



講座

プラズマの揺動解析入門Ⅲ

3. 定常スペクトル解析

犬塚 博
(静岡大学工学部)

Spectral Analysis of Stationary Data

INUZUKA Hiroshi
Faculty of Engineering, Shizuoka University Hamamatsu 432-8561, Japan
(Received 2 July 1998)

Abstract

The spectral analyses of stationary data for plasma experiments are reviewed for beginners. The Fast Fourier Transform (FFT), a conventional spectral analysis method for stationary data, has the advantages of simplicity and fast computing speed, as compared to other spectral analysis methods. Various window functions reduce the most significant errors of FFT, Gibbs effects, which are caused by digitization. Some new computational methods of the digital Fourier transform are able to execute faster than the FFT. The maximum entropy method (MEM) is also introduced and is compared with the results from the FFT.

Keywords:

spectral analysis, fourier transform, digital fourier transform, fast fourier transform, stationary signal, maximum entropy method

3.1 はじめに

プラズマの密度・電子温度・磁場・電位等の揺動を計測したデータは、処理を行う前の生データを眺めるだけでもプラズマの振る舞いがある程度理解することができるが、さらに詳細にプラズマ内部で起こっていることを調べるためには、生データに対し何らかの信号処理を施すことが必要となる。その中でも最も基本的で重要な手段がスペクトル解析である。スペクトル解析には、「高速フーリエ変換法 (FFT: Fast Fourier Transform)」[1-6]や「最大エントロピー法 (MEM: Maximum Entropy Method)」[6-8]に代表される定常な信号を対象としたスペクトル解析法と、「ウィグナー分布」[9-14]、「ウェーブレット解析」[15-17]等の非定常信号を対象とするスペクトル解析法がある。本章では、まず、スペク

author's e-mail: tehinuz@eng.shizuoka.ac.jp

トル解析法の基本である定常な信号を対象とするスペクトル解析法、中でも高速フーリエ変換法を中心に紹介する。最近話題の非定常なスペクトル解析法については第4章にて記述する。

なお、本講座は「入門講座」であるので、大学の研究室に配属された卒研生から修士の学生を対象と考え、できる限りわかりやすく概要を紹介することを心がける。したがって、問題をかなり単純化している部分もあるので、より厳密で詳細な内容については引用文献を参考にされたい。

3.2 スペクトル解析とは

フーリエ級数展開の理論によれば、どのような複雑な形状の波であってもそれが周期性を持つならばいろいろ

な周波数の正弦波の足し合わせで表現できる。その場合、それぞれの波の形の違いを表すのは、個々の正弦波をどれくらい重み付けして足し合わせるのかという情報である。これは、数学的には波の形を表す関数を正弦波という一つの直交関数系を使って級数展開することに対応し、それぞれの周波数に係数を掛けて足し合わせる次式で示される。

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \quad (1)$$

ここで、信号は $x(t)$ とし、 T は波の周期であり、 a_0, a_n, b_n 等の係数の値が周波数スペクトルと呼ばれる物理量である。たとえば、プリズムに白色光を入れると光のスペクトルが観測される。これはプリズムの媒質中では光の屈折率が光の波長（周波数）ごとに異なり、その結果、周波数に対し異なった角度に屈折し虹の七色が現れる。その色ごとの明るさが、各周波数の成分の強度、先ほどの正弦波の係数に対応する。

関数が与えられた状態で、それを正弦波で級数展開する場合の係数の値を求める問題がスペクトル解析である。これは、一見、簡単そうな問題に見えるかもしれない。オシロスコープで正弦波の周期と振幅を観測し、それらから周波数とその電圧値を求めるのは日常的に行っていることだからである。しかし、それは単一の正弦波の波形だからでできることで、複数の正弦波成分を持つとそれも困難になってくる。Fig. 1 は、一例として、二つの正弦波成分からなる波形を表している。(a) は $x(t) = \sin(2\pi \times 0.001 \times t) + 0.3 \sin(2\pi \times 0.01 \times t)$ の波形であり、(b) は $x(t) = \sin(2\pi \times 0.01 \times t) + \sin(2\pi \times 0.012 \times t)$ の波形である。二つの周波数成分の周波数に大きな差異があり振幅値にも差がある(a)の場合は、それぞれの成分の周波数と振幅値を分離して推定可能だが、そうでない(b)の場合は、波形のみからは振幅や成分を見積もることは難しい。ましてや、もっとたくさんの周波数成分を持つ場合は、より複雑な形状となり、時間的な波形のみからはスペクトルを推定することはほとんど困難である。

現実のプラズマの揺動波形は複数の周波数成分を持つ複雑なスペクトルである場合が多いので、そのスペクトルの全容を明らかにするためには信号処理としてスペクトル解析を行うことが欠かせないこととなる。

3.3 デジタルフーリエ変換

(1)式を複素数を使って書き直すと複素フーリエ級数展開の式

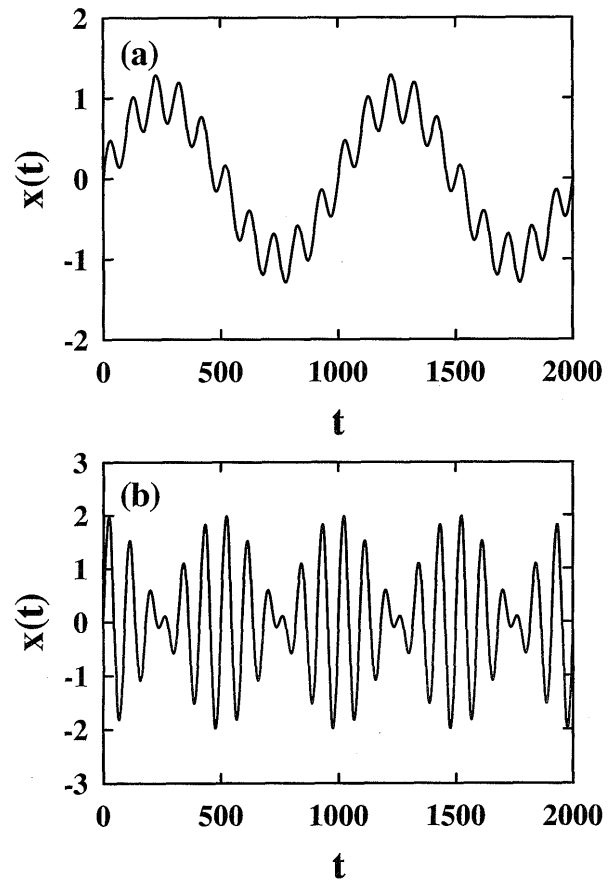


Fig. 1 Waveforms of functions with two sine components, (a) $x(t) = \sin(2\pi \times 0.001 \times t) + 0.3 \sin(2\pi \times 0.01 \times t)$, (b) $x(t) = \sin(2\pi \times 0.01 \times t) + \sin(2\pi \times 0.012 \times t)$.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(j \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (2)$$

となる。ここで c_n は複素スペクトルである。信号 $x(t)$ からスペクトル c_n を求める式は、

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp \left(-j \frac{2\pi n t}{T} \right) dt \quad (3)$$

となる。しかし、ここまでは信号 $x(t)$ の周期性を仮定してきた。より一般化するためには、周期性がない場合、すなわち $T = \infty$ とする必要がある。それに対応する式がフーリエ変換と呼ばれる次式である。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (4)$$

先ほどのプリズムの例は光学的にこのフーリエ変換を行うことに対応する。信号 $x(t)$ は複素スペクトル $X(f)$ を

使って,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (5)$$

で表され逆フーリエ変換と呼ばれる。なお、係数 $1/2\pi$ をどこに付けるかについては、慣用的にいくつかの定義が用いられている。しかし、この式も実際のプラズマの揺動のスペクトル解析に用いることができない。実験で無限時間区間のデータを得ることはできないし、時間的に連続なアナログデータを取得し記録することも難しいからである。現実には、有限長のサンプリングされデジタル化された時系列が解析対象となる。そのようなデータを有限時間内で計算できるように(4)式を時間と周波数についての離散化を行うと、離散フーリエ変換 (DFT: Discrete Fourier Transform) と呼ばれる次式が得られる。データ数を N 個とすると、

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (6)$$

である。信号 $x(n)$ は、複素スペクトル X_k を使って、

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (7)$$

で表される。これで、計算機を使ってスペクトルの計算が可能となる。

3.4 高速フーリエ変換法

(6)式は単純な式であり、プログラミングも容易であるが、まだ問題が残されている。(6)式では、一つのスペクトルを求めるのに N 回の複素数の掛け算と $(N-1)$ 回の足し算を必要とする。それらを N 個の周波数ごとに行うことが必要であるので、合計 N^2 回の積和演算を必要とする。データ数 N が小さい場合は短時間で計算可能であるが、 N が大きくなると最近の高速な計算機を用いても非実用的な計算時間を要す。そこで Cooley と Tukey によって考案されたのが高速フーリエ変換法 (FFT) である[1]。これは、基本的にはデータ数を減らした DFT を繰り返し演算することによって全体の区間の DFT を行うのと等価な演算を行うというイメージであるが、いくつかの工夫によって演算量は掛け算が $(N \log_2 N)/2$ 回、足し算が $N \log_2 N$ 回に減少する。データ数 N が少ない場合は、DFT とそれ程変わらない計算時間となるが、多い場合は劇的に DFT に比べての演算量を減少させ、パソコンクラスの計算機で十分実用と

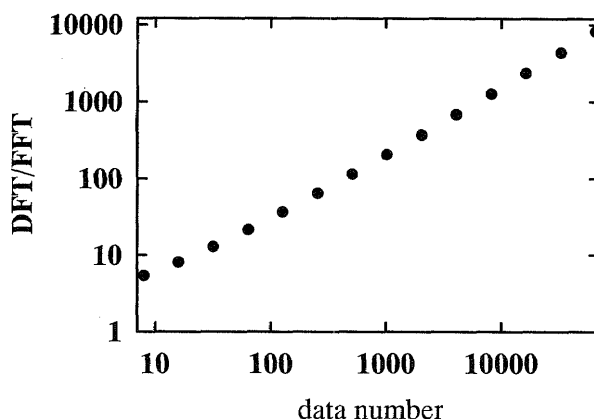


Fig. 2 Ratio of the number of multiplication in the FFT and the DFT.

なる計算時間でスペクトルが求められる。各データ数に対する DFT で必要とされる掛け算の数を FFT の掛け算数で割った比の値を Fig. 2 に示す。その比はデータ数に対し指数関数的に増加する。すなわち、FFT は DFT に対し、およそこの比の割合で高速化される。たとえば、8,192 点のデータの場合は 1,260 倍高速化される。この高速化アルゴリズムの制約より、データ数 N は 2 のべき乗個に制限される。なお、FFT は DFT を高速化しただけで、得られるスペクトルについては本質的に DFT と同じものである。また、(6)式、(7)式の関係からもわかるように、フーリエ変換とフーリエ逆変換の式はわずかの違いであり、通常、両方向の変換が実行可能なプログラムとなっている。FFT のプログラムそのものは、多くの文献に各種プログラミング言語によるサンプルプログラムが掲載されているので、それらを参考にされたい[3,5,6,18-20]。

3.5 FFT の使い方

スペクトル解析を行うにあたっては、サンプリングされたデジタルデータを使って計算するので、その段階でエイリアシングが起こっていないことが前提となる。そのため、もしも信号にどのくらい高い周波数成分までが含まれているか前もってわからない時には、アナログデジタル (AD) 変換器の前段にアナログの低域通過フィルタ (アンチエイリアシングフィルタ) を取り付け、必ずサンプリング定理を満足するようにしておく必要がある。DFT とそれを高速化した FFT では、離散化によってサンプリングされて記録されたデジタル計測データの取り扱いを可能とした。しかし、反面、周波数の離散化によって重大な副作用が発生する。それは、解析デー

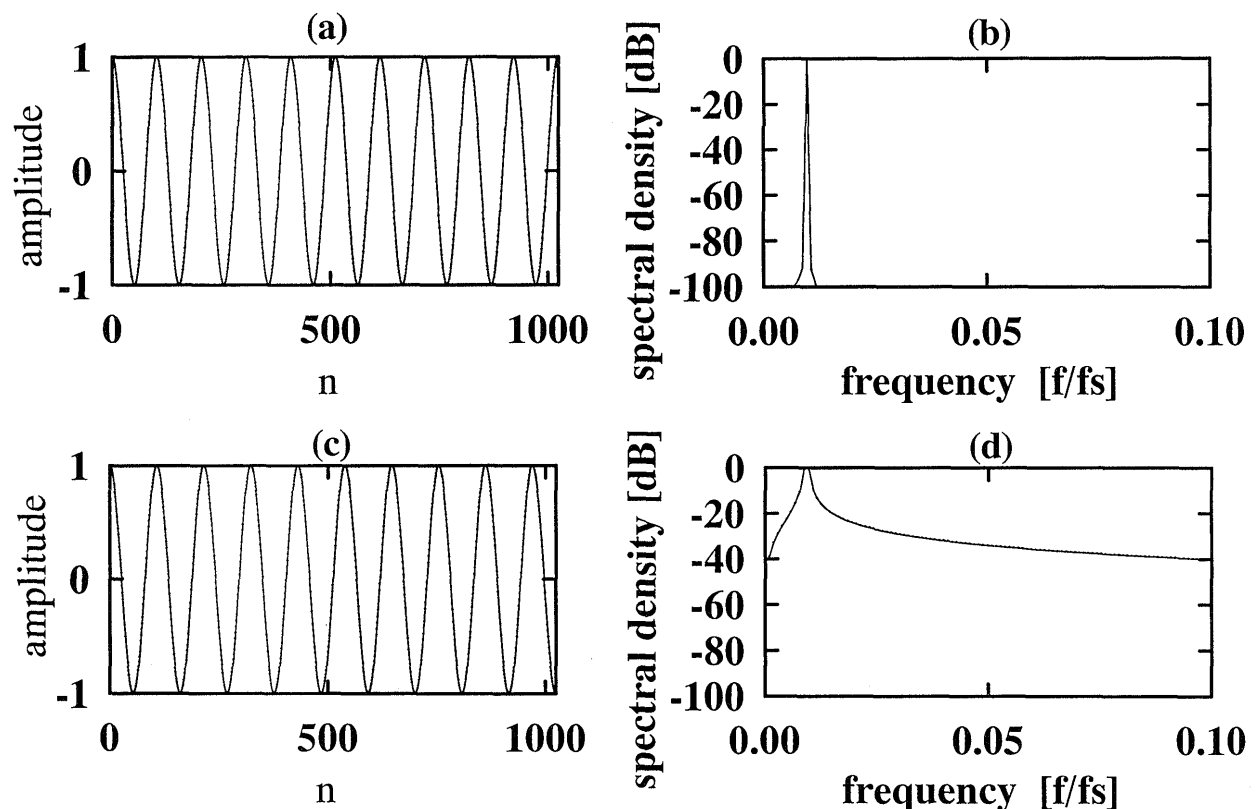


Fig. 3 Frequency spectra of sine functions with the rectangular window analyzing length is (a) 10 periods and (b) 9.5 periods.

タに周期性が仮定されてしまうというアナログのフーリエ変換にはなかった性質である。その結果、解析データは最後のデータと最初のデータが繋がり循環的に繰り返すものとしてスペクトル解析が行われてしまう。これは、データ長がちょうど周期の整数倍であったり、両端の値がどちらも0であったりして最初と最後のデータ値が同じ値であるならば問題とならないが、そうでない場合は、その部分で値の不連続が発生してしまう。その結果、スペクトルに Gibbs 現象と呼ばれる重大な歪みを発生させる。これは、本来のスペクトルの幅を広げたり、裾野部分のレベルを増大させ、相対的に小さなピークを覆い隠してしまう。プラズマ揺動データのスペクトル解析では、もちろん、スペクトル全体の情報が大切であるが、中でもピーク周波数やその高さ、そして半値幅等の情報が特に重要である。それらに Gibbs 現象は重大な影響を与える可能性がある。単一の周波数成分を持つ正弦波信号を Gibbs 現象が発生する場合と発生しない二つの場合で解析した結果を Fig. 3 に示す。(a) ではちょうど10周期の波を解析区間とし、最初と最後のデータが同じ値である。(c) ではわずかに周波数を変えて解析区間に

9.5周期の波が入るようにした。当然、最初と最後のデータには大きな値の違いが発生している。本来は、どちらも単一の正弦波なのだから一つの線スペクトルが得られるはずである。確かに (a) のデータを FFT でスペクトル解析したスペクトルの (b) では、単一の線スペクトルに近いものが得られているが、最初と最後のデータの値が異なる (c) のデータをスペクトル解析した (d) の場合、Gibbs 現象の結果、本来の1本の線スペクトルとは異なった幅広のスペクトルとなってしまっており、もしもこのスペクトルピークの裾野よりも小さなピークがあったとしても、裾野に埋もれてしまい観測することができない。当然、Gibbs 現象がスペクトル解析結果に致命的な影響を与えないようにする工夫が必要であり、そのために用いられるのが窓関数である。これはデータ端の値を0に滑らかに近づけ不連続を発生させなくするためのデータ操作である。しかし、それは本来のデータ自体を改変することにもなるので、窓関数もスペクトルを歪ませてしまう欠点を持つ。一般に Gibbs 現象を抑制する効果の高いものほど窓関数による歪みが大きくなるトレードオフの関係にあり、状況に応じていくつかの窓関

数を使い分ける必要がある。スペクトル解析に用いる窓関数としては多種類考案されており[21]、代表的な窓関数 $W(n)$ としても Hanning 窓

$$W(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (8)$$

Hamming窓

$$W(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (9)$$

Blackman窓

$$W(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad (10)$$

Kaiser窓

$$W(n) = \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n-N+1}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)} \quad (11)$$

等がある。ここで Kaiser 窓中の I_0 は 0 次の変形ベッセ

ル関数である。窓関数にはそれぞれ特徴があり、Hanning 窓は Gibbs 現象を抑える効果は高いが周波数分解能が劣る。Hamming 窓は、その逆に周波数分解能が高いが Gibbs 現象抑制効果は Hanning 窓に劣る。Blackman 窓は、比較的 Hanning 窓に似ており Gibbs 現象抑制の効果がさらに高い。その結果、比較的素直な結果が得られやすい。Kaiser 窓は、その効果を変数 α で調節可能であり、Gibbs 現象抑制が仕様を満足する範囲で最良の周波数分解能を実現したい場合に使用する。各窓関数の得失を明らかにするため、三つの周波数成分を待つ信号 $x(t) = \sin(2\pi \times 0.192 \times t) + \sin(2\pi \times 0.197 \times t) + 0.002\sin(2\pi \times 0.4 \times t)$ を三種類の窓関数をかけた後、FFT 解析した結果を Fig. 4 に示す。これは、近接した二つの大きなピークと周波数が離れた相対的に小さなピークが得られるはずである。Hanning 窓の場合である (a) では、周波数 0.4 の小さなピークが確認できるが、近接した二つの大きなピークがほとんど一つのピークに見えてしまう。Hamming 窓をかけた (b) の場合は、近接した二つのピークを何とか分離できておりその半値幅も小さいが、相対的に小さな三つ目のピークがまったく

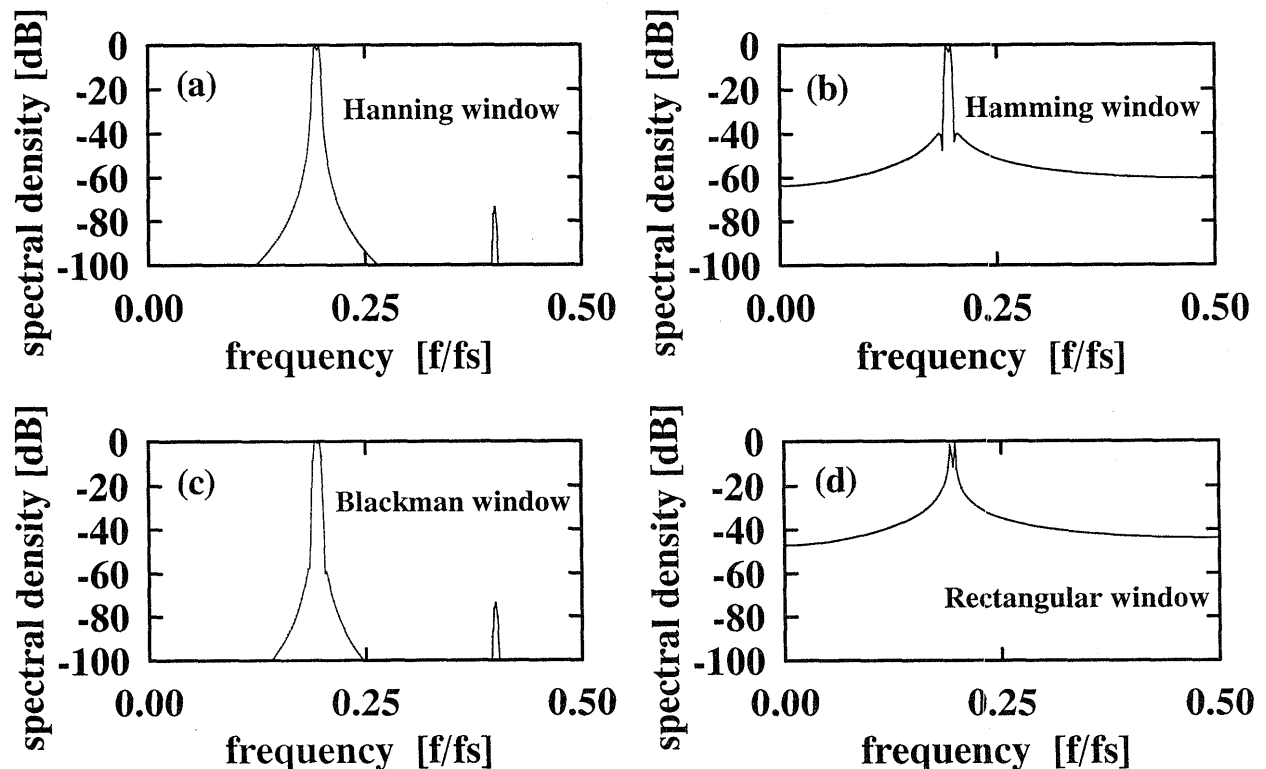


Fig. 4 Frequency spectra of a function with three sine components, $x(t) = \sin(2\pi \times 0.192 \times t) + \sin(2\pi \times 0.197 \times t) + 0.002\sin(2\pi \times 0.4 \times t)$, using (a) a Hanning window, (b) a Hamming window, (c) a Blackman window, and (d) a Rectangular window.

見えない。Blackman 窓を用いた (c) の結果は、Hanning 窓の場合とよく似ている。

窓関数を使用しない場合は、無限に続くデータの中から有限データ長のデータを $W(n)=1$ の窓関数を使って切り出すと考えられ、方形窓(Rectangular window)と呼ばれる。しかし、この方形窓で FFT を実行することは、Fig. 4 (d) に示すように Gibbs 現象の影響が極めて大きく出るので通常は行うべきではない。もっとも、周波数分解能については、最も良い結果が得られ他の窓関数に比べてもはっきりと二つの近接したスペクトルピークを分離できている。

これらの窓関数は FFT の実行前のデータに掛けて用いる。

$$x'(n)=x(n) \times W(n) \quad (12)$$

窓関数をデータに掛けた後、もしもデータ数が2のべき乗個でなければ、その数になるようにデータの前か後ろに値が0のデータを付け加える。そして FFT 処理を実行する。

得られるものは複素スペクトル X_k である。(6)式での $k=0$ が直流成分であり、 $k=1$ が $1/(N\Delta t)$ [Hz] に対応し、 $k=N/2$ が正の最高周波数 $1/(2\Delta t)$ [Hz] となる。これは、サンプリング定理より規定されるデジタルデータで使用する最高周波数である。ここで Δt はサンプリング周期である。それ以上は負の周波数範囲となり、 $k=N/2+1$ が $-1/(2\Delta t) + 1/(N\Delta t)$ [Hz]、 $k=N-1$ が $-1/(N\Delta t)$ [Hz] となる。したがって、周波数分解能は $1/(N\Delta t)$ [Hz] となり、データ数 N とサンプリング間隔 Δt の積である解析データの時間長が長いほど高い周波数分解能となる。したがって、データの定常性が仮定できるなら、できる限り長い区間のデータを用いて FFT を実行することが望ましい。

複素スペクトル X_k を $X_k = A_k + jB_k$ と実数部・虚数部に分けて表現すると、 X_k の絶対値である振幅スペクトル $|X_k|$ は

$$|X_k| = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (13)$$

であり、 X_k の2乗値であるパワースペクトル $|X_k|^2 = S_f$ は

$$S_f = |X_k|^2 = A_k^2 + B_k^2 \quad (14)$$

である。また、位相スペクトル $\arg(X_k)$ は

$$\arg(X_k) = \tan^{-1} \left(\frac{B_k}{A_k} \right) \quad (15)$$

で与えられる。

3.6 さらに高速化手法

FFT が登場したことによって、計算機を使って実用的な計算時間でスペクトルを求めることができるようになったといえる。しかし、同じ結果が得られるのなら、少しでも速いアルゴリズムが望ましいのは当然のことと、さらに高速化の手法も検討され続けてきた。FFT 後に開発された代表的な高速化アルゴリズムに、WFT (Winograd Fourier Transform) [22] や PFA (Prime Factor Fast Fourier Transform Algorithm) [23]、NTT (Number Theoretic Transform) [24] 等があるが、いずれもプログラムが複雑になったり制約条件が増えたりする割には演算量減少の効果はそれほど大きくなかった。そういう状況の中で、比較的簡単なアルゴリズムで通常の FFT よりも高速なアルゴリズムが登場した。それが実数 FFT (RFFT: Real Valued FFT) である[25]。これは、一般の FFT と異なり、解析データを実数値として限定する。特殊な場合を除いて実験データは実数値であるので、通常はそのような限定をしても問題にならない。この制限条件により発生する同値になる部分や0になる部分については計算を省略することにより高速化する。例えば、データが実数値であると正の周波数のスペクトルと負の周波数のスペクトルは複素共役の関係となるので片方だけ計算すればよい。さらに、別の高速化手法である split radix 方式[26]と組み合わせることにより、普通の FFT よりも2倍以上高速な処理を実現している[25]。

3.7 FFT 以外の定常スペクトル解析法

5節で示したように、パワースペクトル S_f は、時系列データを FFT 処理して複素スペクトルを得て、そのパワーを求めることにより計算できる。しかし、Wiener-Khinchine の定理より、時系列データの自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ をフーリエ変換する手法でも計算できる。

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt \quad (16)$$

$$S_f = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (17)$$

この関係を利用する Blackman-Tukey 法と呼ばれるスペクトル解析法[6]も歴史的に利用されてきたが、今では、FFT や後に述べる MEM が主流である。しかし、上記の関係は、4章で述べるウィグナー分布では本質的

に重要な式となる。また、計算時間のかかる相関関数の計算に、この関係を利用してFFTを用いる手法もある。

定常な信号のスペクトル解析によく用いられるもう一つのスペクトル解析法として最大エントロピー法(MEM)がある。これには、いくつかの解釈があるが、その一つに線形予測法に基づく理解がある。過去の有限個のデータから未来のデータを予測するモデルを自己回帰モデルという。自己回帰モデルでは、新しいデータが来るたびに、予測された値と現実の値の誤差が最小になるようにモデルの係数の更新を行う。それを、最小二乗規準で行うと、Yule-Walker 方程式を解く問題に帰着する[6]。それが解けると、そのモデルは入力信号の情報をすべて含んでいるので、その係数の値から入力スペクトルを推定できる。このような方法でスペクトル解析を行う。Yule-Walker 方程式を解く問題は、大きな計算量を要するのでFFTに比べると計算時間がかかるが、短い区間のデータでも高い周波数分解能でスペクトルが計算できるのがMEMの特徴である。それは、周波数分解能が解析区間の時間の逆数で制限されるFFTとは大きく異なる。とくに、この特質を生かし、非定常な実験データに対しても短い区間毎にMEMを実行することで、実質的に非定常なスペクトルの変化を追う応用にも使われる。しかし、何個前のデータまで使って未来を推定するかということに対応する自己回帰モデルの次数 m を実行前に与えてやる必要がある。不適切な次数を与えると、スペクトルの形状が変わってくる。そのため、次数を決定するFPE(Final Prediction Error)[6]やAIC(Akaike Information Criterion)[8,27]等の手法が考案されており、それらを使って最適な次数を求めた後にMEMを実行する。MEMのプログラムも、多くの文献に各種プログラミング言語によるサンプルプログラムが掲載されているので、それらを参考にされたい[6,8,18,19]。

一例として、実際のプラズマで観測された揺動波形のスペクトル解析をFFTとMEMで行った結果を示す。Fig. 5は、あらかじめ生成しておいた水素プラズマにステップ状に高電圧を印加し、その直後、プラズマ中を流れる電流により駆動されて自然に発生した低域混成周波数帯の電場揺動をダブルプローブで観測したものである[28]。このスペクトル解析をFFTとMEMで行った結果をFig. 6に示す。MEMでのモデル次数 m も変化させた。本質的にはどちらの結果もよく似たスペクトルとなっているが、一般にMEMで解析したスペクトルの方が、半値幅の狭い鋭いスペクトルピークが得られてい

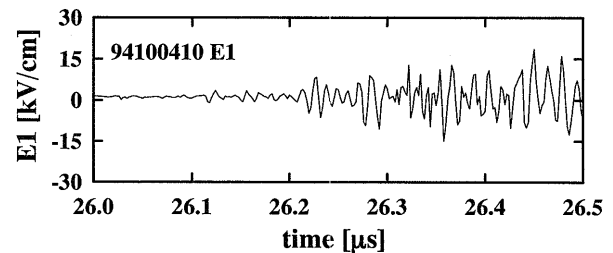


Fig. 5 A sample data, electric field fluctuations observed by a double probe in a high voltage linear plasma discharge.

る。MEMの結果は、モデル次数 m に大きく依存し、次数が1変化するだけで、スペクトルの形状がかなり変化する。この場合、FPEで最良とみなされる次数は $m = 19$ である。なお、この辺のより詳細な内容については、第6章でもう一度詳しくふれられる予定である。

3.8 スペクトルの拡張

プラズマの揺動解析では、複数点で測定したデータ間の相関を問題にする場合がよくある。どのような時間遅れ τ で二点間の相互相関のピークが現れるかということから、波の伝搬方向や位相速度を計算することができる。しかし、複数の周波数成分があり周波数ごとに伝搬遅れ時間が異なると、単純に相互相関で遅延時間を求めるのが困難になってくる。そのような場合に用いられるのがクロススペクトルである[6]。前節で述べたように、自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ をフーリエ変換したものがパワースペクトルである。それに対し、相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ をフーリエ変換したものはクロススペクトル S_{xy} と呼ばれる量になる。

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (18)$$

$$S_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (19)$$

この量は、言わば、 $x(t)$ と $y(t)$ の二つの関数が周波数ごとにどのくらい関係があるかを表している。クロススペクトルの振幅や位相から、両者にどの程度相関があり時間遅れがあるのかに関する情報が周波数ごとに得られる。

また、揺動を発生させている波動がプラズマ容器内で反射を起こしている場合がある。このような場合には、信号は直接波と時間遅れのある反射波の重ね合わせとなる。この場合に、反射波の遅れ時間を求めることができ

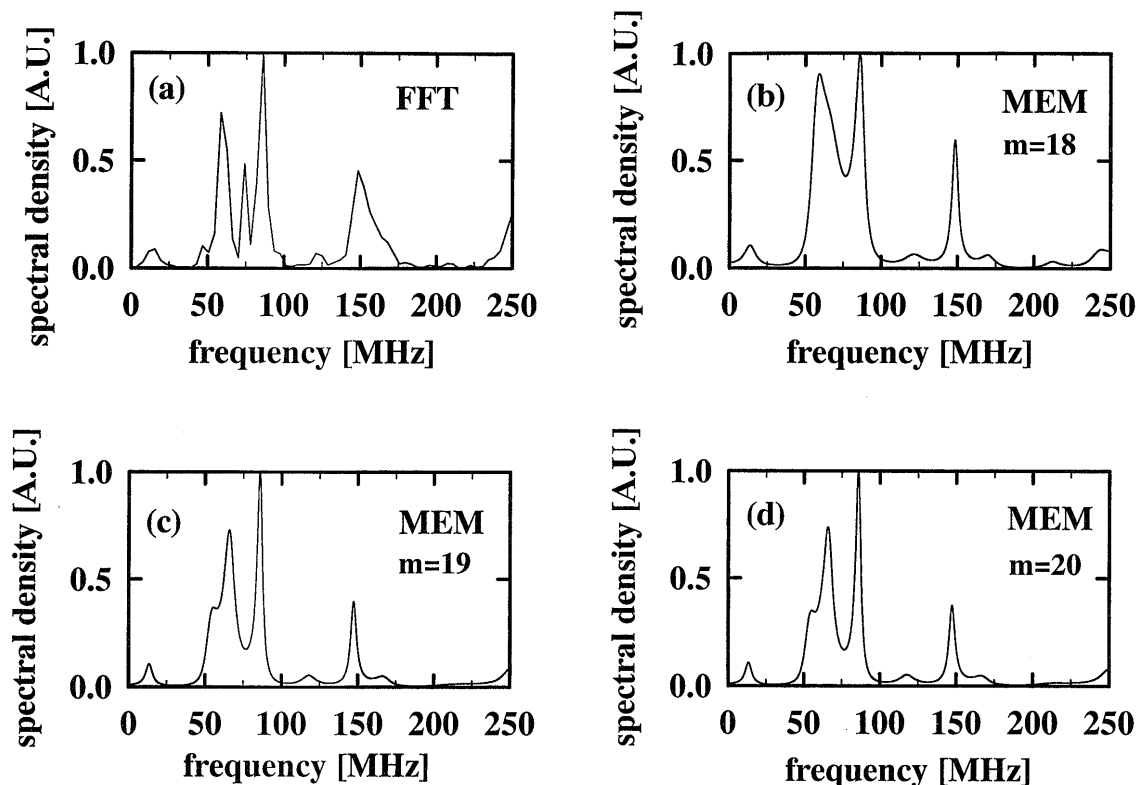


Fig. 6 Frequency spectra of Fig. 5 analyzed by (a) FFT and (b)-(d) MEM. Order of autoregressive model in the MEM is (a) $m=18$, (b) $m=19$, and (c) $m=20$.

るのがケプストラム $C_e(t)$ である[5,6]。これは、パワースペクトルの対数に逆フーリエ変換を施したものと見なすことができる。

$$C_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \log(S_f(f)) \exp(j2\pi ft) df \quad (20)$$

ケプストラム $C_e(t)$ は時間に対する関数となるが、反射の遅れ時間の時刻でピークを生ずる。また、周期性のある信号の場合は周期の部分にもピークを生ずるので、その測定にも用いられる。

3.9 まとめ

定常信号に対するスペクトル解析法を紹介した。とくにFFTを中心に述べたが、FFTは他のスペクトル解析法と異なり機械的に実行することが可能であり、本質的にスペクトルの定義であるフーリエ変換をデジタル化したものである。比較的簡単に正しい周波数スペクトルが得られる。したがって、特別な場合に威力を発揮するFFT以外のスペクトル解析法の基準としても用い

られる。しかし、FFTにもいくつか欠点があり、データ長が短い場合や、データの性質が時間的に変化する非定常な場合には、必ずしも物理的に妥当なスペクトルが得られない場合がある。基礎となる本章の議論を前提として、そのような非定常データのスペクトル解析法を第4章で紹介する。

謝辞

プラズマ中の電位揺動のスペクトル解析の具体例として、実験データを使用することを快くご許可いただきました日本大学理工学部物理教室の竹田保正教授に感謝いたします。

参考文献

- [1] J.W. Cooley and J.W. Tukey, Math. of Comput. **19**, 297 (1965).
- [2] 安居院 猛, 中嶋正之: FFTの使い方(秋葉出版, 東京, 1994) 4章.
- [3] 中村尚五: ビギナーズデジタルフーリエ変換(東京

- 電機大学出版局, 東京, 1989) 4 章.
- [4] 江原義郎: ユーザーズデジタル信号処理 (東京電機大学出版局, 東京, 1991) 3 章.
 - [5] 三上直樹: デジタル信号処理入門 (CQ出版社, 東京, 1989).
 - [6] 日野幹雄: スペクトル解析 (朝倉書店, 東京, 1977).
 - [7] J.P. Burg, *Proc. 37th Meet. Soc. Exploration Geophysicists* (Stanford, 1967) p.1975.
 - [8] 添田 喬, 中溝高好, 大松 繁: 信号処理の基礎と応用 (日新出版, 東京, 1979).
 - [9] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
 - [10] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, *Philips J. Res.* **35**, 217 (1980).
 - [11] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, *Philips J. Res.* **35**, 276 (1980).
 - [12] T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauker, *Philips J. Res.* **35**, 372 (1980).
 - [13] 河浦淳一, 鈴木英男, 小野隆彦: 日経エレクトロニクス **423**, 163 (1987).
 - [14] 犬塚 博, 永井孝佳, 築島隆繁: 核融合研究 **60**, 217 (1988).
 - [15] C.K. Chui: ウェーブレット入門 (東京電機大学出版局, 東京, 1993).
 - [16] 南 慶一郎, 河田 聡: インターフェース **1**, 110 (1994).
 - [17] 安部素嗣, 安藤 繁: インターフェース **2**, 137 (1995).
 - [18] 南 茂夫: 科学計測のための波形データ処理 (CQ出版社, 東京, 1986).
 - [19] W.H. Press, S.A. Teukplsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery: ニューメリカルレシピ・イン・シー, (技術評論社, 東京, 1993) 12章.
 - [20] 吉川敏則: C 言語実用数値処理プログラム集 (科学技術社, 東京, 1993) 8 章.
 - [21] F.J. Harris, *Proc. IEEE* **66**, 51 (1978).
 - [22] S. Winograd, IBM Res. Rep. RC-6291 (1976).
 - [23] D.P. Kolba and T.W. Parks, *IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Processing*, **ASSP-25**, 281 (1977).
 - [24] 関口幹夫: 信学誌 **63**, 1076 (1980).
 - [25] H.V. Sorensen, D.L. Jones, M.T. Heideman and C.S. Burrus, *IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Processing*, **ASSP-35**, 849 (1987).
 - [26] H.V. Sorensen, M.T. Heideman and C.S. Burrus, *IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Processing*, **ASSP-34**, 152 (1986).
 - [27] 岩間尚文: 核融合研究 **63**, 586 (1992).
 - [28] H. Inuzuka, Y. Takeda, and K. Yamagiwa, *Phys. Lett. A*, **234**, 219 (1997).