講座 微視的乱流シミュレーション

3. 微視的乱流のVlasovシミュレーション

渡邉智彦
（核融合科学研究所／総合研究大学院大学）

Vlasov Simulation of the Microturbulence

WATANABE Tomo-Hiko
National Institute for Fusion Science / The Graduate University for Advanced Studies (Sokendai), Toki, Gifu 509-5292, Japan

(Received 19 August 2005)

Basic concepts of Vlasov (or Eulerian) simulation methods for the plasma microturbulence are reviewed in focus on the symplectic properties of the collisionless kinetic equations. Importance of the phase mixing is emphasized not only in kinetic simulations of turbulent transport but also in construction of fluid closure models. The state of the art of the gyrokinetic simulation codes based on the Eulerian approaches is also introduced.

Keywords:
gyrokinetics, computer simulation, turbulence, transport

3.1 はじめに

3.1.1 これまでの経緯と本章の構成

磁場閉じ込め核融合プラズマにおける微視的乱流輸送の解析にジャイロ運動論が有効であり，その非線形挙動を調べるために計算機シミュレーションを用いた研究が活発に進められている現状について本講座の第1章で概観した．さらに，粒子（マーカー）の軌道に沿って分布関数の摂動部分を計算することでジャイロ運動論的方程式を解くLagrange的解法，いわゆるδf法について前章で詳しく述べられた．本章では，位相空間を格子点などで離散化し，その上で分布関数の時間発展を追跡するEuler型解法を用いたシミュレーション（習慣的にVlasovシミュレーションと呼ばれる．また，最近は"continuum gyrokinetic"と称される場合もある．）について解説する．

位相空間中の粒子の1体速度分布関数を連続体として取り扱い，その時間発展を求めるシミュレーションは，基本的には広く行われている流体シミュレーションと共通の手法を適用することができる．周知のように流体シミュレーション手法は，非常にバラエティに富んでおり，それらの表層を本稿で概説するよりは，多くの優れた教科書（手近なものとして文献[1]がある）を参照される方がより有用であろう．そこで，ここではプラズマの運動論的方程式に特有の問題に焦点を当てたい．本章ではじめに解説されるsplitting法は，現在行われているトロイダル配位での微視的プラズマ乱流輸送のシミュレーションにおいて，（現時点ではまだ）直接応用されてはいない．しかし，この手法はVlasovシミュレーションの基礎として重要であり，前節で議論されたδf法と同様に運動論的方程式の性質と密接に関連していることから，ここで取り扱う意義があろうと思われる．そこを出発点として，semi-Lagrangian法や，移流項を陽的に評価する（狭い意味での）Euler型解法へと進む統一的な説明を試みたい．

まず，次小節で運動論的方程式のEuler型解法における基本的な考え方を述べた後，第3.2節でVlasov-Poisson系に対して従来より用いられてきたsplitting法について解説する．第3.3節では，ジャイロ運動論への拡張に際し留意すべき点を論じる．特に，splitting法をドリフトまたはジャイロ運動論的方程式系へと一般化する試みや，そこから派生するEuler型解法，さらに実際のトロイダルプラズマ乱流のシミュレーションで用いられている手法の一例について述べる．第3.4節では，運動論的方程式のEuler型シミュレーションでは避けて通れない，粒子運動にともなう分布関数の微細揺動生成の問題に触れ，さらに流体方程式の完結モデルとの関連について論じる．本稿を通じて，シミュレーション手法が運動論的方程式の持つ性質と密接に関連し得ることを感じ取っていただけるとありがたい．

3.1.2 基本となる考え方

ここでは，次節以降への準備として，比較的簡単なVlasov-Poisson系，

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} f\mathrm{d}v-1, \tag{2}$$

を例に，運動論的方程式のEuler型解法についての基本的な考え方を整理しておこう．ここで，fは無次元化された電

author's e-mail: watanabe.tomohiko@nifs.ac.jp

J. Plasma Fusion Res. Vol.81, No.9 (2005) 686-697

子の速度分布関数，ϕ は静電ポテンシャルを表す．素電荷，電子質量，平均密度をそれぞれ無次元化の単位として，1にとる．また，イオンは一様な密度分布に固定されているものとする．分布関数 f は，位置 x と速度 v についてのなめらかな関数であり，与えられた境界条件の下で，式(1)にしたがって初期条件 $f(x,v,t=0)$ からの時間発展を数値的（近似的）に求めることが課題となる．以下では，そのための基本的な手法を考えてみよう．

分布関数を位相空間における連続体として扱う Euler 型解法とはいっても，数値シミュレーションでは，分布関数を離散化しなくてはならない[1]．離散化には，とびとびの時間間隔で値を求める時間方向の離散化と，空間についての離散化がある．後者はさらに，格子点を用いて離散的な空間位置で値を評価するやり方や，有限項の関数展開を用いて近似する方法がよく使われる．具体的には，実空間において格子幅 Δx の空間格子を用いて分布関数を，$f_\ell(v,t)=f(\ell\Delta x,v,t)$ と表したり（ここで ℓ は整数），または，周期境界条件の下で Fourier 級数展開を施して波数 k 空間において離散化することもある．

ところが，速度空間については $(-\infty,+\infty)$ が定義域となっている[2]．そこで，分布関数を重み $\exp(-v^2/2)$ を加えた Hermite 関数展開により近似することが考えられるが，この方法は，粒子運動によって作り出される分布関数の微細構造（後述する ballistic モード）に対しては収束性が悪く，あまり用いられていない．実際は，例えば Maxwell 分布に近ければ熱速度の10倍程度の高エネルギー粒子はほとんど存在しないので，ある値の速度空間までを扱い，その外側では $f=0$ としても十分に良い近似となる[3]．つまり，ごく単純に $[-v_{\max},v_{\max}]$ の領域を格子 v_m（m は整数）を用いて離散化する．ここで，$v_{\max}$ は，$f(x,v=\pm v_{\max},t)\approx 0$ と近似できる程，十分に大きな速度とする．格子幅 Δv が一定の場合は，$v_m=m\Delta v$ となる．こうして，分布関数は，例えば $f_{\ell,m}(t)=f(\ell\Delta x,m\Delta v,t)$ のように離散化される[4]．

位相空間における離散化により，式(1)は，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\ell,m}=-v_m\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\ell,m}-\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\ell}\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\ell,m}, \qquad (3)$$

の様に書き表される．よりシンボリックには，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\,|_{\ell,m}=F(f)|_{\ell,m}, \qquad (4)$$

として表され，時間 t についての連立常微分方程式となる．ここで，$\cdots|_{\ell,m}$ は格子点 (ℓ,m) で評価された値であることを意味する．また，式(2)も以下のように離散的に表現される．

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{\ell}=\sum_m f_{\ell,m}\Delta v-1. \qquad (5)$$

空間微分を差分で近似する場合，(5)式については，帯行列が与える連立一次方程式を解けばよい．行列のサイズや必要な精度に応じて，LU 分解や SOR 法，共役勾配法，多重格子法などが有効である[5]．離散化された Vlasov 方程式(3)の解法には，通常の中性流体についてのシミュレーション手法と共通の方法を適用することができる．例えば，空間微分を差分近似で置き換え，または，Fourier 級数展開されている場合は ik を乗ずると（ここで i は虚数単位），式(3)に Runge-Kutta 法などの常微分方程式の数値解法を用いることができる．この際に時間方向にも離散化が導入され，データは各時間ステップ毎に定義される．また，非粘性の流体方程式（Euler 方程式）に対する種々のシミュレーション手法も有効であろう．ここで議論した考え方は，ジャイロ運動論的方程式にももちろん適用可能である．その実例について**3.3**節の終わりで紹介しよう．

上述のシミュレーション手法は，位相空間格子上で（Euler 表記された）移流項を評価し，その値を用いて時間積分を行う Euler 型解法である．一方，伝統的な Vlasov シミュレーションにおいては，本講座の第1章でも触れた splitting 法が広く用いられてきた．この手法は，Vlasov 方程式の性質を積極的に利用した解法であり，前章で述べられた δf 法と対比すると興味深い．そこで，次節では splitting 法についてまず紹介し，さらにそこで導入される粒子軌道に沿った分布関数の写像という観点からいくつかのシミュレーション手法を統一的に理解できるように，semi-Lagrangian 法についてその後で触れることにしよう[6]．さらにこのような考え方から，移流項を陽に評価するタイプの Euler 型解法の一つを導出し，次に上の段落で述べたより一般的な Euler 型解法へと繋げる．

3.2 Vlasov-Poisson 系のシミュレーション手法

3.2.1 Splitting 法

以下では Cheng と Knorr[3] により提案された splitting 法について議論しよう．ここでは，一定の時間刻み幅 Δt を用いることにする．そして，$f^n(x,v)\equiv f(x,v,t^n=n\Delta t)$ と定義しよう．式(1)において，f の x 微分に掛かる係数は v のみに，v 微分に掛かる係数は x のみに依存することに留意し，次のような3ステップに分割された時間積分法が考案された．

[1] もともと離散的であった粒子分布を連続体として分布関数で表し，それをまた数値解法のために離散化するのは，なんとも歯がゆいところである．

[2] 相対論的な場合は，運動量を独立変数に取るのが良いであろうから，その場合もやはり $(-\infty,+\infty)$ の領域を扱うことになる．

[3] $\exp(-10^2/2)\approx 2\times 10^{-22}$ である．もちろん，高エネルギー粒子の振る舞いが本質的となる現象を扱う場合は，それらが存在する速度領域を覆うに十分な上限値を取る必要がある．

[4] これは2次元空間を升目状（またはそれとトポロジー的に同じもの）に分割する構造格子を用いた場合であり，非構造格子を使う場合は異なる表現となる．以下では，構造格子を前提として議論する．

[5] これらの数値解法については，文献[2]をはじめ多くの参考書がある．

[6] 本講座では，これらの方法も，粒子やマーカーを用いた Lagrange 解法と対比するために，広い意味で Euler 型解法に分類している．

$$\begin{cases} f^{*}(x,v)=f^{n}(x-v\Delta t/2, v) \\ f^{**}(x,v)=f^{*}(x, v-\Delta t\partial\phi/\partial x) \\ f^{n+1}(x,v)=f^{**}(x-v\Delta t/2, v) \end{cases} \quad . \qquad (6)$$

ここでは，Vlasov 方程式が粒子軌道に沿った f の移流方程式（$Df/Dt=0$）であることに着目して，分布関数 f についての写像を用いてシミュレーション・スキームが構成されている（Fig. 1 参照）．このため位相空間における微分項を，差分近似などを用いて陽に評価する必要がなく，簡便な手法である．しかし上で述べたように位相空間は格子点などにより離散化されているので，式（6）の右辺を評価するためには，格子点 (i,j) で与えられた f の値を内挿する必要がある．そのための手法としては，3 次スプライン補間や Fourier 展開など様々な方法が試みられている[4-14]．しかしそのほとんどが，時間積分には（6）式のアイデアを用いている．

ここで興味深い点は，式（6）の各ステップにおける f についての写像は，PIC（particle-in-cell）シミュレーションでよく使われる leap-frog 法

$$\begin{cases} v^{n+1/2}=v^{n-1/2}+\Delta t(\partial\phi/\partial x)^{n} \\ x^{n+1}=x^{n}+\Delta t v^{n+1/2} \end{cases} \quad , \qquad (7)$$

と等価な時間積分法

$$\begin{cases} x^{n+1/2}=x^{n}+(\Delta t/2)v^{n} \\ v^{n+1}=v^{n}+\Delta t(\partial\phi/\partial x)^{n+1/2} \\ x^{n+1}=x^{n+1/2}+(\Delta t/2)v^{n+1} \end{cases} \quad , \qquad (8)$$

により作られていることである．この意味するところについては，**3. 2. 3**節で改めて述べることにしよう．

この手法の利点の一つは，移流項 $[v(\partial f/\partial x)]$ を差分近似などにより陽に評価する場合に比べて，時間ステップ幅を大きく取れることである．例として，簡単な移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-c\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (9)$$

を考えてみよう．ここで，移流速度 c は定数とする．空間微分に差分法などを用い，かつ陽的な時間積分法を採用する場合，いわゆる Courant 数 $\sigma=c\Delta t/\Delta x$ を，$\sigma<1$ の程度にしないと，一般に数値不安定性が成長しシミュレーションを行うことができない[1][7]．この条件を，Courant-Friedrich-Levy（CFL）条件と呼ぶ．一方，式（6）に習って，

$$f^{n+1}(x)=f^{n}(x-c\Delta t), \qquad (10)$$

として，移流方程式を数値的に解くことを考えると，これは式（9）の一般解 $f(x,t)=f(x-ct, t=0)$ の時間についての離散化表現であり，$f^{n}(x-c\Delta t)$ を評価する際の内挿が十分な精度で与えられるとすれば，任意の Δt に対して中立安定な解法であることがわかる．もちろん，Vlasov-Poisson 系への適用に際しては，プラズマ振動を十分に分解できる程度に Δt を小さくする必要がある．それでも，その条件は，$\Delta t<\omega_{\mathrm{p}}^{-1}$ 程度であり，格子幅を Debye 長（λ_{D}）程度に取った場合のCFL条件，$\Delta t<\Delta x/v_{\max}\sim(v_{\mathrm{t}}/v_{\max})\omega_{\mathrm{p}}^{-1}$，よりも緩やかになる．ここで，プラズマ振動数を $\omega_{\mathrm{p}}=v_{\mathrm{t}}/\lambda_{\mathrm{D}}$，熱速度を v_{t} とした．このように，splitting 法は，移流項を陽に評価する場合に比べ，時間ステップ幅を大きく取れるが，磁場閉じ込めプラズマにおける微視的乱流シミュレーションでは，このことはそれほど大きな利点とはならない．これはドリフト波のように，波数ベクトルの磁力線に平行方向と垂直方向の成分の比が微小量（$k_{\parallel}/k_{\perp}$）となる場合には[8]，$v_{\max}$ を熱速度の数倍程度に取っている限り，磁力線に平行方向の粒子運動にともなう移流項は，CFL 条件にそれほど強く影響を及ぼさなくなるからである．それでも，次節で見ていくように，splitting 法は運動論的方程式の数値解法を考えるための基礎としても重要である．

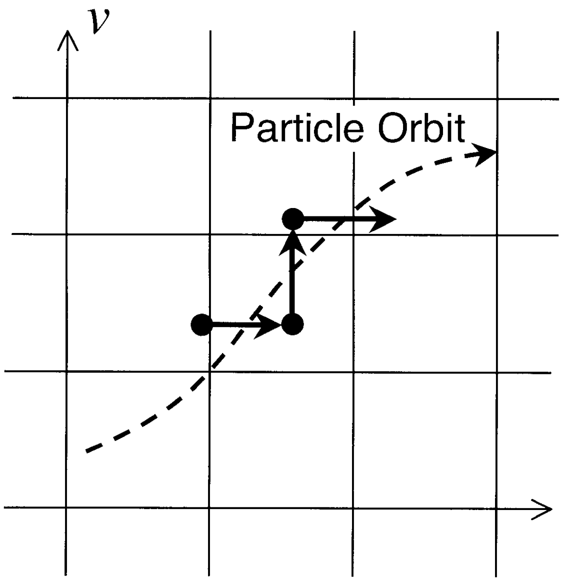

Fig. 1 A schematic picture of mappings in the splitting scheme. Horizontal and vertical arrows show each step given in Eq.(6).

3. 2. 2 Vlasov-Poisson 系のシミュレーション例

Euler 型解法による運動論的シミュレーションのイメージを掴んでもらうために，ここで splitting 法を用いた Vlasov-Poisson 系のシミュレーション例を紹介しよう．Vlasov シミュレーション・コードのベンチマーク問題としてよく扱われる，非線形Landau減衰を考える．実空間座標 x 方向の系の長さを $4\pi\lambda_{\mathrm{D}}$ とし，周期境界条件を課す．速度空間は，$v_{\max}=10v_{t}$ として $[-v_{\max}, +v_{\max}]$ の範囲のみを扱う．初期条件は，$f(x,v;t=0)=F_{\mathrm{M}}(v)(1-A\cos kx)$，として，$A=0.5$ および $k=0.5\lambda_{\mathrm{D}}^{-1}$ とする．ここで，

[7] 数値安定性のしきい値は，個々のスキームによって異なるが，$\sigma<1$ は良い目安を与える．また，拡散項がある場合は，それにより安定性の条件が決められる場合もある．特に衝突項を導入する場合，速度空間の解像度が問題となり，安定性の条件は $\sigma=2\nu\Delta t/\Delta v^{2}<1$ と見積もられる（ν は衝突周波数）．一方，大振幅波動にともなう電場により大きな加速度が生じる場合は，$\Delta t<|\Delta v/(\partial\phi/\partial x)|$ が数値安定性を決める場合もあり得る．

[8] 第 1 章で述べたように，これはジャイロ運動論オーダリングの一部であることを思い出そう．

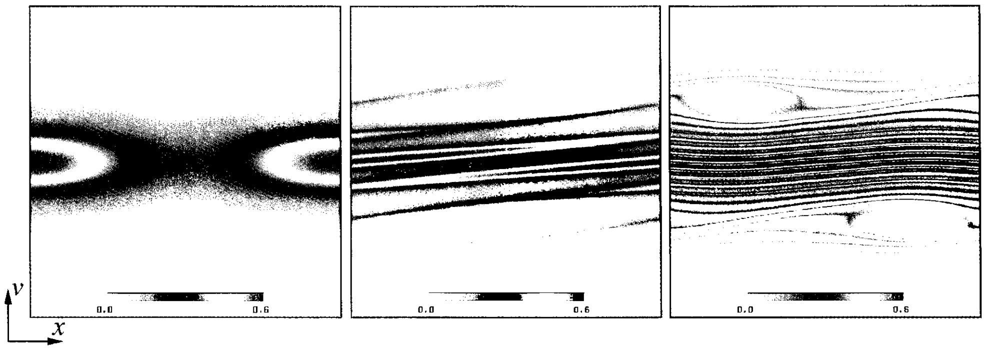

Fig. 2　Contour maps of the distribution function in the phase space obtained by a Vlasov (Eulerian) simulation of the nonlinear Landau damping at $t = 0$, 10, and 40 $\omega_{\rm pe}^{-1}$ (from the left to right).

$F_{\rm M}(v)$ はMaxwell分布，$F_{\rm M}(v)=\exp(-v^2/2v_{\rm t}^2)/\sqrt{2\pi}v_{\rm t}$，を表す．格子点は，$x$ 方向64点，v 方向512点を用いている．また，格子点間のデータの内挿には，Fourier 展開を採用した．これは最も精度の高い内挿法の一つであるが，逆にそのために，時間の経過とともに解像度が不足してくると，以下に見るように計算の「あら」が目立ってくる．

シミュレーションを開始すると，粒子の持つ速度差により分布関数が大きく変形し，位相混合によって密度や電場揺動は無衝突減衰を受ける．その後，共鳴速度近傍で粒子捕捉が起きはじめる．この時の分布関数の様相をFig. 2にカラー図で表示している．横軸は x 座標，縦軸は v 座標を示し，v 方向には $[-v_{\max}, +v_{\max}]$ の一部の範囲のみを図示している．まず，粒子運動（しばしばballisticと形容される）により分布関数が引きのばされ，その後，波による軌道変化を受けて折り畳まれ，粒子捕捉が起き始める様子が見て取れる．しかし，図をよく見ると，$t=40\omega_{\rm p}^{-1}$ になると，特に速度空間方向に短波長の振動が目立ち，初期分布のなめらかさが徐々に劣化していく．これは，粒子運動にともなって分布関数の微細構造（ballistic モード）が継続的に作り出される一方，シミュレーションの解像度は有限であるためである．格子サイズの振動を避けるにはより高い解像度のシミュレーションを行うか，人工的な散逸を導入するしかない．後者の場合は，計算結果の見かけはきれいになっても，Vlasov 方程式が本来持つ対称性や保存則などを破る恐れがあるので注意が必要である．この位相混合の問題については，第**3. 4**節でより詳しく見ていくことにしよう．

3. 2. 3　分布関数の写像とシンプレクティック積分法

運動論的方程式の Vlasov（この講座では，Euler 型と呼んでいる）シミュレーション解法を，古典力学との関連を意識しつつ統一的に理解するという観点から，この節ではもう少し踏み込んで splitting 法について考察してみよう．Vlasov-Poisson 系では，1粒子のハミルトニアンは，$H=mv^2/2+q\phi(x)$ で与えられた．そのため，Vlasov方程式の $\partial f/\partial x$ の係数は v のみであり，$\partial f/\partial v$ には x のみに依存する電場が掛かっている．これは，H が，$H(x,v)=T(v)+V(x)$ に分離できることに対応している．すなわち，$V(x)=0$ や $T(v)=0$ の場合の粒子軌道は，それぞれ $v=$ const.，$x=$ const. の「等速度運動」を表すことになる．その軌道はそれぞれ，x 軸および v 軸に平行である．この個々の「等速度運動」の軌道にそって分布関数 f が運ばれていくことを表したのが，まさに(6)式なのである (Fig. 1 参照)．(6)式の各ステップの時間幅とその順序は，この手法が2次精度を保つように工夫されている[9]．

周知のように，「等速度運動」は，正準方程式の解の一つであり，その時間発展は正準変換を与える[15]．また，正準変換を重ねて作用させても，全体として正準変換が構成できる．つまり，leap-frog 積分法は，本来のハミルトニアンとはわずかに異なるハミルトニアンにより与えられる正準変換（より一般的には，シンプレクティック変換とも呼ばれる）として理解される．このようにして構成されている運動方程式の時間積分法は，シンプレクティック積分法と呼ばれ，1990年代以降，Hamilton 力学系の分野からはじまり，現在では幅広い分野で応用されている[16]．実は，上述の leap-frog 法または式(8)は，2次の陽的シンプレクティック積分法であり，4次精度への拡張が1980年代の終わりに考案された[17]．その手法は，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和のように分離できるハミルトニアンに対して一般化され，さらに高次精度の積分法が考案されている[18]．結局，**3. 2. 2**節で述べた splitting 法では，2次の陽的シンプレクティック積分法(leap-frog 法)で生成された分布関数の写像により，Vlasov 方程式の時間積分を行っていると見なすことができる．こうした観点に基づくと，Vlasov 方程式に対する時間積分法のより高次精度への拡張を簡単に構成できる．高次のシンプレクティック積分法により作られる分布関数の写像を用いて，一般化された splitting 法が提案された[19]．さらに4次や6次精度のスキームがシミュレーション・コードとして実装され，その有効性が検証されている[20]．

3. 3　ドリフトまたはジャイロ運動論への拡張

3. 3. 1　時間積分法における問題

第1章で見たように，ジャイロ運動論的方程式は，Vlasov 方程式に比べるとずっと複雑であるが，形式的には1粒子運動のハミルトニアンと Poisson 括弧を用いて，$\partial_t f-\{f,H\}=0$ と表される．ならば，その数値解法にも共通した手法が適用できるだろうか．

移流項を陽に評価する（狭い意味での）Euler 型解法の場

[9] これは，leap-frog 法が時間に関して2次中心差分となっていることに相当する．

合，Vlasov 方程式であれ，ジャイロ運動論的方程式であれ，その手法に本質的な違いはない．もちろん，より多くの位相空間次元を扱うのでコードもその分複雑になるし，その最適化にもより多くの労力を要するとともに，計算規模も飛躍的に増加する．しかしこの場合でも，スキームの本質は，(3)式に適用する場合と共通である．一方で，Vlasov方程式に対して強力なツールであったsplitting法がどのように拡張され得るかを考えるのも興味深い．よって，以下ではまず，この点について考察してみよう．

Vlasov 方程式に対して splitting 法が有効であったのは，分解された各ステップが「等速度運動」に対応しており，それらにより生成される写像の組み合わせで時間積分法が構成されているからであった．こうして考えてみると，粒子のドリフト運動を扱う場合にはもう少し工夫が必要となることが分かる．例として，一様磁場 $\boldsymbol{B}$ 中でのドリフト運動論的方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\,\nabla_{\|}f-\frac{c}{B}(\nabla\phi\times\boldsymbol{b})\cdot\nabla f-\frac{q}{m}\nabla_{\|}\phi\frac{\partial f}{\partial v_{\|}}=0, \tag{11}$$

を考えよう．ここで，$\boldsymbol{b}$ は磁場方向の単位ベクトルとし，c，q，m はそれぞれ光速度，電荷，そして，質量を表す．磁力線方向に ϕ，f が一様と仮定すると，式(11)はさらに簡単になり，磁場に垂直方向の座標成分 x，y を用いて，

$$\partial_t f+\frac{c}{B}(\partial_y f\,\partial_x\phi-\partial_x f\,\partial_y\phi)=0, \tag{12}$$

と表される．このように，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト運動が，互いに共役な座標 (x,y) を用いて正準形式，

$$\begin{cases}\dot{x}=-c\partial_y\phi/B\\ \dot{y}=c\partial_x\phi/B\end{cases} \tag{13}$$

で表現され，かつ，式(12)が $\partial_t f+\{f,H\}=0$ として Vlasov 方程式と同型を保つことが容易に見て取れる．ここで，

$$\{f,H\}=-\frac{c}{qB}\boldsymbol{b}\cdot\nabla f\times\nabla H, \tag{14}$$

であり，1粒子運動のハミルトニアンは $H=q\phi(x,y)$ で与えられる．比較のために，第2章(33)式で与えられたジャイロ運動論的方程式におけるより一般的な Poisson 括弧式を思い出して欲しい．

Poisson 括弧を用いて表されたドリフトまたはジャイロ運動論的方程式を見ると，Vlasov 方程式に対して有効であった splitting 法がそのまま適用できるかのように思える．しかし一般には，粒子のドリフト運動を扱う場合には，ハミルトニアンを共役な座標成分の内の一つのみに依存する関数の和に分解することはできない．例えば $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトの場合には，ハミルトニアンの一部を与える $q\phi(x,y)$ は，一般に，共役な座標成分 (x,y) の両方に依存する関数であることからも納得されよう．つまり，ドリフト運動の数値積分に leap-frog 法を適用することはできず，したがって splitting 法をドリフト運動論的方程式の解法としてそのまま採用するには問題がある．仮に式(13)に leap-frog 法を無理矢理適用してみると，本来のドリフト速度は ϕ の等値線に沿ったものであるはずが，そこからはずれる不安定な軌道が結果として得られるであろう．実際，粒子モデルを用いたドリフトまたはジャイロ運動論的シミュレーションやモンテカルロ・シミュレーションにおいて，ドリフト軌道の積分には，leap-frog 法ではなく，(有限の数値的な散逸があるが) predictor-corrector 法や，より高次精度の Runge-Kutta 法などが使われている．こうしたハミルトニアンの形式についての議論から，PIC 法や δf 法における軌道追跡手法も，Vlasov 方程式の場合とドリフトまたはジャイロ運動論的シミュレーションとで異なったやり方を採用する必要があることがわかる．

3.3.2 他の「軌道」追跡法に基づく解法

ドリフト運動論的方程式に splitting 法がそのまま適用できないとなると，粒子軌道にできるだけ沿った異なる型の写像を用いて分布関数の時間発展を模擬する方法が考えられる．この節で述べる semi-Lagrangian 法[10]と呼ばれる手法は，欧州，特にフランスを中心としたグループで積極的に試みられている[21, 22]．この方法は，ドリフトまたはジャイロ運動論的方程式よりもより広いクラスの移流方程式に対するシミュレーション手法として考案され[23]，気象分野などでも用いられている．上で述べた分布関数についての写像を，共役な変数に対して分解する代わりに，2種類の時間ステップを採用する．例えば，$(\cdots,n,n+1,\cdots)$ と，$(\cdots,n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\cdots)$ という具合に，入れ子になった時間ステップを用いて，

$$\begin{cases}z^{n+1/2}=z^{n-1/2}+\Delta t\{z,H\}|_{z=z^n}\\ z^{n+1}=z^n+\Delta t\{z,H\}|_{z=z^{n+1/2}}\end{cases}, \tag{15}$$

という方法で正準方程式 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=\{z,H\}$ を積分することを考えよう．ここでは，記法の簡便さのために $z\equiv(q,p)$ を用いている．

式(15)で与えられた積分法で生成される一対の写像に基づく解法，semi-Lagrangian法は，以下のようにしてドリフト運動論的方程式へ適用されている．すなわち，半ステップずれた2つの時間刻みを用いて，

$$\begin{cases}f^{n+1/2}(z)=f^{n-1/2}[z-2d^n(z)]\\ f^{n+1}(z)=f^n[z-2d^{n+1/2}(z)]\end{cases}, \tag{16}$$

として，整数と半整数ステップの値を交互に求めていく[11]．ここで，

$$d^m(z)=\frac{\Delta t}{2}\{\zeta,H^m\}|_{\zeta=z-d^m}, \tag{17}$$

とし，f^m から作られる1粒子運動のハミルトニアン H^m を用いる $(m=\cdots,n,n+1/2,\cdots)$．そのため d^m を求めるには，Newton 法などの反復解法が必要となる．ここで表記

[10] この名前は，Euler 型解法のように固定された空間格子を用いるにも関わらず，移流方程式の特性曲線を近似的に追跡していることに由来する．

の混乱を避けるため，式(17)のPoisson括弧式の変数をζで表している．式(15)および(16)は，時間方向に中心差分となっているので，２次精度を保っていることがわかる．また，この型のスキームの性質として，整数と半整数のステップの双方で初期条件を与える必要がある[12]．

一方，semi-Lagrangian法に類似の手法として，CIP(constrained interpolation profile)法が流体シミュレーションの分野で幅広く応用されている[25]．この方法では，対象となる変数（例えば分布関数）の移流方程式とあわせ，その１階空間微分の時間発展も同時に追跡し，それらの値を用いてデータの補間を行う．これにより数値的な拡散や分散を小さく抑え，急峻な解の振る舞いを維持することができ，密度や圧力が不連続に変化する多相流や流体中での物体の運動などのシミュレーションへの応用が盛んに行われている．この手法を，ジャイロ運動論的方程式が与えるプラズマ乱流輸送問題へ適用する試みもはじめられており，前章で述べたδf法を用いたシミュレーションとの比較もあわせて行われている[26]．

3.3.3 陰的シンプレクティック積分法の応用

さて，先述のように，陽的シンプレクティック積分法は，例えば$H(q,p)=T(p)+V(q)$のように分離可能なハミルトニアンで与えられる系に対して有効なものであった．Hamilton系としての性質を活かしつつ，ジャイロ運動論的方程式などのより一般的な系に拡張するにはどのように考えていけばよいだろうか？以下で簡単に見ていこう．

任意のHamilton系に適用可能な時間積分法として，陰的シンプレクティック法が知られている[27,28]．その最も簡単な例は，陰的中点法（implicit midpoint rule）と呼ばれる古典的な方法で，

$$z^{n+1}=z^{n}+\Delta t\{z,H\}|_{z=\bar{z}},\quad \bar{z}=(z^{n+1}+z^{n})/2, \tag{18}$$

と書き表される．上式は，時間積分によって求めるべきz^{n+1}に右辺が依存する，いわゆる，陰解法となっている．正準座標$z=(q,p)$に対し，式(18)が(q^{n},p^{n})から(q^{n+1},p^{n+1})への正準変換を与えることは容易に確かめられる[13]．上式により，離散化された仮想的な粒子軌道$(\cdots,z^{n-1},z^{n},z^{n+1},\cdots)$に沿った，分布関数の写像が以下のように導かれる．

$$\bar{f}(z)\equiv f^{n+1}[z+(\Delta t/2)\{z,\overline{H}\}]=f^{n}[z-(\Delta t/2)\{z,\overline{H}\}]. \tag{19}$$

ここで，１粒子運動のハミルトニアン$\overline{H}$に含まれるポテンシャルは，分布関数$\bar{f}(z)$で与えられる電荷密度からPoisson方程式などを解いて得られるものとする[14]．式(19)で$\bar{f}$を求めるためには$\overline{H}$が必要であるため反復法などを用いてf^{n+1}を探すことになるが，うまく収束して解が得られたとしても，かなりの計算時間がかかると想像され，そのまま扱うのは難しい[15]．しかし，上記の考え方から以下のような簡略化されたスキームが得られる．

時間ステップあたりの分布関数の変化が十分小さいとすると，(19)式の中辺と右辺をTaylor展開して，得られた両式の差からΔt^3以上の項を，和からΔt^2以上の項を無視して，それぞれ，

$$f^{n+1}(z)=f^{n}(z)-\Delta t\{\bar{f}(z),\overline{H}\},\qquad \bar{f}(z)=\frac{f^{n+1}(z)+f^{n}(z)}{2}, \tag{21}$$

が導かれる．こうして，陰的シンプレクティック積分法を用いた分布関数の写像から，移流項を陽に評価するEuler型の２次精度スキームが得られた．おもしろいことに式(21)は，式(18)で与えられた陰的中点法を$f(z)$に適用した形になっている[16]．このスキームは時間反転対称であり，かつ，L^2-ノルム，すなわち$\int f^2(z)\mathrm{d}z$，を保存するという性質を持っている[19,20]．このため位相空間における分布関数のゆらぎの大きさを反映した揺動エントロピー（ここで述べる揺動エントロピーの意味については，**3.4.2節**を参照されたい）の定量的評価において威力を発揮し，無衝突プラズマにおける乱流輸送の準定常状態の確認という

---

11 文献[24]では，１種類の時間刻みのみを用いた異なる時間積分法も試みられている．

12 実際のシミュレーションを行う上で，この点は少し注意が必要かも知れない．例えば，$H(x,y)=(x^2+y^2)/2$というハミルトニアンで与えられる場合のように，線形常微分方程式に(15)を適用した場合を考えよう．$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=y$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-x$という方程式に一対の初期条件を与えれば，単振動の解が一意に定まるのは周知のとおりである．しかし，(15)式を用いる場合，線形方程式に対しても整数と半整数ステップのそれぞれに初期条件を与える必要が生じる．したがって，その与え方が適切でないと，結果として半ステップ毎の振動を伴う解が得られる可能性もある．

13 Goldsteinの教科書[15]にある，正準変換を作る第３種の母関数を$S(q^{n-1},p^{n})=-q^{n+1}p^{n}+\Delta tH(\bar{q},\bar{p})+(\Delta t^2/2)\partial H/\partial q|_{\bar{q},\bar{p}}\,\partial H/\partial p|_{\bar{q},\bar{p}}$として，

$$\begin{cases} q^{n}=-\partial S/\partial p^{n} \\ p^{n+1}=-\partial S/\partial q^{n+1} \end{cases},$$

という変換を考えると，これは式(18)と同等であることが示される．

14 位相空間を離散化した格子点上でf^{n+1}を与えられる形にするには，式(19)では，点zにおいて$\{z,\overline{H}\}$が評価されていることに注意して，

$$f^{n+1}(z)=f^{n}[z-2d(z)],\qquad d(z)=\frac{\Delta t}{2}\{\zeta,\overline{H}\}|_{\zeta=z-d} \tag{20}$$

とする．上で与えた写像(20)において，半整数ステップ（$n-1/2$など）を考え，$\overline{H}$を$f^{n+1/2}$から決まるハミルトニアン$H^{n+1/2}$で仮に置き換えると，前の節で述べたsemi-Langrangian法と形式的に同じ形になる．

15 筆者の知る限り，(19)または(20)式を解くシミュレーションは，未だなされていない．

16 第**3.2**節で見たsplitting法の場合と同様に，この積分法を繰り返し適用して，４次精度の解法を簡単に構成することができる．

Table 1 Summary of numerical techniques used in Eulerian gyrokinetic simulation codes for toroidal geometry.

Code	Derivatives	Integrator
GS2	F.D. + spectral (2D)	implicit (linear) + Adams-Bashforth
GENE	upwind F.D.	predictor-corrector
GKV	F.D. + spectral (2D)	Runge-Kutta-Gill
GYRO	F.D. + spectral (1D)	Runge-Kutta

F.D.: finite difference

基礎的問題の解明に活用された[29]．また，(21)式のタイプの陰的積分法は，次小節で紹介されるGS2コードにおいても，線形項の時間積分に利用されている[30]．

3.3.4 トーラス型配位への適用例

前小節までは，Vlasovシミュレーション手法をジャイロ運動論的方程式系に適用するために必要となる時間積分法について，基礎的な側面から論じてきた．その流れを振り返ると，粒子軌道を追跡するための時間積分法により生成される分布関数の写像に基づいて，splitting法やsemi-Lagrangian法が構成された．次に，時間ステップあたりの粒子位置の変化にともなう分布関数の変動が小さいとして，陰的中点法から生成された写像における分布関数をTaylor展開することで，(21)式の様に移流項をあらわに評価するEuler型のスキームが得られた．この過程は，粒子軌道に沿って分布関数が一定となることを表した$Df/Dt=0$というLagrange表記から，$\partial f/\partial t+\{f,H\}=0$というEuler表記への書き換えに対応している．

一方，実際のプラズマが持つ有限の衝突を考える場合には，前小節で述べたスキームが有する保存特性の重要性は低減するであろう[17]．このように考えて行くと，(3)式に象徴されるようなEuler型のアルゴリズムに至る．本講座第1章のTable 1において，Methodの項にVlasovとしてまとめられた4つのコード（GS2[30]，GENE[31]，GKV[32]，GYRO[33]）では，格子点または関数展開を用いてジャイロ運動論的方程式を(3)式のように離散化し，その上でRunge-Kutta法などの時間積分法を適用するという方針を採っている．トロイダル系におけるプラズマ乱流輸送を扱うEuler型(Vlasov)解法を用いたジャイロ運動論的シミュレーション・コードとしては，現状のところこれらがすべてである[18]．そこで用いている数値手法をTable 1に簡単にまとめておく．

上記の4つのコードで使われている時間積分法や，差分法，スペクトル法などの，基礎となる個々の技法の多くは，流体シミュレーションの分野でも共通に用いられるものである．しかし，5次元位相空間を扱うことから，その選択の自由度は広い．以下では，GKVコードを例に実際のスキームについて簡単に解説しよう[19]．

GKVコードでは，小半径方向に局所的な取り扱いを導入し，円形磁気面を仮定し，さらにフルート近似[34]の下で，磁力線に沿った小領域でシミュレーションを行う，いわゆるフラックスチューブ配位[35]を用いている．したがって，Maxwell分布で与えられる背景イオンの密度・温度勾配を一定とし，分布関数の揺動部分のみを扱う．揺動成分に対しては，トロイダル方向だけでなく，局所近似の下で小半径方向にも周期境界条件を採用する．また，バルーニング型のモード構造を精度よく再現できるように，実空間のもう一つの座標として磁力線に沿って測ったポロイダル角をとり，磁気座標を採用している．さらに，磁力線に平行方向の速度と磁気モーメントを速度空間座標に選び，それらに関しての拡散項を含む衝突モデル項を導入している．電子については断熱応答を仮定し，また準中性条件と静電近似を用いている．

フルート近似の結果，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトによる非線形項は，磁力線ラベル方向の座標と小半径方向の座標についてのPoisson括弧式で表現される．この，プラズマ乱流において最も重要となる，非線形項を高精度で評価するために，(擬)スペクトル法を用いている．磁力線に沿った方向の微分は，移流項$v_{\|}\nabla_{\|}f$の形で現れるので，格子スケールの振動が数値誤差から成長するのを避けるために，弱い散逸のある高次の風上差分か，4次の中心差分を数値フィルタと共に使用する．拡散型の項が支配的となる衝突項に対しては，移流項の場合のような数値振動は生じにくいので，4次精度の中心差分法を用いている．時間積分法には，中性流体の一様等方性乱流のシミュレーション等でも使われる4次精度Runge-Kutta-Gill法[36]を利用している．第1章Fig. 1で引用されている図は，上記のGKVコードによるトロイダルイオン温度勾配(ITG)乱流のシミュレーション結果である．

GKVコードは，比較的簡潔なモデルの下で，5次元位相空間における速度分布関数の構造を，微細揺動までも含めてできるだけ正確なシミュレーションを行うという方針で開発されている．一方，他のコードでは，非円形磁気面や電磁揺動（GS2，GENE，GYRO）などのより複雑な効果も考慮されている．その反面，GKVコードに比べて速度空間の解像度が低い．また，局所近似を用いたフラックスチューブ型のコード(GS2，GENE，GKV)では，第2章でも議論されたように，背景勾配や磁気シアの空間変化の効果を取り入れることはできない．そのためには，GYROコードのようなグローバルな解析が必要となる．GYROコードには，加熱などのソースや自由境界の実装など独自の工夫が凝らされている．しかし，磁力線に平行方向の微分項に数値的な散逸がないと線形近似の下でゾーナルフローが単調に減衰しないというベンチマークテスト結果

[17] 有限の衝突があると，式(21)のスキームでも，L^2-ノルムを保存することはなくなるが，predictor-corrector法を用いた場合に比べ数値粘性を小さく押さえることに成功している[19]．しかし，陽的な時間積分法を用いた場合に比べ，計算コストが数倍になるのが欠点である．

[18] semi-Lagrangian法やCIP法を用いたドリフト波乱流のシミュレーション・コードも，トロイダル系への拡張をめざして開発が進められている[22, 24, 26]．

[19] 他のコードでは異なる数値手法を用いているので，(GKVコードの実装は，GS2コードと類似する部分が多いが)ここで紹介する例は普遍的なものではなく，あくまで一つの指針として参考にしてほしい．

[33]や，速度空間解像度が低いため（次節で述べる）分布関数の微細構造を再現し得ない，などの点について疑問が残る．また，δf法を用いたジャイロ運動論的シミュレーションを行うグループとの間の論争については，第1章で触れたところである．このように，Euler型解法を用いたトロイダルプラズマ乱流輸送のシミュレーションは，いまだ考慮すべき点が多く残されており，現在も各所でコード開発が進められている．今後は，コード間の相互比較などを含めて，シミュレーション結果についてのより定量的な議論が必要となるであろう．

3.4 位相混合と分布関数構造

3.4.1 分布関数の微細揺動の生成

この節では，運動論的プラズマ現象に本来的に関わる位相混合と分布関数の微細構造形成について考察しよう．以下で述べる点は，用いている解法によらず，プラズマの運動論的シミュレーション一般に共通の問題でもある．**3.2.2**節でのシミュレーション結果に見られるように，無衝突プラズマの速度分布関数は，位相空間内の粒子軌道に沿って引き延ばされ，また折り畳まれて複雑な変形を受ける．その結果，なめらかな初期分布から出発しても，時間の経過とともに，無数の襞状に重なり合った分布へと変わっていく(Fig. 2参照)．よって初期に与えたゆらぎは，分布関数の引き延ばしや折り畳みにともなって混合を受ける．その結果，速度空間平均を取ったモーメント量は，安定な系においては多くの場合時間的に減衰する[20]．これを位相混合と呼ぶ．一方，実空間・速度空間共に1次元，合計で2次元位相空間を例に取ると，そこでの分布関数の等値線は，無衝突極限では決してちぎれたり，新たな交点を生じたりしない．つまり，比較的低次のモーメント量は減衰し定常状態に向かい得るが，分布関数の詳細な形状までも考慮すると，その時間発展は初期値に依存し，決して定常状態に達しない．その最も簡単な例と，このことが無衝突プラズマの運動論的シミュレーションで持つ意味を以下で見ていこう．

先に考えた，1次元Vlasov-Poisson系をさらに簡単化して，電場の無い中性ガスの運動論を考えよう．無衝突極限で，その1体速度分布関数$f(x,v,t)$は，

$$\partial_t f + v\partial_x f = 0, \tag{22}$$

という線形方程式に従う．初期分布を

$$f(x,v,t=0) = f_0(v,x) = \sum_k f_{0k}(v)\exp(ikx), \tag{23}$$

とすると，式(22)の解は，

$$\begin{aligned} f(x,v,t) &= f(x-vt, v, t=0) \\ &= \sum_k f_{0k}(v)\exp[ik(x-vt)] \\ &\equiv \sum_k f_k(v,t)\exp(ikx) \end{aligned} \tag{24}$$

で与えられる．初期条件としてある波数kを持つ実空間でのゆらぎと共に，速度空間分布に熱速度v_tのMaxwell分布を仮定すると，上式の0次モーメントで与えられる密度揺動は，$\delta n_k \propto \exp[-(kv_t t)^2/2]$のような時間依存性にしたがって単調減衰する．ここで重要なのは，式(24)の指数部にある，$ikvt$の項である．0次モーメントの計算で現れる$\int f_{0k}(v)\exp(-ikvt)\mathrm{d}v$の部分は，$v$空間における「波数」$kt$の成分を求めるFourier変換と見なせる．この「波数」が時間tに比例して増加することは，時間の経過とともにballisticモードが発達し，速度空間内にfのより細かな構造が作り出されていくことに対応している．初期速度分布が，Maxwell分布などのように，主にv空間における長波長成分からなっている場合[21]，時間の経過と共に，位相混合により密度揺動は減衰していくことになる．この過程は，また，上述の分布関数の引き延ばしに対応している．中性粒子の軌道を表すベクトル場（ハミルトニアン流）は，位相空間において$v\hat{x}$で与えられる一様シア流に相当する（$\hat{x}$はx方向の単位ベクトル）．このシアによって分布関数は引き延ばされ，より細かな構造へと変形していくのである．

Vlasov-Poisson系のように電場のある場合は少し事情が異なるが，位相混合はやはり重要な役割を果たす．初期に与えた揺動成分の振幅が小さく線形近似が有効な場合，系が不安定であると，揺動成分$f_k(v)$は線形理論が与える固有関数に近づいていく[37][22]．よって線形成長が続く間は，$f_k(v)$は（共鳴点付近を除いては）比較的なだらかな分布をもつようになるが，揺動振幅が大きくなってひとたび非線形状態に入ると，微細揺動の発達と位相混合が再び重要となる．

さて，式(22)で与えられる中性ガスの振る舞いをシミュレーションすることを考えてみよう[23]．x方向に周期境界条件を仮定し，初期に波数kの揺動を与え，速度空間格子間隔Δvを用いて，シミュレーションで再現される解の振る舞いを表すと，

$$f_k(v_m,t) = f_{0k}(v_m)\exp(-ikm\Delta vt), \tag{25}$$

となる．ここで，mは速度空間の格子点を表す整数で，$v_m = m\Delta v\,(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$とする．一見してわかるように，$f_k(v_m,t)$は時間に対して周期$2\pi/k\Delta v$を持つ周期関数になっている．つまり，$t=\tau_r=2\pi/k\Delta v$になると，(25)式で与えられる解は，初期条件に戻ってしまうわけである．

[20] BGKモードのように時間的に定常な解も存在する．

[21] Maxwell分布のv空間でのFourier変換もMaxwell(Gauss)分布となる．

[22] 線形安定な場合は，初期条件に依存して，$f_k(v)$に微細揺動が発達する．一方，δn_kは中性の場合と同様に急激に減衰した後，線形理論の与える減衰率で指数関数的に減衰することになる．

[23] もちろん，解析解はすでにわかっているのでシミュレーションするまでもないのだが，解のわかっている問題を扱うことでコードを検証することは有用である．また，同様の議論は文献[38]でもなされているので，参照されたい．

これは明らかに式(24)の解析解とはまったく異なる振る舞いである．その原因は，速度空間の離散化にある．上述のballisticモードの速度空間における波長が格子間隔と等しくなると，分布は初期条件に戻ってしまうことになる[24]．したがって，$t>\tau_r$（より正確には$t>\tau_r/2$）においては，シミュレーション結果には離散化にともなう解像度の不足により，エイリアス誤差が混入することになる．Vlasovシミュレーションの分野では，この問題は古くから知られていた[3]．その誤差の影響を押さえ込むために，種々の内挿法が試されてきたが，今のところ決定打は見あたらない．一方，ここではΔvが一定の場合を考えているのに対し，その比が無理数になるような不均一な格子間隔を用いると，初期条件に戻ってしまうことはなくなる．しかし解像度の不足という問題は，十分な格子点数を用いない限り解決され得ない．

同様の問題は，従来から広く行われているPIC法や，前章で議論したδf法でも生じるはずである．こうした速度空間における解像度の不足は，PIC法では，位相空間における乱雑な粒子分布として現れるが，粒子数を十分増やせば，分布関数の微細構造が浮き出てくるであろう．以上のような考察に基づくと，第1章で議論したように，PICシミュレーションでVlasovシミュレーションと（分布関数の微細な揺動成分まで含めて）同程度の位相空間解像度を達成するには，やはり同程度以上のサンプリング点数（すなわち粒子数）が必要となる．

3.4.2 流体方程式の完結問題との関連

よく知られているように，分布関数を用いて記述された運動論的方程式の速度モーメントを取り，空間座標と時間に依存した流体的な量（密度，流速，温度など）についての発展方程式を得ることで，流体方程式が導出される．衝突が十分大きく，速度分布関数のMaxwell分布からのずれが小さい場合は，磁化プラズマに対する流体方程式が得られている[39]．しかし，第1章で既に議論したように，こうして得られた方程式では，（低衝突周波数の）高温プラズマにおける乱流輸送を記述するには不十分である．その理由は，衝突周波数が低い場合，揺動分布関数がMaxwell分布から大きくはずれるためであり，高次モーメント量をそれより低次の量のみで表現し，流体方程式の連鎖を断ち切るための完結モデルの正当性が問題となるためであった．一方，前節で述べた位相混合の問題を内包するジャイロ運動論的シミュレーションは，現在でもかなりの計算コストが必要であり，より簡便でかつ微視的乱流にも適用可能な流体モデルがあれば，それはやはり魅力的である．そのような拡張された流体モデルを実現するためには，プラズマの運動論的振る舞いと矛盾なく低次モーメント量の時間発展を記述できる完結モデルが必要となる．こうしたモデルの正当性を検証するためにも，位相空間における分布関数構造を直接取り扱うEuler型（Vlasov）シミュレーションの結果は非常に有用である．以下では比較的簡単なスラブ配位におけるITG乱流を例に，前節で問題となった分布関数の微細構造形成と，流体方程式の完結モデルの関連を見ていこう[40,41]．

イオンについてのドリフト運動論的方程式(11)を考える．背景成分をMaxwell分布，$F_M=n_0(m_i/2\pi T_i)^{1/2}\exp(-m_i v_\parallel^2/2T_i)$，とし，そこからのずれを$\tilde{f}$とする．すなわち，$f=\tilde{f}+F_M$．ここで$n_0$と$T_i$は背景イオンの密度と温度を表す．磁力線に平行方向の波数を$k_\parallel$とした時，$k_\parallel\neq 0$成分について電子の断熱応答と準中性条件を仮定すると，静電ポテンシャル揺動ϕは，

$$\int \tilde{f}\mathrm{d}v_\parallel = n_0\frac{e\phi}{T_e}\ \ (k_\parallel\neq 0), \tag{26}$$

で与えられる（ここでは簡単のため，$k_\parallel=0$成分を除いて考える）．ここでe，T_eは素電荷と電子温度であり，また(11)式でのイオンの電荷$q=e$とする．背景分布の勾配はITG乱流の波長に比べ十分緩やかで，局所解析が適用できるものと仮定しよう．すると，揺動成分について周期境界条件が適用でき，$\tilde{f}=\sum_k f_k e^{ik\cdot x}$，および$\phi=\sum_k \phi_k e^{ik\cdot x}$とFourier展開する．磁力線に平行な粒子加速にともなう非線形性を小さいとし，かつ，背景分布の勾配を一定として近似すると，以下の方程式を得る．

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+ik_\parallel v_\parallel f_k-\frac{c}{B}\sum_{k'+k''=k}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'')]\phi_{k'}f_{k''}$$
$$=i\left[\omega_{*i}\left\{1+\eta_i\left(\frac{m_i v_\parallel^2}{2T_i}-\frac{1}{2}\right)\right\}-k_\parallel v_\parallel\right]F_M\frac{e\phi_k}{T_i}. \tag{27}$$

ここで，イオン反磁性ドリフト周波数を，$\omega_{*i}=(cT_i/eB)\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{b}\times\nabla\ln n_0$，温度勾配と密度勾配の比を，$\eta_i=\mathrm{d}\ln T_i/\mathrm{d}\ln n_0$，とし，それぞれ定数としている．式(27)の右辺でω_{*i}の掛かる項は，一定に保たれた背景密度・温度勾配の寄与を示し，不安定性を駆動するソース項として働く．

ここで，(27)式の0次，1次，および，2次モーメントを取ると，密度$n_k=\int\mathrm{d}v_\parallel f_k$，流速$u_k=\int\mathrm{d}v_\parallel f_k v_\parallel/n_0$，温度$T_k=\int\mathrm{d}v_\parallel f_k(m_i v_\parallel^2-T_i)/n_0$，についての以下の発展方程式を得る．

$$\frac{\partial n_k}{\partial t}+ik_\parallel n_0 u_k-i\omega_{*i}n_0\frac{e\phi_k}{T_i}$$
$$-\frac{c}{B}\sum_{k'+k''=k}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'')]\phi_{k'}n_{k''}=0, \tag{28}$$

$$n_0 m_i\frac{\partial u_k}{\partial t}+ik_\parallel(T_i n_k+n_0T_k+n_0e\phi_k)$$
$$-\frac{n_0m_ic}{B}\sum_{k'+k''=k}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'')]\phi_{k'}u_{k''}=0, \tag{29}$$

$$n_0\frac{\partial T_k}{\partial t}+ik_\parallel(2n_0T_iu_k+q_k)-i\omega_{*i}\eta_i n_0 e\phi_k$$

[24] これは連続関数を離散的な点でサンプルする際の問題そのものである．分布関数の速度空間における波長が格子間隔の2倍より短くなるとサンプリングにともなってエイリアス誤差が発生する．時刻$t=\tau_r$は，速度空間に対応した波数空間で折り畳まれたスペクトルのゴーストが，直流成分へ影響する時間と見なすこともできる．

$$-\frac{n_0 c}{B}\sum_{k'+k''=k}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k}'')]\phi_{k'}T_{k''}=0. \tag{30}$$

また，式(26)から，

$$n_k = n_0\frac{e\phi_k}{T_e}\ \ (k_{\parallel}\neq 0), \tag{31}$$

となる．式(28)－(31)を閉じた方程式系とするには，(30)式中の磁力線方向への熱流束 $q_k=\int \mathrm{d}v_{\parallel} f_k(m_i v_{\parallel}^3-3T_i v_{\parallel})$ を，(n_k, u_k, T_k) で表す完結モデルが必要であることがわかる．Hammett と Perkins は，運動論の与える線形応答を再現するように Landau 流体完結モデルを考案した[42]．この問題は，無衝突プラズマに対する流体モデルの構成という，プラズマ物理学における理論体系（第１章の Fig. 2 参照）の基幹部分に関わるという点からも関心がもたれ，その後も完結モデルの研究が行われている[40, 41, 43]．

ここでは完結モデル自体には踏み込まずに，運動論との対比についてもう少し考察を進めよう．式(27)の両辺に f_k^*/F_M を掛けて速度空間積分と $\boldsymbol{k}$ についての和をとる（実空間積分に対応）．さらに，(28)と(31)式を使うと，以下のエントロピー釣り合いの式を得る[25]，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\left(\int \mathrm{d}v_{\parallel}\frac{|f_k|^2}{2F_M}+\frac{n_0 T_e}{2T_i}\left|\frac{e\phi_k}{T_e}\right|^2\right)=\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}}{T_i}\cdot(-\nabla \ln T_i). \tag{32}$$

ここで，磁力線に垂直方向の乱流熱輸送フラックスを，$\boldsymbol{q}_{\perp}=(n_0/2)\sum_k \mathrm{Re}(T_k \boldsymbol{v}_{Ek}^*)$ とし，また，$\boldsymbol{v}_{Ek}=i(c/B)\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{k}\phi_k$ である．ここで (32) 式を見ると，振幅 $|\phi_k|$ で飽和した乱流において，定常な乱流熱輸送 $\boldsymbol{q}_{\perp}$ が維持されるには，左辺の揺動エントロピー $\sum_k\int \mathrm{d}v_{\parallel}|f_k|^2/2F_M$ が時間的に一定の割合で増加し続けることが必要である．これはまさに前節で考察した，ballistic モードの発達によって実現され得るのである．このような状態を無衝突プラズマ乱流の準定常状態と呼んでいる[29]．

さて，分布関数を用いて表されたエントロピー釣り合いを流体量で表現するには，$f_k(v_{\parallel})$ を $v_{\parallel}$ 空間において Hermite 展開すれば良い．重み関数に F_M を用いて直交関数展開すると，０次，１次，２次などの展開係数はそれぞれの次数に対応した速度モーメント量で表される．すなわち，(32)式は，

$$\frac{d}{dt}\sum_k n_0\left(\frac{1}{2}\left|\frac{n_k}{n_0}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{u_k}{v_t}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\frac{T_k}{T_i}\right|^2+\frac{1}{12}\left|\frac{q_k}{n_0 T_i v_t}\right|^2\right.$$
$$\left.+\sum_{n\geq 4}\frac{n!}{2}|\varphi_{nk}|^2+\frac{T_e}{2T_i}\left|\frac{e\phi_k}{T_e}\right|^2\right)=\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}}{T_i}\cdot(-\nabla \ln T_i), \tag{33}$$

と書き直すことができる（ここで $v_t=\sqrt{T_i/m_i}$）．ここで φ_{nk} は n 次の Hermite 展開係数を示しており，$\varphi_{nk}=(n!)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}(v_{\parallel}/v_t)f_k H_n(v_{\parallel}/v_t)$ とする（H_n は Hermite 多項式）．一方，流体方程式(28)－(31)からも，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k n_0\left(\frac{1}{2}\left|\frac{n_k}{n_0}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{u_k}{v_t}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\frac{T_k}{T_i}\right|^2+\frac{T_e}{2T_i}\left|\frac{e\phi_k}{T_e}\right|^2\right)$$
$$=\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}}{T_i}\cdot(-\nabla \ln T_i)+\sum_k \mathrm{Re}\left(\frac{T_k}{2T_i^2}ik_{\parallel}q_k^*\right), \tag{34}$$

として同様の式を得ることができる．二つの式を比べると，少なくとも３次モーメントまでがほぼ定常状態に達して，かつ，乱流輸送が一定に維持されている状況では，

$$\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}}{T_i}\cdot(-\nabla \ln T_i)=-\sum_k \mathrm{Re}\left(\frac{T_k}{2T_i^2}ik_{\parallel}q_k^*\right)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n_0\sum_k\sum_{n\geq 4}\frac{n!}{2}|\varphi_{nk}|^2\right), \tag{35}$$

が成り立つことが要請される．この意味するところは，(32)式でも見たように，定常輸送を維持するには，大きな n が与える高次モーメント量に対応した分布関数の微細構造が生成され続ける必要があること，さらに，低次モーメント量のみで乱流輸送を再現するには，(34)式の右辺第２項にある T_k と q_k の相関項が本質的な鍵を握っている，ということである．すなわち，どのような完結モデルを用いるかは，流体モデルを用いて乱流輸送を定量的に評価するために極めて重要であるとともに，その構成には，プラズマ乱流の運動論的側面の理解が不可欠である．こうした観点から，Euler 型解法を用いたドリフト運動論的シミュレーションと，完結モデルを用いた流体シミュレーションの比較が行われ，完結モデルの妥当性が議論されている[41]．このようなアプローチは，計算コストが大きいが分布関数の微細な振る舞いまで知ることのできる，運動論的シミュレーションの結果を有効に活用した一例である．また，流体方程式の完結モデルは，プラズマの運動論的振る舞いを流体方程式に反映させるという意味において，異なる階層間にわたる現象の記述[44]を考える上でも重要な要素となろう．

3.5　まとめと課題

本稿では，主に分布関数の写像という視点から，splitting 法，semi-Lagrangian 法，陰的スキームを用いた Euler 型解法について統一的に眺めてきた．これらは，粒子軌道に沿って分布関数が一定となるという無衝突プラズマの特性に基づいている．前節でも触れたように，無衝突極限において速度分布関数は，粒子軌道に沿って引き延ばしや折り畳みの変形を受け，位相空間内に微細な構造が際限なく発達する．さらに細かく見ると，波に捕捉される粒子と非捕捉粒子の境界近傍においてセパラトリクス点近くを通る軌道に対しては，分布関数は指数関数的に引き延ばされ，

[25] 微視的エントロピー S_m と巨視的エントロピー S_M を，それぞれ，$S_m=-\int \mathrm{d}v_{\parallel} f\ln f$ と $S_M=-\int \mathrm{d}v_{\parallel}F_M \ln F_M$ のように定義すると，式(32)の左辺括弧内第１項は，$O(\tilde{f})$ の２次の項までで $\int \mathrm{d}v_{\parallel}\langle\tilde{f}^2\rangle/2F_M=S_M-\langle S_m\rangle$ のように近似される．このことから，式(32)左辺の括弧内第１項は「揺動エントロピー」とも呼ばれる．

逆に，２次元位相空間における分布関数の等値線の幅はほぼ指数関数的に狭くなる場合があると予想される．その様な分布を，有限の幅を持つ位相空間格子点上で精度良く再現するのは非常に困難である．したがって，実際の無衝突プラズマのEuler型シミュレーションで長時間にわたる非線形発展を追跡するには，データの内挿や数値フィルタによる人工的な散逸の導入が不可避である．しかし，それを正当化するには，得られた結論において人工粘性などの影響が十分排除されていることを検証する必要がある．

一方，実際のプラズマには有限の衝突があり，その効果は速度空間の小さなスケールでより強く働く．したがって衝突周波数がドリフト波の周波数などよりずっと低く，線形理論ではまったく影響を及ぼさない程度であっても，粒子運動により作り出された分布関数の微細揺動成分は，いずれは衝突により散逸する．**3.4.2**節で議論した系において，(27)式の右辺に衝突項$C(f_k)$を付加した場合を考え，(32)式と同様にエントロピー・バランスを導出すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\left(\int \mathrm{d}v_\parallel \frac{|f_k|^2}{2F_\mathrm{M}}+\frac{n_0 T_\mathrm{e}}{2T_\mathrm{i}}\left|\frac{e\phi_k}{T_\mathrm{e}}\right|^2\right)$$
$$=\frac{\boldsymbol{q}_\perp}{T_\mathrm{i}}\cdot(-\nabla \ln T_\mathrm{i})+D_\mathrm{i},\quad (36)$$

となる．ここで，衝突による揺動エントロピーの散逸は，$D_\mathrm{i}=\sum_k\int \mathrm{d}v_\parallel f_k^* C(f_k)/F_\mathrm{M}$で表されている．上式の左辺が(平均的に）ゼロとなるような，分布関数構造や揺動エントロピーまでを含む定常乱流状態においては，$\boldsymbol{q}_\perp\cdot(-\nabla \ln T_\mathrm{i})/T_\mathrm{i}=-D_\mathrm{i}$が要請され，この状態が実現されるには，衝突項の存在が必要不可欠であることがわかる[45]．

また，衝突効果の導入は，シミュレーションにおける位相空間の解像度を節約するという上でも大きな意味を持つ．そのためには，ピッチ角散乱だけでなくエネルギー方向の拡散も含む衝突モデル項を導入する必要がある．一方，衝突のある場合，無衝突での粒子軌道に沿った分布関数の写像を基礎としたsplitting法やsemi-Lagrangian法が，どの程度有効であるかが問われる．これは，第**2**章で述べられた衝突のある場合のδf法におけるのと類似の問題であり，今後の検討が必要である．一方，**3.3.4**節でも触れたように，(３)式に象徴される，移流項を陽に評価するタイプのEuler型運動論的シミュレーション手法は，衝突のある系にもそのまま適用できる．この点は，衝突項だけでなく，前章でも議論された非保存系の物理過程，すなわち加熱などのソースやロスを取り入れるためにも有利であり，Table1にまとめたコードはいずれもこのような利点を持っている．しかしながら，上述の意味での衝突項の重要性は，(GKVコードを除いて）現状でどれほど認識されているかやや疑問が残る．

前節では，分布関数の微細構造形成と流体方程式の完結モデルとの関わりについて述べた．分布関数を位相空間中で陽に扱い，その時間発展を追うEuler型解法（Vlasovシミュレーション）は，これらのモデルについての定量的な評価を可能とした．一方，流体モデルでのエントロピー・バランスを表す(34)式に現れる温度と磁力線方向の熱流束の相関項は，高次モーメントすなわち分布関数の微細構造の生成率を示す指標にもなっている．したがって逆の視点から見ると，適切な完結モデルが構築できれば，それを一種の位相混合についての粗視化モデルと見立てて，運動論的シミュレーションに取り入れることで計算コストを減らすことが可能となるかもしれない．このように，プラズマの運動論的シミュレーションと流体方程式の完結モデルの構成は，密接に関連したテーマであり，今後も相補的な研究を深めていく必要がある．

謝辞

本講座の企画をはじめとして，構成や内容の改善についてご助力をいただいた菅野龍太郎博士，および，有益なコメントをいただいた井戸村泰宏博士，洲鎌英雄博士に感謝いたします．本稿の作成は，科学研究費補助金［基盤研究(C)：16560727，および基盤研究(B)：17360445］および核融合科学研究所共同研究(NIFS04KDAD003)の援助を得て行われました．

参考文献

[1] 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法（東京大学出版会，東京，1994年）．
[2] S.A. Teukolsky, W.H. Press, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
[3] C.Z. Cheng and G. Knorr, J. Comput. Phys. **22**, 330 (1976).
[4] M. Shoucri, R. Gagné, J. Comput. Phys. **27**, 315 (1978).
[5] A. Ghizzo, B. Izrar, P. Bertrand, E. Fijalkow, M.R. Feix and M. Shoucri, Phys. Fluids **31**, 72 (1988).
[6] B. Izar, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Fijalkow and M.R. Feix, Comput. Phys. Comm. **52**, 375 (1989).
[7] A.J. Klimas and W.M. Farrell, J. Comput. Phys. **110**, 150 (1994).
[8] E.A. Fijalkow, Comput. Phys. Comm. **116**, 319 (1999).
[9] T. Nakamura and T. Yabe, Comput. Phys. Comm. **120**, 122 (1999).
[10] F. Filbet, E. Sonnendrücker and P. Bertrand, J. Comput. Phys. **172**, 166 (2001).
[11] A. Mangeney, F. Califano, C. Cavazzoni and P. Travnicek, J. Comput. Phys. **179**, 495 (2002).
[12] T.D. Arber and R.G. L. Vann, J. Comput. Phys. **180**, 339 (2002).
[13] F. Filbet and E. Sonnendrücker, Comput. Phys. Comm. **150**, 247 (2003).
[14] N. Besse and E. Sonnendrücker, J. Comput. Phys. **191**, 341 (2003).
[15] H. ゴールドスタイン: 古典力学 (吉岡書店, 東京, 1980).
[16] 吉田春夫：数理科学 **384**, 37 (1995).
[17] E. Forest and R.D. Ruth, Physica D **43**, 105 (1990).
[18] H. Yoshida, Phys. Lett. **150**, 162 (1990).
[19] T.-H. Watanabe, H. Sugama and T. Sato, J. Phys. Soc. Jpn **70**, 3565 (2001).
[20] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Transp. Theo. Stat. Phys. (in press).
[21] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand and A. Ghizzo, J. Comput. Phys. **149**, 201 (1999).

[22] Y. Sarazin, X. Garbet, V. Grandgirard, P. Bertrand, N. Besse, Ph. Ghendrih and E. Sonnendrücker, in *Proceedings of 20th IAEA Fusion Energy Conference,* Vilamoura, 2004 (IAEA, Vienna, 2005), TH/P6-7.
[23] A. Staniforth and J. Côté, Mon. Weather Rev. **119**, 2206 (1991).
[24] M. Brunetti, V. Grandgirard, O. Sauter, J. Vaclavik and L. Villard, Comput. Phys. Comm. **163**, 1 (2004).
[25] T. Yabe, F. Xiao and T. Utsumi, J. Comput. Phys. **169**, 556 (2001).
[26] Y. Idomura, Y. Kishimoto and S. Tokuda, *Proceedings of 32nd EPS Plasma Physics Conference,* Tarragona, 2005, P 1.044.
[27] J. deFrutos and J.M. Sanz-Serna, J. Comput. Phys. **103**, 103, 160 (1992).
[28] J.M. Sanz-Serna, Physica D **60**, 293 (1992).
[29] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Phys. Plasmas **9**, 3659 (2002).
[30] W. Dorland *et al.*, in *Proceedings of 18th IAEA Fusion Energy Conference,* Sorrento, 2000 (IAEA, Vienna, 2001), TH2/5; http://gs2.sourceforge.net.
[31] F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther and B.N. Rogers, Phys. Plasmas **7**, 1904 (2000).
[32] T.-H. Watanabe and H. Sugama, in *Proceedings of 20th IAEA Fusion Energy Conference,* Vilamoura, 2004 (IAEA, Vienna, 2005), TH/8-3Rb.
[33] J. Candy and R.E. Waltz, J. Comput. Phys. **186**, 545 (2003).
[34] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison-Wesley, Redwood City, 1992).
[35] M.A.Beer, S.C. Cowley and G.W. Hammett, Phys. Plasmas **2**, 2687 (1995).
[36] E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I* (Springer-Verlag, Berlin, 1993) Chapt.II.
[37] N.G. ファン・カンペン, B.U. フェルダーホフ：プラズマ物理学（紀伊國屋書店，東京，1973）.
[38] M. Yagi, Y. Idomura and T.-H. Watanabe, J. Plasma Fusion Res. **77**, 525 (2001).
[39] S.I. Braginski, in *Review of Plasma Physics,* edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. 1, p.205.
[40] H. Sugama, T.-H. Watanabe and W. Horton, Phys. Plasmas **8**, 2617 (2001).
[41] H. Sugama, T.-H. Watanabe and W. Horton, Phys. Plasmas **10**, 726 (2003).
[42] G.W. Hammett and F.W. Perkins, Phys. Rev. Lett. **64**, 3019 (1990).
[43] N. Mattor and S.E. Parker, Phys. Rev. Lett. **79**, 3419 (1997); N. Mattor, Phys. Plasmas **5**, 1822 (1998).
[44] Y. Kishimoto *et al.*, J. Plasma Fusion Res. **79**, 460 (2003).
[45] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Phys. Plasmas **11**, 1476 (2004).