



講座

相対論的プラズマ物理学

2. 超高強度レーザー場中の荷電粒子の相対論的運動

高 部 英 明

(大阪大学レーザー核融合研究センター, 大阪大学理学研究科物理学専攻・宇宙地球学専攻)

Relativistic Motion of Charged Particles in Ultra-Intense Laser Fields

TAKABE Hideaki

Institute of Laser Engineering and Graduate School of Science, Osaka University, Suita 565-0871, Japan

(Received 4 March 2002)

Abstract

Electron motions in laser fields are analyzed in cases when the laser field is non-relativistic and when it is relativistic. The typical eight-figure motion of an electron is obtained in weak laser field plane-polarized, while no such figure motion in circular-polarized case. Starting from the Lagrangian for an electron in a plane-polarized electromagnetic wave, constants of motions and the electron orbits are analytically obtained. It is demonstrated that the electron drifts with a constant velocity in the direction of wave propagation, and that the eight-figure motion is seen in the frame moving with the drift motion. In the case of the circular-polarized wave, the electron orbit is a spiral having the drift velocity same as does the plane-polarization.

Keywords:

laser, ultra-intense laser, relativistic motion, eight-figure motion, Lagrangian, constant of motion

2.1 はじめに

プラズマ中を伝搬するレーザー光は、電磁波に対する分散関係式

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 \quad (1)$$

にしたがって伝搬する。ここで、 ω と k は電磁波の振動数と波数、 c は光速、 ω_{pe} はプラズマ振動数である。プラズマ振動数は cgs 単位系では

$$\omega_{pe}^2 = 4\pi n e^2 / m \quad (2)$$

と与えられる。ここで、 n は電子密度、 m は電子の質量である。

レーザーの電場を E とすると、集光されたレーザーはその伝播方向と垂直な方向に強度分布が不均一になることから、よく知られた非線形力、Ponderomotive force

が働き、条件によってはレーザーが自己収束 (self-focusing) したりすることはよく知られている。このような時、レーザー伝搬軸の垂直断面での強度分布とプラズマ周波数分布は Fig. 1 のようになっている。つまり、レーザーによる非線形力が

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{n} \nabla \left(\frac{|E|^2}{4\pi} \right) \quad (3)$$

であることから、この力で電子が伝搬軸の周りから排斥され、これに伴う双極電場でイオンも排斥され、結果として電子密度分布が Fig. 1 の ω_{pe}^2 ($\propto n$) 分布のようになり、力がバランスすることになる。電磁波の屈折率 N は

$$N = (1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2)^{1/2} \quad (4)$$

author's e-mail: takabe@ile.osaka-u.ac.jp

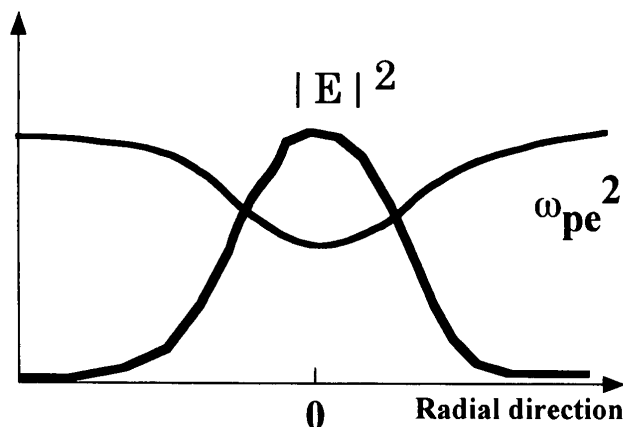


Fig. 1 Focused laser intensity profile (E^2) and the profile of the square of electron plasma frequency (ω_{pe}^2). The profile with the dip is induced by non-linear ponderomotive force or relativistic effect.

で与えられ、屈折率の径方向分布は中心が大きく、周りが小さくなる。これは光ファイバの屈折率分布と同じである。直感的に表現すれば、軸方向からわずかにずれて伝搬しようとする電磁波成分も屈折率に変化する部分で全反射を受けるため、レーザー伝搬軸内に収まって伝搬することになる。

これと似たような自己収束現象はレーザーの強度がさらに強くなり、レーザー場による電子の振動エネルギーが相対論的になった時にも見られる。この場合は、相対論的な効果により電子の質量が大きくなり、レーザーの強度が強い部分で(2)式の分母が大きくなり、結果としてプラズマ振動数分布がFig.1と同じような構造を持つことになる。このような自己収束効果を相対論的自己収束(relativistic self-focusing)と呼んでいる。詳しくは、本講座の第3章(プラズマ・核融合学会誌 Vol.78 No.5 掲載予定)を参照してください。

2.2 相対的に弱い強度のレーザー場中の電子の運動

簡単のため直線偏光したレーザー光を考えよう。伝搬方向を z 、電場を x 、磁場を y 方向にとると、ある瞬間の電場、磁場分布はFig.2のようになる。電場磁場は同位相で方向が90度ずれているだけである。したがって、電場、磁場は以下のように与えることができる

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B &= B_0 \sin(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 E_0 、 B_0 は電場、磁場の振幅である。電子に対する運動方程式は

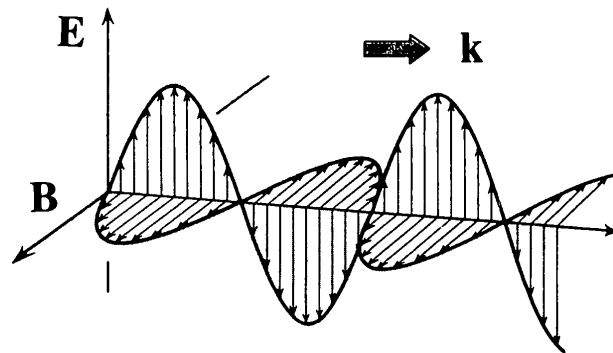


Fig. 2 Snapshot of the plane electromagnetic field propagating in the z -direction with the polarization of the electric field in the x -direction.

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (6)$$

である。ここで、 $\mathbf{u}$ は電子の速度である。今、電磁波の強度は弱いとすると、(6)式で磁場による力を無視することができ、また、振動に伴う変位もレーザー波長に比べて小さいので、左辺は時間に対する偏微分で近似できる。すると、電子は電場で x 方向に振動するだけで、その振動速度 u_{os} と振動変位 x_{os} は

$$u_{os} = \frac{-eE_0}{m\omega} \cos(kz - \omega t) \quad (7)$$

$$x_{os} = \frac{-eE_0}{m\omega^2} \sin(kz - \omega t) \quad (8)$$

と求まる。

今、レーザーが十分弱いとして近似したが、その条件が成立するのは

$$|u_{os}|/c = k|x_{os}| \ll 1 \quad (9)$$

であり、レーザーの強さを表す無次元量 a_0

$$a_0 = \frac{eE_0}{m\omega c} = \frac{|u_{os}|}{c} \quad (10)$$

を導入して、弱い条件は

$$a_0 \ll 1 \quad (11)$$

となる。

さて、(11)式の条件の下に0次の運動が(7)、(8)式のように求まった。これを用いて、1次のオーダの運動を求めてみよう。これは、0次が a_0 に対する1次の項であるのに対し、これから求める1次は a_0 の2次のオーダの運動である。これは、(6)式の磁場による力による運動であり、レーザーの伝搬方向、 z 成分の速度 u_z が以下のように求まる。

$$u_z = \frac{-eB_0}{4m\omega} a_0 \cos(2\omega t) \quad (12)$$

(7)式の x 成分と(12)式の z 成分を合成すると、 x - z 面内のFig. 3のような「8の字型」の運動が求まる。これが良く知られた“eight-figure motion”である。

電磁波に関する真空中での関係式を使うと

$$|u_x| = a_0 c, \quad |u_z| = \frac{1}{4} a_0^2 c \quad (13)$$

の関係が求まる。(10)式で定義された a_0 が十分小さい限り、細い8の字型にしかない。

今まで、直線偏光の場合について考えた。円偏光の場合の電子軌道についても若干触れておこう。よく知られているように円偏光した電磁波は電場の方向が90度異なる2つの直線偏光の電磁波の合成で作られる。そして、2つの振幅が同じ直線偏光した電磁波の位相が互いに90度前後することにより、左回りと右回りの円偏光した電磁波となる。円偏光では、電場・磁場の大きさは何処でも一定で方向が異なるだけである。

まず、0次の軌道は円運動である。この円運動の回転速度を u_c 、半径を r_c とすると(6)式で磁場の項を無視して、 $u_c = eE_0/(m\omega) = |u_{os}|$ と求まる。円軌道の半径は、式を解かずにFig. 4のように円軌道を保持するためには(遠心力) = (電場による力)の関係から $r_c = a_0/k$ と求まる。ここで、 k は $k = \omega/c$ であり、これを入れると、 r_c は(8)式の x_{os} と同じ大きさになることがわかる。

次に、1次の運動であるが、0次の運動がFig. 4のように電場に常に垂直であり、磁場に平衡になることから(6)式右辺第2項は消えてしまうことがわかる。つまり、この計算の範囲では電子は単に円運動するだけで、直線偏光の場合のような「8の字」運動をしない。第2.4節で、相対論的に正しく計算すると、電子の軌道は円運動を描きながら、伝播方向にらせん状にドリフトしていくことがわかる。

2.3 相対論的な強度のレーザー場中での電子の運動 (1:準備)

(10)式で定義した a_0 が1に近づくと電子の運動は相対論的となる。したがって、(6)式に代わる相対論的な運動方程式を解く必要がある。理想的な平面波中の電子の相対論的運動は以下に示すように解析的に求めることができる。その準備のために相対論的力学の復習から出発しよう。

まず、定義から。ローレンツ因子を γ とすると、電子の運動量 p 、全エネルギー(運動エネルギー+ポテンシ

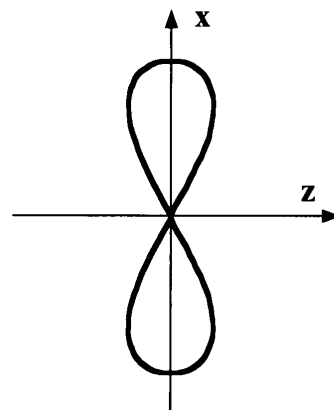


Fig. 3 The “8-figure motion” of the electron orbit in the plane-polarized laser field. The width in the z -direction increases with the increase of laser intensity.

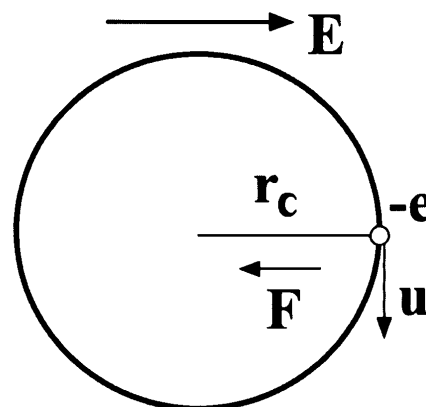


Fig. 4 The electron orbit in the circular-polarized laser field. The electron motion is circle and the electric field is perpendicular to the velocity of the electron. As the result, magnetic field is parallel to the velocity of the electron and no force due to magnetic field works on the electron. F is the force by the electric field and u is the velocity of the electron.

ルエネルギー) E_{tot} 、運動エネルギー E_{kin} は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (14)$$

$$p = \gamma m v \quad (15)$$

$$E_{\text{tot}} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = \gamma m c^2 \quad (16)$$

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{tot}} - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2 \quad (\approx \frac{1}{2} m v^2 \text{ for } \gamma \approx 1) \quad (17)$$

である。次に、電磁場中の電子に対する Lagrangian, L は、例えば、文献[1]より、ベクトルポテンシャル A 、スカラーポテンシャル ϕ として、

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e/c A v - e \phi \quad (18)$$

である。Euler-Lagrange 方程式より、運動方程式として以下の式を得る。

$$\frac{d\mathbf{P}^{\text{can}}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (19)$$

ここで、以下の関係を使った。

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (21)$$

また、(19)式の一般化運動量 $\mathbf{P}^{\text{can}}$ は

$$\mathbf{P}^{\text{can}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \gamma m \mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (22)$$

のような関係にある。

さて、運動の保存量を探してみよう。(18)式の Lagrangian が伝播方向に垂直な座標成分を含まないことから、Euler-Lagrange 方程式より

$$\frac{\partial L}{\partial v_{\perp}} = p_{\perp} - \frac{e}{c} \mathbf{A} = 0 \quad (23)$$

と求まる。ここで、レーザーが来る前の初期 ($t=0$) に $\mathbf{A}$, $p_{\perp}=0$ であったとして積分定数を求めた。次に、電子の Hamiltonian, H を求めよう[1]。

$$H = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \gamma m c^2 - e\phi = E_{\text{tot}} \quad (24)$$

これは電子の全エネルギー E_{tot} に相当する。ただし、電磁波に対して $\phi=0$ と取ることができることに注意。次に、関係式

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (25)$$

より、 z 方向に伝播する電磁波の場の中での電子に対し

$$E_{\text{tot}} - cp_z = mc^2 \quad (26)$$

の保存式が成り立つことがわかる。ここで、積分定数を求める際、上と同じく、初期条件として電磁場もなく静止した電子の状態を考えた。

式(17)の電子の運動エネルギーは(16)式の p に(26)の関係を代入し、式を変形していくことにより

$$E_{\text{kin}} = \frac{p_{\perp}^2}{2m} = p_z c \quad (27)$$

と求まる。ここで、第2の関係は(26)式より求めた。(17), (27)式の関係より伝播方向に垂直な運動と伝播方向の運動の間に

$$|p_z/p_{\perp}|^2 = \frac{1}{2}(\gamma-1) \quad (28)$$

の簡単な関係があることがわかる。この関係は非相対論の場合には、(13)式より計算される $(u_z/u_x)^2$ に一致することは容易に確かめることができる。

2.4 相対論的な強度のレーザー場中での電子の運動 (2: 解析解)

Fig.2のような電磁場になるようにしようとする、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は x 方向成分のみを持つと考えればよい。そこで、

$$A_x = A_0 \cos(kz - \omega t) \quad (29)$$

とする。次に、無次元変数 $a(z, t)$ を導入する

$$a(z, t) = \frac{eA_x(z, t)}{mc^2} \quad (30)$$

すると、(23)式より

$$\frac{p_x}{mc} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx}{dt} = a \quad (31)$$

(31)式を(27)式に代入して

$$\frac{p_z}{mc} = \frac{\gamma}{c} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}a^2 \quad (32)$$

また、(31), (32)式を(16)式に代入して

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}a^2 \quad (33)$$

を得る。

ここに、時刻 t における電子の z 座標を用いて定義される新たな時間 τ

$$\tau = t - z(t)/c \quad (34)$$

を導入し、(31), (32)式を τ に対する方程式に変換すると、(31), (32)式を簡単に積分することができる[2]。その結果、電子の x, z 面内の運動は

$$z(t) = \frac{1}{4}ca_0^2[\tau + \sin(2\omega\tau)/(2\omega)] \quad (35)$$

$$x(t) = \frac{ca_0}{\omega} \sin(\omega\tau) \quad (36)$$

と求まる。ここで a_0 は (30) 式の a の振幅であり、(10) 式の a_0 に一致する。

(34) 式の z に (35) 式を代入し、その (34) 式を (35) 式の第 1 項に代入することにより、電子が電磁波の伝播方向に速度

$$V_d = \frac{a_0^2}{a_0^2 + 4} c \quad (37)$$

でドリフトしていることがわかる。また、(35) 式の第 2 項と (36) 式より電子が V_d で進む系で「8 の字」運動をすることがわかる。(35)、(36) 式から求まる「8 の字」運動の振幅は速度にして (13) 式に一致することは簡単に確かめることができる。2.2 節で求めた近似解とは異なり、実際の運動は (37) 式のドリフト速度の系に乗っての「8 の字」運動であることに注意しよう。

具体的に、 $a_0 = 0.01$ の非相対論的な場合と $a_0 = 10$ の相対論的な場合の振動の様子を Fig. 5 に示した。(35)、(36) 式から明らかであるが、実験室系でみた電子の運動は「8 の字」のイメージとは程遠く、伝播方向に単調に前進していることに注意しよう。

波長に比べ充分長いパルスのレーザーが入射した時、電子は上に見たような運動をするが、レーザー通過後、電子は静止する。その間、電子はドリフトの結果、移動する。プラズマ物理的には、その結果、静電場が発生し、それで電子が加速されることなどが起こりそうである。実際には、このようなことはレーザーと相互作用している途中で起こる。電子は振動中には (33) 式のローレンツ因子を持っており、例えば、非断熱的に電子がレーザー電場の系外に逃げ出したとすると、粗く言って

$$E_{\text{kin}} = a_0^2 mc^2 \quad (38)$$

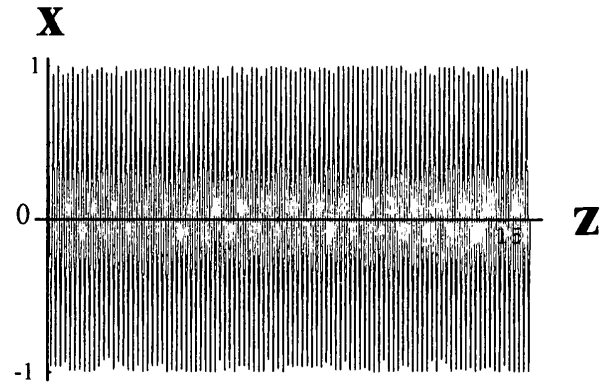
程度の運動エネルギーをもらって考えてよい。

さて、円偏光の場合の解析解も示しておこう。この場合も同様な手続きで運動方程式を積分することができ、その解は [2]

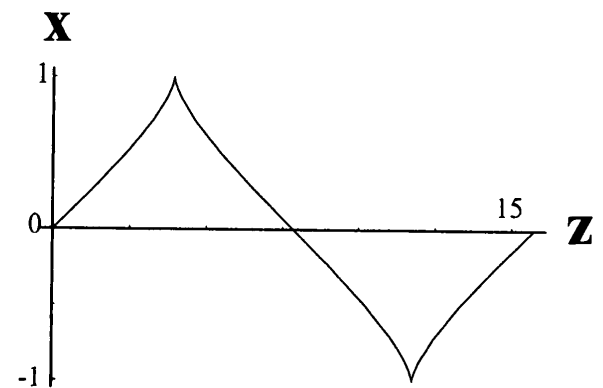
$$z(t) = \frac{a_0^2}{a_0^2 + 2} ct \quad (39)$$

$$x(t) = \frac{c}{\omega} a_0 \sin(\omega t / \gamma) \quad (40)$$

$$y(t) = \pm \frac{c}{\omega} a_0 \cos(\omega t / \gamma) \quad (41)$$



(a) [$a_0=0.1$]



(b) [$a_0=10$]

Fig. 5 Electron orbits in (a) non-relativistic [$a_0 = 0.1$] and (b) relativistic [$a_0 = 10$] cases. The figures are plotted with Eqs. (35) and (36). The amplitudes are normalized by ca_0/ω . It should be noted that no 8-figure motion is seen in the laboratory frame.

円偏光の場合は螺旋運動となる。ここで、 $+$ は左回り、 $-$ は右回り円偏光である。ドリフト速度は直線偏光の時の振幅 a_0 が $\sqrt{2}a_0$ とした時と同じであるが、回転速度が相対論的な時間の遅れにより $\gamma (= 1 + \frac{1}{2}a_0^2)$ 倍だけ遅くなっていることに注意。

(40)、(41) 式の振動数が γ 倍だけ低くなっているのは、別の味方をすれば簡単に理解できる。電子は (39) 式のように z 方向に一定速度で移動しており、その系から電磁波の振動数は $\omega' = \omega(1 - V_d/c)$ とドップラー効果のために振動数が変化する。(39) 式のドリフト速度を代入してこの振動数を計算すると ω/γ となる。

最後に、進行波に反射波などが混在する場合について触れておこう。たとえば、予備生成された低密度プラズマ中に入射した超高強度レーザーが固体表面で反射されて、この低密度プラズマ中に一部反射してきたような場合を考える。この場合、まず、入射波だけの場合、伝播方向 z の運動は正準変換することにより運動の恒量を持

ち保存形となることが示される[3]。ところが、入射波による電子の運動が相対論的である場合、正準変換された位相空間での運動の非線型が強くなり、ここに、第二の波が加わると運動はカオス的になることが文献[3]に指摘されている。著者等はこのようなカオス的な電子の振る舞いが、超高エネルギーの高速電子成分の生成に関与していると主張している。相対論的電子への加速機構については第3, 4章で簡単に触れるが、プラズマ性をまったく考慮にしないで、2つの平面電磁場中での電子の z 方向（レーザー伝播軸方向）の運動自体がカオス

となり「電磁波」からエネルギーを「直接」もらって加速されるという考え方は大変おもしろい。

参考文献

- [1] ランダウ・リフシッツ：場の古典論(原書第6版)(東京図書, 1978) 第3章の(16.4)式と(16.6)式.
- [2] J. Meyer-ter-Vehn, A. Pukov and Zh.-M. Sheng, Lecture note "Relativistic Laser Plasma Interaction", unpublished (2001).
- [3] 田口俊弘, 三間国興：プラズマ・核融合学会誌 77, 1212 (2001).



たか べ ひで あき
高 部 英 明

大阪大学・レーザー核融合研究センター・複雑系シミュレーション領域・教授。理学研究科協力講座教授。APSフェロー。80年、阪大工電気博士修了。97年より現職。主な研究分野はプラズマ物理、流体物理、宇宙物理、計算科学。最近ではレーザーを用いた宇宙物理や核物理など高強度レーザーが可能にする極限物理を探索中。趣味は読書や物書き。将来、核融合研究の歴史を書いてみたい。家族は妻と息子（大学生）、娘（高校生）。