delta q_3 \end{pmatrix} = (\delta T)^3 \begin{pmatrix} \delta p_0 \\ \delta q_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

と書ける. ここで

$$(\delta T)^3 = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_0 & 1 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

である. これを用いて (p_0, q_0) の安定性は, Greene による Residue の定理[13]

$$R = \frac{1}{4} [2 - \text{Tr}(\delta T)^3] \quad (21)$$

で判定できる. $0 < R < 1$ の場合, 系が安定な状態つまり島構造を持つ状態と判断できる. そこで 3 周期加速モード島が存在する条件を満たしている Fig. 1, Fig. 2 における各非線形パラメータに対する交点 c1~c4 の安定性を調べた. その結果, $M=1$ に対する period-3 step-1 の加速モードは c1, c3 では常に不安定な解であり, c2, c4 は安定であった.

安定な解に対する交点 c2 の場合, (21)式から安定領域は

$$0.5589 < A < 0.5595 \quad (22)$$

と決まる. 交点 c4 の場合には

$$0.6578 < A < 0.6605 \quad (23)$$

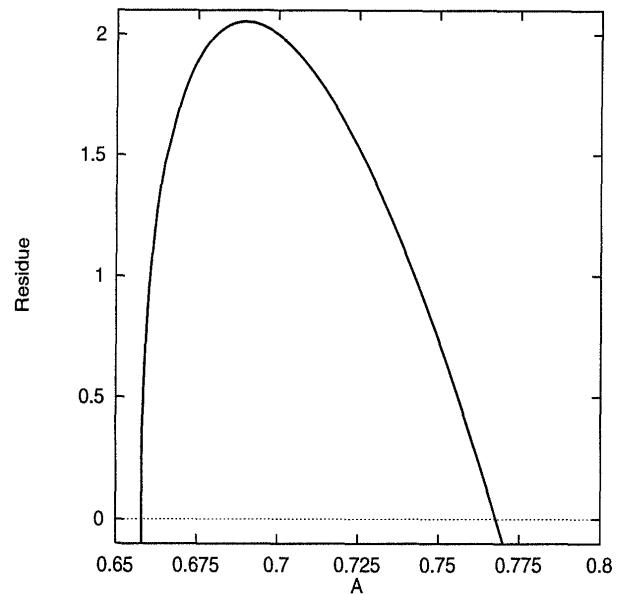


Fig. 4 Residue of period-3 step-1 accelerator mode. As function of the stochastic parameter A .

$$0.7421 < A < 0.7674 \quad (24)$$

となる. ここでは Fig. 4 に示すように (23) 式の領域で安定であったものが不安定になり再び (24) 式の領域で安定になることに注意する.

次に $M=2$ の場合の交点 c3, c4 の安定性を考える. c3 においての値を (21) 式で解析した結果, 不安定であることがわかった. 交点 c4 においては安定解を得た. その結果は

$$0.8144 < A < 0.8158 \quad (25)$$

$$0.8734 < A < 0.8919 \quad (26)$$

である. この場合も $M=1$ と同様な現象が Fig. 5 において見られる. これらの理論的な解析により (22)~(26) 式の領域において 3 周期加速モードが安定な島構造をもって存在することが確かめられた.

4. 5 周期加速モード

市川等[10]による数値実験の結果, 非線形パラメータ A が十分小さい領域で周期が一層高い加速モードの存在が観察されているので, 前節の解析を拡張して 5 周期加速モードに関する分析を行う. (1) 式を 5 回反復させると

$$\begin{aligned} \Phi^{(5)}(A, q) &\equiv 4F(q) + 3F[q + F(q)] + 2F[q + 2F(q) + F[q + F(q)]] \\ &\quad + F[q + 3F(q) + 2F[q + F(q)] + F[q + 2F(q) + F[q + F(q)]]] \end{aligned} \quad (27)$$

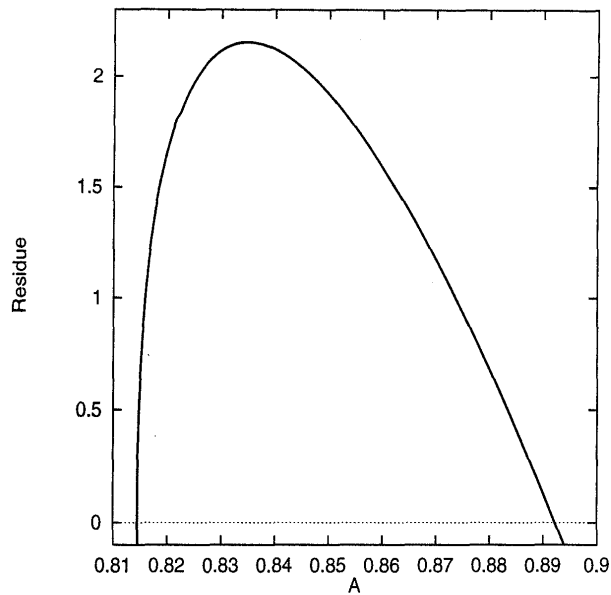


Fig. 5 Residue of period-3 step-2 accelerator mode. As function of the stochastic parameter A .

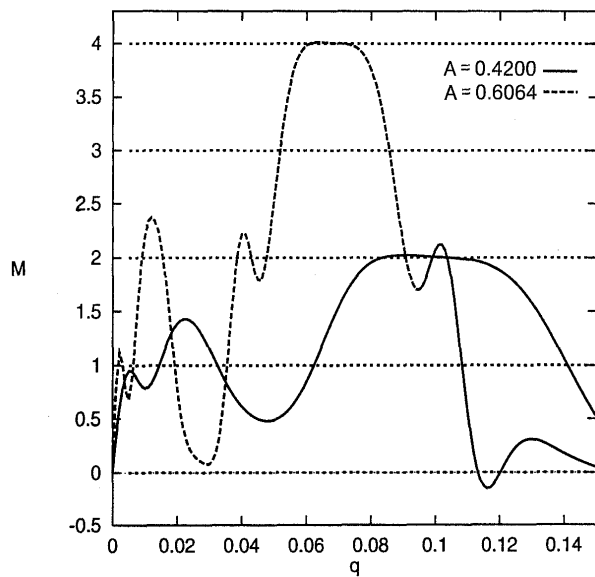


Fig. 6 Existing condition $\phi^5(A, q)$ for period-5 accelerator modes at $A = 0.4200$ and 0.6064 , respectively.

を得る。加速モードの条件は

$$\phi^{(5)}(A, q) = m - l = M \quad (28)$$

となる。ここで m, l は、運動量、位置方向のステップ数を示す整数である。3 周期加速モードに対する Fig. 1 と同じ図を (28) 式を用いて作成すると Fig. 6 を得る。ここでは非線形パラメータ $A = 0.4200$ および $A = 0.6064$ に対する結果を図示した。 $M = 1, 2$ および 3 に多数の交点が存在するが、 $A = 0.4200$ の

場合 $M = 2$, $A = 0.6064$ の場合 $M = 4$ の線と q の幅広い部分で接している事実に注目しよう。五次の接線写像に対する residue の計算からこれら多数の交点の安定性を計算することはせずに、heuristic な方法であるが、具体的にこの $M = 2$ および $M = 4$ の線と $\phi^{(5)}(A, q)$ が接する近傍における軌道の特性を時間発展に対する運動量変化を数値計算によって直接観察することで定める。

その結果、 $A = 0.4200$ に対しては、 $p_0 = 0$, $q_0 = 0.105$ の近傍の軌道は周期 5 ステップ 1 で運動量が増加すること、 $A = 0.6064$ に対しては、 $p_0 = 0$, $q_0 = 0.070$ の近傍の軌道は周期 5 ステップ 2 で運動量が増加することを確認することができた。周期 5 の場合には、整数 M が加速モードのステップの大きさ m と一致しないことに注意しておく。

5. 拡散係数

軌道の拡散を観測することによって系の統計的な性質を評価することができる。ここで軌道の集団の拡散係数は

$$D = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle (p_i(T) - p_i(0))^2 \rangle \quad (29)$$

で定義される。 $\langle \rangle$ は、粒子軌道 i についてのアンサンブルである。標準写像においては、Cary, Meiss 等 [8,9] によって詳細な理論的拡散係数の評価が行われている。位相平面内において加速モードを含む初期値をとると、時間発展とともに運動量が増加し、拡散係数の値は異常な値を示す。

通常、拡散理論においてカオス領域における運動量の 2 乗平均は時間発展とともに線形に増加する。しかし初期値に加速モードの存在する領域を含む場合、運動量の 2 乗平均は時間に対して二次関数的に増加する。

拡散係数の数値計算は有限時間 $t = 10^5$ 程度に対して実行された。そこで $0.5 < A < 1$, $p = 0$, $q = -0.5 \sim 0.5$ で軌道 1,000 個について数値計算を行った結果を Fig. 7 に示す。Fig. 7 におけるそれぞれのピークスペクトルに対応する加速モードとの同定を行った結果が Table 1 である。

Table 1 より各々拡散係数における異常領域には 3 周期モードが存在することを確認められた。さらに、前節の結果に基づいて、Fig. 7 において観察される $A \approx 0.6$ における鋭いピークは周期 5 ステップ 2 の加速モードの寄与であることが結論できる。 $A \approx 0.42$ における周期 5 ステップ 1 の加速モードが異常拡散に寄与していることは、

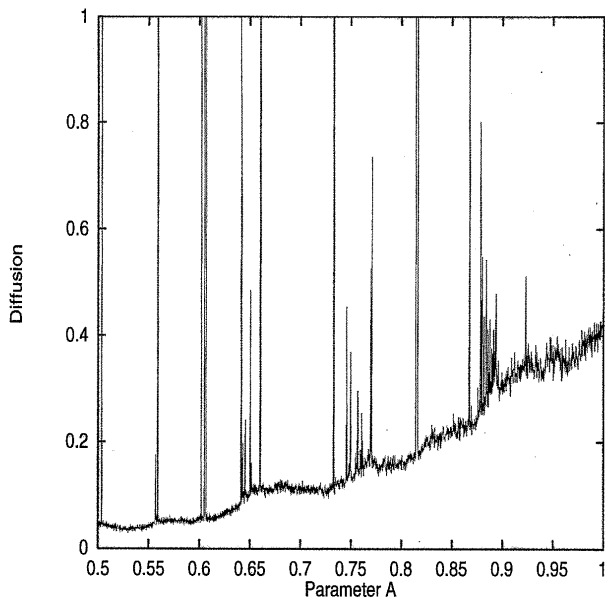


Fig. 7 Numerical result of diffusion coefficient at $0.5 < A < 1.0$. 10^5 particles are initially distributed uniformly at $p = 0$.

Table 1 A various contribution of accelerator modes for diffusion coefficient.

peak position	mode identification	stable region
$A \approx 0.55$	period-3 step-1	$0.5589 < A < 0.5595$
$A \approx 0.65$	period-3 step-1	$0.6578 < A < 0.6605$
$A \approx 0.75$	period-3 step-1	$0.7421 < A < 0.7674$
$A \approx 0.81$	period-3 step-2	$0.8144 < A < 0.8158$
$A \approx 0.88$	period-3 step-2	$0.8734 < A < 0.8919$

市川等に観測されている。

次に広瀬等[12]によって求められている2周期加速モードの寄与について考える。2周期加速モード(period-2 step-1)の存在領域は、解析結果より

$$0.64037 < A < 0.65130 \quad (30)$$

と定められている。(30)式の領域の島構造は位相平面で $(q_1, p_1) = (0.105, -0.2)$, $(q_2, p_2) = (0.11, -0.2)$ 付近で存在するため, $p_0 = 0$ とした Fig. 7 の拡散係数では2周期加速モードによる顕著な寄与は観測されていない。したがって初期値をずらしピークが見られるかどうかを3周期モードの場合と同様に解析を行って見ることにした。その結果が, Fig. 8 である。ここで定量的に周期2の加速モードの寄与を確認するため $p_0 = -0.2$, $q = -0.5 \sim 0.5$ に初期値をとった。その結果が c である。そこでは(30)式の領域での異常拡散が確認できる。上で決められた周期2の加速モード存在範囲を含まない初期条件に対する

拡散を観測すると d となる。この場合, 拡散過程において軌道が2周期加速モードの周辺に接近し, その境界のもつ粘着性により異常拡散が生じていることが観察される。これらの結果から, 2周期加速モードが異常拡散に実際に寄与していることが確認される。

Fig. 7 において $A \approx 0.5$ に対して観察される拡散のピークの原因は何かは定かではない。市川等の観察結果からは, それが7周期の加速モードの寄与によるものと推論されるが, ここでは結論できない。 $A \approx 0.65$, $A \approx 0.75$ および $A \approx 0.88$ 近傍においては異常拡散のピークの幅が広く複雑な構造を示している。これは非線形パラメータ A が(12), (13)および(14)の安定領域の値より大きくなった場合に生ずる倍周期分岐によるものである。非線形パラメータ A の変化による安定加速モード不安定化に伴う分岐現象についての詳細な解析が必要であり新しいシナリオが明らかにされることが予想されるが, ここではその詳細には立ち入らないことにする。

6. 結論

今回の標準写像における多重周期加速モードの理論的な解析で, そのモードの寄与により拡散係数において異常拡散領域を構成する微細構造を解明することができた。これらの結果は非線形パラメータが1以下といった微小な領域における現象であったゆえに興味を持たれ

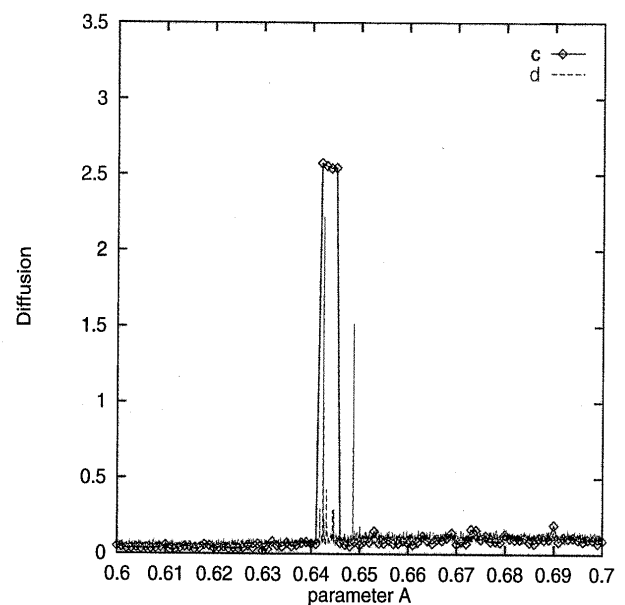


Fig. 8 Diffusion coefficient in the region $0.6 < A < 0.7$, for 10^5 particles with initial distribution along $p = -0.2$. Line (c) includes the contribution of the period-2 accelerator mode. Diffusion coefficient for the chaotic particle is also shown by dashed line (d).

た。ただ、拡散係数の解析結果から明確に示すことができなかった $A \approx 0.5$ の異常増大領域については、おそらく周期 7 の寄与であることと同定したが今後の解析において明確にする次第である。今後の興味ある課題としては、安定島領域の周辺における粘着性を考えることと分岐現象における輸送現象の構造を理論的に解明することを問題とする。

7. 謝辞

本研究を行った過程において、様々なご助言を下さった斎藤理史氏（名古屋大学工学部）ならびに野村保之氏（福井高専）に感謝致します。

参考文献

- [1] J.D. Hanson and J.R. Cary, *Phys. Fluids* **27**, 767 (1984).
- [2] M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor and G.M. Zaslavsky, *Nucl. Fusion* **6**, 297 (1966).
- [3] N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev and G.M. Zaslavsky, *Nucl. Fusion* **7**, 253 (1967).
- [4] A. Fukuyama, H. Momota, and R. Itatani, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 701 (1977).
- [5] C.F.F. Karney, *Phys. Fluids* **22**, 2188 (1979).
- [6] B.V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979).
- [7] J.D. Meiss, J.R. Cary, C. Grebogi, J.D. Crawford and H.D.I. Abarbanel, *Physica* **6D**, 375 (1983).
- [8] C.F.F. Karney, *Physica* **8D**, 360 (1983).
- [9] J.D. Meiss, R.S. MacKay and I.C. Percival, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 697 (1984).
- [10] Y.H. Ichikawa, T. Kamimura and T. Hatori, *Physica* **29D**, 247 (1987).
- [11] R.S. MacKay, J.D. Meiss and I.C. Percival, *Physica* **13D**, 55 (1984).
- [12] Kei Hirose, S. Saitô and Y.H. Ichikawa, *Plasma. Phy. Rep.* **22**, 842 (1996).
- [13] J.M. Greene, *J. Math. Phys.* **9**, 760 (1968).