講座
まず「MHD」を

4．非線形MHD現象

吉田善章
（東京大学大学院新領域創成科学研究科）

Nonlinear Theory of MHD

YOSHIDA Zensho
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan
(Received 27 February 2001)

Abstract

The MHD system of equations includes convective nonlinearity that produces a variety of interesting phenomena in plasmas. This article is intended to describe how a mathematical theory can grasp essential characteristics of complex behavior.

Keywords:
nonlinear theory, MHD equation, Navier-Stokes equation, KdV equation, self-organization

4.1 はじめに

G. Galileiはピサの僧院で吊灯の運動を観察し，振り子の周期は振幅によらない一定の値をもつこと（等時性）を発見したといわれています．等時性をもつ振動，すなわち調和振動は，振り子に限らず様々な振動現象を特徴づける基本的なパラダイムの一つです．例えばピアノ演奏者が，鍵盤をたたく強弱によらず一定の高さの音を出せるのは，ピアノ線の弾性振動が等時性をもつからにほかなりません（音の高さは音波の周期に反比例する）．

しかし厳密に調べると，吊灯のような単純な振り子では等時性は成り立たないことがわかります．長さL（定数）の糸に吊された質量mのおもりを考えましょう．振り子の振れ角をϕと表し重力加速度をgとすると，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi=-\omega^2\sin\phi \quad (\omega=\sqrt{g/L}) \tag{1}$$

となります．この非線形常微分方程式を「振り子方程式」と呼びます．初期条件として初期角$\phi(0)$と初期角速度$\mathrm{d}\phi(0)/\mathrm{d}t$を与えて（1）を解けば，振り子の運動が決定されます．

運動方程式（1）の右辺に現れる非線形関数$\sin\phi$を級数で表すと

$$\sin\phi=\phi+\frac{1}{6}\phi^3+\frac{1}{120}\phi^5+\cdots$$

と書けます．$|\phi|\ll 1$のときには$\sin\phi\approx\phi$と近似できるので，運動方程式（1）の「線形近似」は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi=-\omega^2\phi \tag{2}$$

となります．この方程式の一般解は，三角関数を用いて

$$\phi(t)=\theta\sin(\omega t+\varDelta) \tag{3}$$

と与えられます（θは振幅を表す実定数，$\varDelta$は振動の初期位相によって決まる実定数）．こうして，Galileiの言った

author's e-mail: yoshida@k.u-tokyo.ac.jp

等時性が，Newton の運動の法則から線形近似法則として証明できたことになります．

振幅が大きくなると，線形近似を使うわけにはいかなくなり，非線形の振り子方程式(1)を厳密に解くことが求められます．これは，初等関数の知識の範囲では無理で，楕円関数を用いなくてはなりません．

基本的なことなので，計算を見ておきましょう．エネルギー保存則を用いて(1)を1回積分すると

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\pm 2\omega\sqrt{k^2-\sin^2\frac{\phi}{2}}$$

を得ます(ただし $k=\sin(\theta/2)$，振り子が上昇する部分については右辺の符号を正にとる)．$\sin(\phi/2)=k\sin\varphi$ とおき，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\varphi=2k\cos\varphi/\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ を使うと

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

を得ます．これを t について積分して

$$\omega(t-t_0)=\int_0^{\Phi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

ただし $\xi=\sin\varphi$．この中辺，右辺の積分を第1種楕円積分と呼び $\mathrm{F}(\Phi,k)$ と書きます．この逆関数が Jacobi の楕円関数であり，$\mathrm{sn}(\cdot,k)$ と書きます．

以上の観察を標語的にいうと，

$$\begin{array}{ccc}\text{線形振動方程式} & \longleftrightarrow & \text{三角関数}\\ \text{振り子方程式} & \longleftrightarrow & \text{楕円関数}\end{array}\qquad(4)$$

という対応が成り立ちます．したがって，楕円関数は三角関数を拡張する概念であるといえます．また，線形方程式が指数関数（三角関数を含む）を誘導すると考えれば[1,2]，一つの非線形方程式は，それに対応する特殊な関数を誘導するということもできるでしょう．指数関数(三角関数)が線形理論のパラダイムであるならば，これを拡張した楕円関数でどこまでいけるのかということになります．一般にハミルトニアンが

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V(x)$$

と与えられたとき($p=m\dot{x}$ は運動量，$V(x)$ はポテンシャルエネルギー)，エネルギーの保存則 $H=E$（実定数）を用いて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x=\sqrt{W(x)}\quad(W(x)=(2/m)[E-V(x)])\qquad(5)$$

を得ます．これを

$$\int\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{W(x)}}\qquad(6)$$

と積分すれば運動が求まることになります．ここで，ポテンシャルエネルギー $V(x)$ が(したがって $W(x)$ が) 4次以下の多項式であれば(6)の左辺は「楕円積分」となり，これを t の関数として書くと(つまり楕円積分の逆関数を求めると)「楕円関数」を得ることになります．

周期運動(可積分な運動)を考える基本となるのが，楕円関数であり，完全可積分系としてのソリトン理論の背骨となります．1次元の対流型非線形性に分散の効果を加えたのが KdV 方程式

$$\partial_t u+u\partial_x u+\alpha\partial_x^3 u=0\qquad(7)$$

です．$u(x,t)$ は流れの速度（1次元）を表す実関数，$\partial_t u+u\partial_x u$ は流れ u に乗った点で観測した加速度を表す Lagrange 微分であり，$u\partial_x u$ が本稿の主役である「対流型非線形項」の一次元版です．α は分散の強さを表す実定数です．さて，速度 c で伝播する解を探すために $u(x,t)=\varphi(x-ct)$ とおく．$\partial_t\varphi+c\partial_x\varphi=0$ を使って(7)の中の ∂_x を $-(1/c)\partial_t$ に変換すると

$$\partial_t\varphi-\frac{1}{c}\varphi\partial_t\varphi-\frac{\alpha}{c^3}\partial_t^3\varphi=0$$

を得る．これを t について1回積分すれば

$$\frac{\alpha}{c^3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi=-V'(\varphi),\ V(\varphi)=-a\varphi-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{6c}\varphi^3\qquad(8)$$

となります(a は積分定数)．さらに(5)の形に書き換えることができて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi=\sqrt{W(\varphi)}\ \{W(\varphi)=(2c^3/\alpha)[E-V(\varphi)]\}\qquad(9)$$

を得るので，この解が楕円関数で与えられることがわかります．

楕円関数は，楕円積分の逆関数として研究が始まったのですが，複素関数としての二重周期性に Gauss が気づいたところから新しい局面に入ったといえます．その

後，AbelとJacobiによって現在の体系が整えられました．数学的にいうと，楕円関数とは，複素平面で二重周期をもつ有理関数であると定義されます（この一方の周期を無限大にしたのが三角関数）．楕円関数は代数的加法定理をもつことと，楕円関数の微分はまた楕円関数になるということが，微分方程式を考えるときの重要なポイントです．このことは，もちろん，三角関数（指数関数）についてもいえますが，三角関数の世界は極めて単純で，微分しても形が変わらないという特徴があります．楕円関数になると，微分して形が変わります．この変形を楕円関数の代数操作で表現できることが本質的なところです．この構造についての洞察から，ソリトンの理論が生まれたといえます．

楕円関数について少々字数を費やしましたが，数学・物理学の巨人たちの研究によって，極めて多産で美しい体系ができあがっていることがわかったと思います．もっとも，これが4次以下の多項式で書ける非線形ポテンシャルに関する理論であるというと，いかにも特殊な感じがするかもしれません．しかし，まずエネルギーが2次形式になる線形，次に4次以下の非線形といった具合に，一つ一つの数学表現を丹念に研究して行く歴史の上に，永久不滅の英知が築かれるのです．むやみに「一般性を研究する」という一足飛びの考え方は，ちょうど最近はやりの「複雑性の研究」というのと同じで，重い意味的欠陥をもついわざるを得ません．非線形性が「分類」され「要素」に還元されてはじめて研究の対象となるのであって，これが厳密科学としての「非線形科学」の基本的なスタンスです[2]．

4.2　解析解から定性的理論へ

本稿で論じるのは，MHD方程式に現れる「対流型」の非線形性についての理論です．これは，前節で述べたKdV方程式（7）でも現れた$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$の形の2次の非線形性ですが，ここではまったく違った振る舞いをします．方程式が少し違うと（空間の次元が違ったり，協調する他の項の性質が違ったりする），表徴がまったく変わってしまうというのが，非線形理論の難しくまたおもしろいところです．標語的にいうと

対流型非線形性＋分散効果
　　＝Korteweg－deVries(KdV)方程式，
対流型非線形性＋散逸効果
　　＝Navier－Stokes(NS)方程式

となります．この両者が，数理物理の双璧を成すといえます．分散（3階の空間微分）を加えたKdV方程式は「可積分系」を代表する方程式であり，前節で述べたようにソリトン解をもちます．一方，散逸を加えたNS方程式は「非可積分系」を代表する方程式であり，現象論としては乱流という複雑現象を記述します．数学としても，不動点定理や写像度の理論，弱解の方法など重要な理論の多産な母であり，しかもまだ多くの未解決問題を残しています．

NS方程式は，流体運動の複雑性と対応する極めて多様な振る舞いを包摂するものです．例えば，せせらぎをつくる水の複雑な運動を想像すると，NS方程式を具体的に解いて，流速や圧力を数学的に表現することは事実上不可能であることがわかります．このような方程式に関する研究では，「科学の方法」のあり方に思想的な変化が求められます．法則（方程式）と現象（解）の双方を「数式で表す」ことには，明らかに限界があります．解析力学で学んだ問題や，偏微分方程式でもKdV方程式のように，「可積分系」といわれる方程式の場合に限って，解の一般的性質を解析的に表現することが可能です．これは，むしろ特殊な場合であることがわかっています．そこで，数式によって表された法則に対して，「その解が数式では表せない場合」の研究が必要になります[3]．Poincaréが「定性的理論」といったカオスの研究が，この思想の出発点といえます．前節で述べた「一つの非線形方程式は，それに対応する特殊な関数を誘導する」という考え方とは質的に異なった理論を展開しようというのです．

解が数式では表せないといっても，解がないという意味ではありません．したがって，例えば数値シミュレーションによって（近似的な）解の振る舞いを観察することはできます．大規模計算機シミュレーションによって可能になる複雑な現象の観察は，理論を作るための重要なサポートになり，「実験数学」とも呼ばれています．とくに，流体やプラズマのシミュレーションは，実際には直接観測できない流れや電磁場のダイナミックスを可視化して見せてくれるので，しばしば重要なインスピレーションを与えてくれます．ただし，シミュレーションをやっても，絵やアニメーションを作っただけだとか，「こんなことが起きている，あんな効果が効いている」というような「定性的な説明」をしただけでは，理論として完成したとはいえません．上記に「定性的理論」といったのは，こういうことではなく，抽象的数学の言語による表現とでもいうような意味です．

このように，現代の非線形科学の主題は，要素還元さ

れた非線形性についての「定性的理論」を探求することであるといえます．次節では，定性的理論とはどのようなものであるのか，本稿の主題である対流型非線形性の散逸系における振る舞いを例にとって紹介します．その準備として，方程式の基本形を示して本節を終えます．

NS 方程式は非圧縮な流れを考えるものなので，「渦」の運動を記述することが中心的な問題です．3 次元空間内の渦の運動方程式とは

$$\partial_t \boldsymbol{U} - \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{U}) = 0 \tag{10}$$

なる方程式です [2]．ここで $\boldsymbol{U}$ は「渦度 (vorticity)」と呼ばれるベクトル場であり，$\boldsymbol{V}$ は渦を運ぶ流れを表します．ここでは $\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0$, $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$ を仮定します．ベクトル公式を使って書き換えると

$$\partial_t \boldsymbol{U} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} \tag{11}$$

とも書けます．左辺は Lagrange 微分，右辺は「渦管の引きのばし」を与える項です．

2 次元 [(x,y) 平面とする] の場合には，渦度は (x,y) 平面に垂直な z 方向を向いたベクトルの成分と見なすことができ，擬スカラ場 U によって表されます．よって，渦管の引きのばし項は 0 となります．また，非圧縮流は，流れ関数（流れのハミルトニアン）H を使って $\boldsymbol{V} = {}^t(\partial_y H, -\partial_x H)$ という形に書くことができます．以上のことから (11) は Liouville 方程式

$$\partial_t U + \{H, U\} = 0 \tag{12}$$

に帰着します．ただし，$\{a,b\} = (\partial_p a)\cdot(\partial_q b) - (\partial_p b)\cdot(\partial_q a)$ は Poisson の括弧です．2 次元の場合，対流型非線形性はカノニカルな表現 $\{(-\Delta)^{-1}u, u\}$ の形式で書くことができるのです．

Table 1，2 に (10) および (12) の形に表される物理的な方程式の例を示します．MHD 理論の方程式も，これに含まれることがわかります．

Table 1　Examples of three-dimensional vortex dynamics equation (10). For the two-fluid equations, see reference [4].

モデル	渦度 $\boldsymbol{U}$	流れ $\boldsymbol{V}$
非圧縮理想流（流速：$\boldsymbol{v}$）	$\nabla\times\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$
電磁誘導（流速：$\boldsymbol{v}$，磁場：$\boldsymbol{B}$）	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{v}$
2 流体プラズマ	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{v}-\nabla\times\boldsymbol{B}$：電子流速
（イオン流速：$\boldsymbol{v}$，磁場：$\boldsymbol{B}$）	$\boldsymbol{B}+\nabla\times\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$

Table 2　Examples of two-dimensional vortex dynamics equation (12). For the drift wave, we show the Hasegawa-Mima equation [5-7], and for the low-beta plasma, the reduced MHD equations [6,7].

モデル	渦度 U	ハミルトニアン H
非圧縮理想流（流れ関数：φ）	$-\Delta\varphi$	φ
ドリフト波（静電ポテンシャル：ϕ）	$-\Delta\phi+\phi$	ϕ
低ベータプラズマ	$-\Delta\phi$	$\phi, \Delta\psi$
（静電ポテンシャル：ϕ，磁束関数：ψ）	ψ	ϕ

4.3　保存則で描く物理法則

逆説的に聞こえるかもしれませんが，「変化」を研究するためには「変わらないもの」を調べる，というのが物理のやりかたです．運動の過程で変化しない量，すなわち「不変量」を探すことが力学の中心的なテーマです．状態の変化（変形）に対して不変な性質という意味で「トポロジー」ということもできます．秩序ある運動を意味する「可積分」というのは，不変量を調べ上げることによって運動が完全に記述できることをいいます．もちろん，可積分であるのは特殊な場合であって，一般的には非可積分です（これを「カオス」といいます）．つまり運動を完全に決定するだけの保存則は存在しないというのが普通です．

それでも，いくつかの不変量を知ることは重要な手がかりとなります [8]．保存則は，運動の具体形を知らずに（方程式の解を具体的に計算することなく）導かれる「先験的 (a priori)」な法則だからです．これが，前節で述べた「定性的理論」の核となる概念です [7, 9]．複雑な運動を考えるとき，一つ一つの解のふるまいには依存しない，普遍的な理解が重要です．保存則（もう少し一般化すれば，保存則の破れ方についての法則）は，発展方程式そのものの構造に由来する法則であり，現象の普遍的な特徴を示すものといえるのです．

純粋な力学系（ハミルトン系）は，微視的にみれば，初期状態の情報を完全に保存しています [10]．非線形性があると，この微視的な初期データの伝播は極めて複雑になり，普遍性をもった保存則として解析的に表現することができるものは，少数の例外的な「強い保存量」のみになります．さらに，散逸を加えると，ほとんどすべてのデータの保存は破れてしまいます．しかし，なかには近似的に（場合によっては厳密に）生き残るものがあります．すなわち，保存則の「強さ」(robustness，あるい

は ruggedness という）に差異があります．例えば，多数粒子の集団では，最も堅牢な不変量は全エネルギーです．部分集団がもつ運動量などの保存は，衝突による散逸が起こると，簡単に破られてしまいます．全エネルギーのみを不変量として求められる Boltzmann 分布は，構造をもたない統計的な均一を記述するものです．これに対して，いろいろな複雑系において構造が生み出されるのは，複数の保存則が共存したり競合したりするときであると考えられます[8]．

例として，2次元流における構造形成を説明しましょう．$x-y$ 空間の $2\pi\times 2\pi$ の矩形領域に周期境界条件を与えて考えます．まず，粘性による散逸が無視できる2次元非圧縮流 $\boldsymbol{v}={}^t(\partial_y H,-\partial_x H)$ を考えます．密度は一定であると仮定し，1に規格化します．圧力を $-\nabla p$ と書くと，流体モデルの運動方程式は

$$\partial_t \boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla p=0 \tag{13}$$

となります．渦度

$$u=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}=-\varDelta H$$

に関する運動方程式は(13)の curl をとった式であり，これは H をハミルトニアンとする Liouville 方程式

$$\partial_t u+\{H,u\}=0 \tag{14}$$

になります((12)参照)．H と u は Poisson 方程式で関係づけられているので，今の場合(14)は非線形であることに注意しましょう．

(14)は偏微分方程式なので，無限次元の力学系と解釈することができます．まだ粘性散逸を入れていないので，これをハミルトン形式で表すこともできます．u をフーリエ展開して

$$u(x,y,t)=\sum_{k,\ell}\hat{u}_{k,\ell}(t)\exp i(kx+\ell y),$$

$$\hat{u}_{k,\ell}(t)=q_{k,\ell}(t)+ip_{k,\ell}(t)$$

書きます($q_{k,\ell}(t)$ と $p_{k,\ell}(t)$ は実関数とする)．H も同様にフーリエ展開し

$$H(x,y,t)=\sum_{k,\ell}\hat{H}_{k,\ell}(t)\exp i(kx+\ell y)$$

と書きます（Poisson 方程式を使えば，実は $\hat{H}_{k,\ell}=\hat{u}_{k,\ell}/(k^2+\ell^2)$）．これらを(14)に代入し，各フーリエ成分を整理すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}q_{k,\ell}\\ p_{k,\ell}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_{pk,\ell}H\\ -\partial_{pk,\ell}H\end{pmatrix}\quad(\forall k,\ell) \tag{15}$$

$$H=\mathrm{Re}\sum_{k,\ell}\sum_{k',\ell'}(\ell' k-k'\ell)\,\hat{u}_{k,\ell}\,\overline{i\hat{H}_{k',\ell'}\hat{u}_{k-k',\ell-\ell'}}$$

を得ます．この無限連立常微分方程式は，偏微分方程式(14)を関数空間（波数空間）における「無限次元ハミルトン力学系」として表現したものです．u のフーリエ係数の実部と虚部が共役な変数を与えることに注目しましょう[11]．

流体など連続体の運動を表現するには，上記のような波数空間で運動を考える方法と，もとの座標空間での運動を考える方法の2種類の方向があります．前者は，粘性散逸を考える場合，散逸が波数空間で高波数領域に局所化すると考えてよいことが大きなメリットになります．そのため，一様等方乱流などの波数スペクトルを求めるための統計的理論に多く用いられ，Kolmogorov や Kraichnan の理論があります[11]．しかし，領域の形状や境界条件の影響を考えると，正準形式の形に書くことは難しくなり，また粘性散逸を考える非平衡統計力学の理論は，まだ完成したとはいえません．一方後者は，巨視的な保存量を流れの構造との関係で議論しやすいのがメリットです．2次元の非圧縮NS方程式については，数学の立場からは理論は完成しており，これはエネルギーとエンストロフィ（後述）の保存によるものです．以下では，後者の立場にたった理論を紹介します．

4.4 散逸と構造形成

流れのエネルギーとエンストロフィは

$$E=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2,\quad W=\frac{1}{2}\|u\|^2$$

と定義される積分量です．ただし，$\|f\|^2=\int|f|^2\mathrm{d}x$ と定義しています．2次元非粘性流の方程式(13)，(14)に対して，これらはともに不変量であることが容易に示せます．

次に，粘性散逸の効果を考えて(13)の右辺に $a\varDelta\boldsymbol{v}$，(14)の右辺に $a\varDelta u$ を加えましょう($a\,(>0)$ は粘性係数を表わす定数)．すると W も E も保存されなくなり，滑らかな解に対して

$$E(t)=E(0)-a\int_0^t\|u(t')\|^2\mathrm{d}t' \tag{16}$$

$$W(t)=W(0)-a\int_0^t\|\nabla u(t')\|^2\mathrm{d}t' \tag{17}$$

を得ます．ただし $E(t)$, $W(t)$ は時刻 t におけるエネルギーとエンストロフィを表します．

NS 方程式の数学理論では，関係式(16)，(17)は解の正則性（滑らかさ）を検証するための a priori 評価として用いられ，これから解の一意的な存在を証明することができます[7,12]．その要点を物理的にいうと，非線形項（対流効果）が生み出す渦の発生率が粘性によるエンストロフィの散逸率を超えるかどうかということが問題です．２次元流では，渦管の引きのばし効果がない（つまり非線形効果が弱い）ことが幸いして，粘性散逸の方が強く働きます．このために，渦の強さが発散して微分できなくなるということが起きないことが保証できるのです．３次元の場合には，渦管の引きのばしが渦を強くする効果があって，そのために(17)に相当する関係式が，もっと弱い不等式になってしまいます．このために，一意的な解が時間無限大まで存在することが証明されていません（初期条件が滑らかであれば，一定の時間内で一意的な解が存在することは示せます）．本当に渦度の発散（特異性の生成）が起こるのか，あるいは，もっとうまい関係式を使って一意的な解の存在が証明できるのかは，極めて重要な未解決問題であり，これが解ければフィールズ賞は間違いないといわれています．

さて，２次元流の問題に戻って，エネルギーとエンストロフィの関係について，もう少し詳しく考察しましょう．渦のスケール長を L とすると，$\|\nabla u\|^2\approx L^{-2}\|u\|^2$ と評価できます．流れの非線形効果は渦を複雑化し，スケール長 L の減少を起こします．したがって W は E よりも強い減衰を受けることになります．粘性散逸の効果に対流型非線形性が作用すると，E に対して W の「選択的散逸」が起こるのです．

線形モデル（NS 方程式の対流微分を無視した Stokes 方程式）では，スケール長の減少は起こらず，E と W は同じ速さで減衰することに注意しましょう．選択的散逸は，非線形効果の成せる技なのです．

ここで，E が近似的に保存している間に W が最小値を達成したと仮定します．すると，$\boldsymbol{v}$ は λ を Lagrange 乗数とする汎関数

$$Q(\boldsymbol{v})=W(\boldsymbol{v})-\lambda E(\boldsymbol{v}) \tag{18}$$

を最小とします．$Q(\boldsymbol{v})$ の変分から

$$-\Delta\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \tag{19}$$

を得ます．すなわち，２次元流における選択的散逸は，簡単な固有値問題(19)で表される単純な構造を作り出すことがわかります．

磁化したプラズマの２次元運動（磁力線に垂直方向）や，自転する惑星上のコリオリ力を考慮した２次元流では，渦度と流れの関係を少し修正して

$$u=-\Delta H+H$$

とすればよいので（Table 1 参照），この場合にも同様な構造形成が起こると考えられます．ドリフト波乱流から帯状流が形成されることが理論的に予測され[13]，トカマクの実験で実際に観測されたことは記憶に新しいところです．

３次元の流れでは，渦管の引きのばしによって，エンストロフィの評価は困難になりますが，かわりにヘリシティが重要な役割を果たすと考えられています．ヘリシティとは，ベクトルあるいはベクトル場の「ねじれ」を表す量であり，一般的な幾何学の概念であるので，さまざまな分野で用いられます．例えば，円偏波した波に対して，振動の向きが伝播とともに回転してできる「らせん」構造を表現したり，DNA のらせん構造を定量化するためにも応用されます．ヘリシティの特徴は，空間の向きづけを反転すると符号が入れ替わることであり，このために，素粒子理論では，パリティのやぶれを表現する量として重要な意味をもちます．スピン $\boldsymbol{s}$，運動量方向の単位ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して $h=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}$ をヘリシティといい，例えばニュートリノ (ν_e,ν_μ) に対しては $h=-1/2$，反ニュートリノ $(\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\mu)$ に対しては $h=1/2$ となります．数学的には，ヘリシティは「写像度」という数学の概念と関連しています[7]．ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ に対するベクトル・ポテンシャルを $\mathrm{curl}^{-1}\boldsymbol{u}$ とするとき，

$$H=\int(\mathrm{curl}^{-1}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x$$

を $\boldsymbol{u}$ のヘリシティと呼びます（積分は $\boldsymbol{u}$ が定義された全領域についてとる）．curl の逆作用素をビオ・サヴァールの積分核 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}/(4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^3)$ を用いて書き，

$$H=\iint\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}')\times K(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'$$

と表すことができます．H はベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の流線に関する「まつわり数（リンキング係数）」を意味し，流線のトポロジーを変えない限り，$\boldsymbol{u}$ を変形しても H は変化しないことが示せます．非圧縮理想流体や理想プラズマで

は，渦度の場や磁場に関するヘリシティは運動の保存量であることが示されますが，これは流線や磁力線のトポロジーに関する制約を表しています．この保存量を用いて，流体やプラズマの構造が特徴づけられます．とくにプラズマ中の磁場のヘリシティは，磁場のねじれを定量化する基本的な量であり，これが近似的に保存することによって，プラズマ中の磁場の構造が決定されると考えられています[8,14]．

4.5　おわりに

力学系であれ生態系であれ，そのダイナミックスは発展方程式によって数理的に表現されます．もちろん発展方程式といっても，常微分方程式，偏微分方程式，確率微分方程式など，それぞれに百花繚乱ですが，これらを横断するキーワードとして「非線形」が標榜されています．非線形性こそが，多様な（複雑，劇的，あるいは奇妙な）運動を生み出す原因であると考えられるからです．

本稿で述べたのは，MHD方程式に現れる対流型非線形性についての基本的な事項です．MHDの非線形現象を「対流型非線形項$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}$」へ要素還元し，その数理の一端について考察したわけです．

対流型非線形項は$\boldsymbol{U}$の空間分布を急峻化させる効果をもちます．このエネルギー集中効果と分散効果（波束が分解する効果）がバランスするとソリトンが形成されます(第1節)．また，散逸の効果と協調すると，乱流をつくり，また構造を生み出すこともできます．第4節で述べたエンストロフィの選択的散逸は，渦のスケール長が非線形効果（ミキシング効果）によって減少し，強い粘性散逸を受けることで起こります．エネルギーは大きなスケール長をもった流れにとり残されます．一方，渦度に注目すると，大きな渦と渦との間隙に発生する乱れた小さな渦にu^2が集中し，散逸を受けます．つまり，エネルギーは大きな渦に集中して構造を形成し，逆にエンストロフィは小さな渦に集中して乱れを作っているわけです．複雑系における構造の形成は，別の物理量に注目すれば乱れの生成過程でもあります．このような「多面性」は，非線形現象に独特な特徴です．

参考文献

[1] 線形理論は，「比例法則」と「指数法則」(比例法則に基づくダイナミックス）に関する壮大な体系である．xとyとの比例法則とは$y=Ax$と表される関係である．比例法則に基づく運動方程式$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=Ax$を考えると，その解の表現として指数法則$x(t)=\exp(tA)x_0$が誘導される．ここで，$x$，$y$は数からベクトル，さらに関数へと一般化され，$A$は数の掛け算から，行列，さらには作用素へと一般化されていく．これに伴って，乗法の非可換性，非有界性，無限次元性が理論の主題になる．

[2] 吉田善章：非線形科学入門（岩波書店，1998)．

[3] このような発展をさらに外挿すると，法則自体も式で表そうとしない領域があると考えられよう．ニューロアルゴリズム，遺伝的アルゴリズムなどが，その例といえる．

[4] 吉田善章：プラズマ・核融合学会誌 **76**, 713 (2000).

[5] A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 87 (1978).

[6] K. Nishikawa and M. Wakatani, *Plasma Physics* (Springer-Verlag, 1999).

[7] 吉田善章：集団現象の数理（岩波書店，1995)．

[8] 最も少ない保存則（運動に係る知識）で描く法則が統計力学の平衡分布である．粒子の集団に対して，全エネルギーのみの保存のもとで最も確からしい状態としてBoltzmann分布が求められる．さらに，運動の過程で不変となる「トポロジー」に関係する保存則があるならば，実に多様な構造が形成されることがわかってきた．文献[4]参照．

[9] 吉田善章：数理科学 **446**, 13 (2000).

[10] Casimir不変量などのことをいう．文献[2]参照．

[11] 形式的に，この無限次元ハミルトニアン流の発散を計算すると，Liouvilleの定理が成り立つ．したがって関数空間（波数空間）の無限次元測度$\Pi_{k,\ell}\mathrm{d}q_{k,\ell}\mathrm{d}p_{k,\ell}$は不変測度を与え，これをもとにして統計理論をつくることができる；R.H. Kraichnan, Phys. Rev. **109**, 1407 (1958).

[12] R. Temam, *Navier-Stokes Equations* (North-Holland, 1984).

[13] A. Hasegawa and M. Wakatani, Phys. Rev. Lett. **59**, 1581 (1987).

[14] L. Woltjer, Proc. Nat. Acad. Sci. **44**, 489 (1958); J.B. Taylor, Rev. Mod. Phys. **58**, 741 (1986)；安積正史：本講座第2章，プラズマ・核融合学会誌 **77**, 457 (2001).