

小特集 長距離相関による自己組織化

2. 3次元ナビエ・ストークス系での自己組織化

三浦英昭

核融合科学研究所

(原稿受付日：2011年4月21日)

3次元ナビエ・ストークス方程式で記述される最も顕著な自己組織化現象の一つとして、一様等方性乱流の渦構造を取り上げる。減衰性の一様等方性乱流では、剪断層が不安定性等で巻き上がる事で管状渦構造を形成、次に管状渦が相互作用により集団構造を形成する、2段階の自己組織化が行われる。この管状渦構造が散逸構造として本質的な役割を果たすと同時に、微細なスケールでの物質輸送等の役割も担う。管状渦の運動はビオ・サヴァール則による渦糸モデルで近似的に表現され、このモデルによって長距離相互作用を通じた管状渦構造の集団構造の形成などが説明される。本章では、乱流中の管状渦構造の旋回中心軸の同定手法を利用した渦のダイナミクス研究、渦構造への圧縮性の影響などについて述べる。

Keywords:

Navier-Stokes equations, decaying isotropic turbulence, tubular vortex, compressibility

2.1 はじめに

流体力学現象を記述する最も基本的な方程式はナビエ・ストークス方程式である。多くの場合、ナビエ・ストークス方程式とは非圧縮性流体の運動方程式を指すが、圧縮性流体方程式系一式、すなわち連続の式、運動量方程式、エネルギー方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) \mathbf{u} \right] = \Phi$$

(変数 ρ , \mathbf{u} , p , Φ はそれぞれ質量密度, 速度ベクトル, 圧力, 粘性・熱伝導項, γ , μ は気体の比熱比と粘性率) を指す場合もあり, ここでは後者の立場をとる。粘性, 熱伝導など散逸項がない場合にはオイラー方程式と呼ばれる。流体が圧縮性であれ非圧縮性であれ, ナビエ・ストークス方程式によって記述される組織構造は多彩である。例えば本章でとりあげる一様乱流の管状渦構造, 壁乱流におけるストリーク構造, ヘアピン渦などが挙げられる。また, レイリー・テイラー不安定性によって生じるマッシュルーム構造は, 核融合プラズマの交換/バルーニング不安定性に対応するので, 読者にも馴染み深いと思われる。

このように多様な現象の中で, 本章では一様等方性乱流の渦構造を紹介する。一様等方性乱流では, 統計的定常状態に達した乱流のあらゆる情報について, その統計平均が座標に依存せず (一様性), 特定の方向をもたないこと (等

方性) を仮定する。壁面など非一様性, 異方性の源から十分に離れ, コリオリ力など異方的な力も働かない系で十分に小さいスケールに注目すると, 一様等方性が近似的に成り立つものと期待される。(より詳細な一様等方性乱流の性質については参考文献[1,2]を参照されたい。)

一様等方性乱流はその高度に理想化された性質から, 専ら統計理論によるモデル化と数値シミュレーション, 中でも乱流モデルなどを用いず人為的要素を極力排する, 直接数値シミュレーションによって調べられてきた。工学の諸問題ではレイノルズ数が非常に高い場合が多いため, 乱流の数値シミュレーション研究でも高レイノルズ数の場合についての関心が高い。しかし, 直接数値シミュレーションで取り扱えるレイノルズ数は比較的低い値に限定される。これは, レイノルズ数が高くなるにつれて乱流の持つ自由度が劇的に増大するためである。近年ではスーパーコンピュータの能力も急速に増大しているものの, 格子点数 4096^3 の直接数値シミュレーション[3]でテイラー長レイノルズ数 $R_\lambda \approx 1200$ 程度である。この値は直接数値シミュレーションとしては非常に高いものの, 我々が直面する多くの自然現象や工学的諸問題のレイノルズ数に比べると十分に高いとは言えない。ましてや, 中程度の規模のスーパーコンピュータやワークステーションで計算できる乱流直接数値シミュレーションのレイノルズ数はもっと低い値に限定される。このため, 限られたレイノルズ数のシミュレーションに基づいて統計的性質を理解し, 高レイノルズ数の乱流の性質を予測すること, 高レイノルズ数の乱流シミュレーションに使われる乱流モデルの研究に役立てることが求められる。

本章で紹介する一様等方性乱流は、減衰性で、流体の弱い圧縮性が存在する場合である。減衰性乱流とは強制乱流に対置される言葉で、一様等方性外力で駆動される強制乱流に対して、強制力を加えずに次第に減衰する乱流を指す。減衰性乱流は強制乱流に比べてレイノルズ数が低い一方、流体の運動に強制外力による人為性が入らず、流体運動の機構が比較的明確であること、また、時間発展における減衰則を調べるのに適しているなどの特徴がある。以下、2.2において一様等方乱流の渦構造について紹介した後、本小特集の主題である長距離力の観点から渦・渦の相互作用を概観する。2.3では管状渦構造が乱流について果たす役割を、2.4では圧縮性の渦構造に対する役割について述べる。2.5はまとめである。

2.2 一様等方性乱流の管状渦構造と長距離力としての渦・渦相互作用

減衰性一様等方性乱流では、初期条件で与えられた剪断層がケルビン・ヘルムホルツ不安定性などで巻き上がり、管状渦構造が形成される。弱い圧縮性減衰性一様等方性乱流の数値シミュレーションの渦構造を図1に示す。図1(a)は、エンストロフィー密度 $|\omega|^2/2 = |\nabla \times \mathbf{u}|^2/2$ (ω は渦度ベクトル) の等値面で可視化したものである。(格子点数 1024^3 , テイラー長レイノルズ数 $R_\lambda \approx 45$, プラントル数 0.7 , 乱流マッハ数 $M_t \approx 0.4$. 詳細は論文[4]を参照。) 弱い圧縮性の影響で(理由は後述), 渦構造は同じレイノルズ数の非圧縮性乱流に比べて曖昧で、層状の等値面も見られるが、全体的には管状の等値面が多い。また、この3次元空間を多方向から眺めると、この等値面が密集している領域と比較的疎な領域の2種類あることがわかる。よりレイノルズ数の高い乱流シミュレーションではこの疎密が一層際立ち、エンストロフィー密度の高い領域が管状渦構造として集中しているだけではなく、多数の管状渦構造が密集して集団構造を形成する傾向が明確となる[5]。このような渦の集団構造は、図1(b)および次段落以降に示す渦の個別同定と渦糸モデルを通して理解可能である。

図1(b)では、乱流場の一部について、回転渦の旋回中心軸といくつかの旋回領域を、低圧力法[6-8]を用いて可視化した。旋回中心軸は細いフィラメントで表されている。低圧力法では、流体に作用する慣性力のポテンシャル部分が中心軸に近いほど低くなる性質を利用し、圧力のヘッセ行列の固有値・固有ベクトルから旋回中心軸を特定する(図2(a), 参考文献[6])。これらの旋回中心軸上では、旋回中心に対して相対的な速度が螺旋状になっている(相対速度を旋回面上に射影した流線が渦状点になっている)必要がある。いくつかの中心軸の周りに示した渦旋回領域は、この渦状点の外縁領域である[7]。

ここで、渦度 ω と渦の旋回運動を区別して表現していることに留意願いたい。これは渦度が流体スケールでの渦の旋回運動と剪断運動を区別できないことに起因している。この2種の運動はどちらも有限の渦度、すなわち速度場の回転として表現される(剪断は微視的な流体粒子の回転である)が、流体スケールで見た運動としては性質が異なる

ため、渦のダイナミクスを考える際には区別する必要がある。たとえば壁乱流において渦を渦度の強い領域として定義すると、壁付近の強い剪断と旋回運動による渦の区別ができず、乱流の素過程を調べるためには不都合である。図1(a)に示した一様等方性のエンストロフィー密度 $|\omega|^2/2$ の等値面でも、層状の等値面で示された領域の少なくとも一部は旋回運動ではなく剪断運動を表している。(剪断層の中央部に旋回運動が存在する場合もあり、自明ではない。) このような不都合を解消するため、低圧力法その他、 λ_2 -定義、Q-定義、 Δ -定義法など様々な渦の同定法が開発された。これらの同定法については、文献[8]とその引用文献を、低圧力法で同定された渦とエンストロフィー密度等値面の関係については文献[4, 6, 7]を参照されたい。

渦の中心軸を個別に同定する低圧力法は他の可視化法に比べて計算コストが高いが、個々の渦のダイナミクスを考

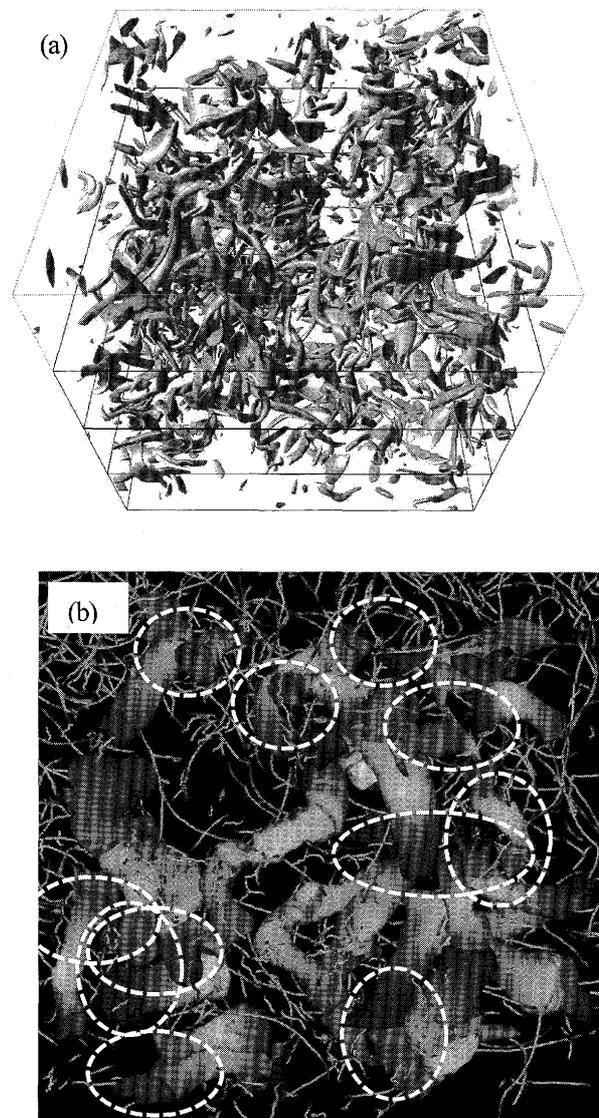


図1 一様等方性乱流の(a)渦度等値面、(b)旋回中心軸。等値面の閾値はエンストロフィー密度の平均値にその標準偏差の2倍を加えたものである。(b)では、乱流シミュレーションで得られた反平行渦対。渦の旋回領域のいくつかは、反平行で揃っている。典型的な反対称渦を破線で囲った。

える上で有用である。その事例の一つは、渦糸モデルとの対応である。一様等方性乱流では強い剪断力が働かないため、流体の巨視的な旋回運動が渦運動の過半を占める。この旋回運動を太さのない渦糸で理想化し、そのダイナミクスを考える。渦糸とは、管状の旋回運動領域を考え、旋回強度はそのままに、旋回半径を無限小に縮小したものである。この時、旋回強度を循環 $\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ で表す (図 2 (b))。積分は適当な閉曲線についての線積分である。この時、渦糸の循環と渦糸が作り出す速度場には以下のような関係がある：

$$\mathbf{u} = \frac{4\pi}{\Gamma} \int \frac{\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}(s))}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(s)|^3} ds = \frac{4\pi}{\Gamma} \nabla \times \int \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(s)|},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma \mathbf{s}.$$

速度についての積分式はよく知られたビオ・サヴァールの式であり、渦糸が周囲に誘起する速度の大きさは渦糸からの距離の二乗に反比例することがわかる。この意味で、ナビエ・ストークス方程式 (正確にはオイラー方程式) で記述される渦糸系は長距離相互作用を行う。

渦糸の挙動は、ビオ・サヴァールの式を用いた数値シミュレーションで調べられる。渦糸は自分自身が誘起する速度、あるいは他の渦糸との相互作用によって移動・変形する。渦度の向きが揃った平行な 2 本の渦糸は相互回転を行い、渦度の向きが逆 (反平行) の渦糸は相互に平行移動する。他方、渦糸が曲がっている場合、渦糸は自身の曲率半径方向と接線方向の両者に対して垂直な、陪法線方向へ速度を誘起し、自らの自己誘起速度によって移動する。他の渦糸 (あるいは少し離れた自分自身の一部) も曲がっていると、運動はさらに複雑化する。Siggia は一本の渦糸についてのビオ・サヴァールの法則に基づく数値シミュレーションを行い、渦糸が自己誘起速度による移動や、自分自身の他の箇所との相互作用による移動・変形の果てに、局所的に反平行な渦対を形成しつつ無限に近づいていくことを示した [9]。このような渦糸の反平行構造の形成は、図 1 (b) のような乱流中の反平行渦対の形成を説明している。乱流シミュレーションにおいて反平行渦対は容易に見つけられ [10-12]、その時間発展を追うと、Siggia の渦糸

シミュレーションと類似のプロセスを発見できる (但し、渦糸は非粘性なオイラー方程式の解であるため、十分に渦糸同士が近づいてからの運動は、ナビエ・ストークス方程式の解とは一致しないことに注意が必要である)。このことから、上記のような個別渦のビオ・サヴァール則に支配されたダイナミクスが巨視的な渦構造の集団構造を生み出していると考えられる。

なお、渦糸モデルとその数値シミュレーション、管状渦に発生する不安定性等については、Saffman [13] や福本 [14] に詳しい。渦糸が直線で 2 次元的に考えられる場合は点渦と呼ばれる。また、類似の問題として、超流動ヘリウムにおいて (旋回運動による循環ではなく) 空間のディフュクトによって循環が生じる、量子渦が挙げられる。点渦や量子渦については、本小特集の他章を参照されたい。

2.3 管状渦の役割

管状渦構造が乱流中で果たす役割として、ここでは二つを取り上げる。一つは、管状渦構造が高渦度領域を構成する一部であり、強いエネルギー散逸領域であるということである。もう一つは管状渦の旋回運動による物質の巻き込み、螺旋構造形成による剪断面積の増加等、微細スケールにおいて混合・輸送の役割を果たす点である。

管状渦構造の役割としてエネルギー散逸を考える場合、少なくとも二つの側面について検討する必要がある。一つは、高レイノルズ数の極限でのエネルギー散逸率の振る舞いであり、もう一つは、やはり高レイノルズ数の極限で管状渦構造が乱流に対して果たす役割である。既に述べたが、乱流の直接数値シミュレーションで扱うことができるレイノルズ数は限定されている。このため、実現可能な直接数値シミュレーションのデータの蓄積から、高いレイノルズ数での振る舞いを推定することになる。

乱流の主要な粘性散逸構造は高渦度領域である。粘性散逸は摩擦力による熱の発生源であるなど、重要な役割を果たす。また、非圧縮性流体の場合に興味深いことには、粘性項が存在しない 3 次元オイラー方程式の解が有限時間で発散するのに対し、3 次元ナビエ・ストークス方程式では高レイノルズ数の極限 (すなわち、粘性率 μ がゼロの極限) でも解が発散しないと考えられるため、高レイノルズ数極限でのエネルギー散逸率の果たす役割が注目される。直感的にはレイノルズ数無限大の極限でナビエ・ストークスの解がオイラー方程式の解に漸近しても良いように思われるかもしれないが、レイノルズ数が大きくなるにつれて強渦度領域が全空間に占める体積が小さくなる一方、渦度の強さ (エンストロフィー密度) がそれ以上の速さで大きくなれば、エネルギー散逸率は有限値になる。事実、これまでの非圧縮性一様等方性乱流のシミュレーションから、エネルギー散逸率は一定値に漸近すると見られており [3]、ナビエ・ストークス方程式の数値解は、高レイノルズ数の極限でオイラー方程式の数値解に漸近しそでない。これはオイラー方程式とナビエ・ストークス方程式の決定的な違いである。圧縮性乱流の場合には非圧縮性流体の場合と方程式の型が異なり、オイラー方程式を解く場合には解の微

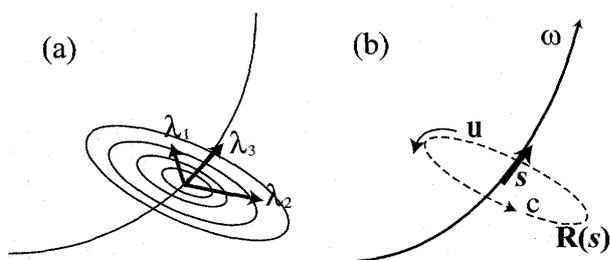


図 2 (a) 管状渦の中心軸の同定。同心円状の輪郭は流体に作用する慣性力のポテンシャル部分 P の等高線。非圧縮性一様等方乱流では圧力と等価であり、渦中心軸に近づくほど低圧力。太い矢印は、 P のヘッセ行列の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有方向。(b) 渦糸の模式図。破線は循環を計算する際の経路。渦糸の太さは無限小である。

分不連続性を許して弱解を考えるなど、若干事情が異なる。しかし、過度に起因するエネルギー散逸率が高レイノルズ数の極限で有限値へと収束する性質は、圧縮性乱流の数値シミュレーションの立場からも重要である。

管状渦構造が散逸に果たす役割は、管状渦構造が全空間に占める体積と、管状渦構造内部に集中する過度の強さの兼ね合いで決定される。JiménezとWrayは過度、渦の長さ、渦の半径などの R_λ 依存性の評価から、高レイノルズ数の極限で管状渦の役割は限定的なものになると評価した[15]。しかし、直接数値シミュレーションによる管状渦構造の体積のレイノルズ数依存性[16]や、管状渦構造の周囲に存在する螺旋状の散逸構造(次段落参照)を加味した評価[17]から、管状渦の役割は高レイノルズ数の極限でも重要であると考えられる。

散逸と並び重要な役割である物質の混合・輸送は、管状渦構造の形成や運動、上に述べた螺旋状の散逸構造と深く結び付いている。たとえば初期に平面状の渦層があるものとする。これがケルビン・ヘルムホルツ不安定性などを通じて図3(a)のように螺旋渦構造をとる(この過程で歪速度テンソルによる渦伸長が行われる)ことで、剪断層の面積は増加する。乱流中の燃料と酸素の混合などでは、この渦巻き構造の形成で燃料・酸素の接触面が増加し、混合が促進されると考えられる。管状渦周辺の螺旋構造の形成機構には、主にLundgrenによるもの[18]と、KidaとMiuraによる二重螺旋機構[19]の2種類が考えられる。このような渦が混合・輸送に対して果たす役割はパッシブスカラーのシミュレーションで、一層直接的に見られる。図4にはパッシブスカラーを伴う非圧縮性乱流の数値シミュレーション結果(名古屋工業大学渡邊威先生、後藤俊幸先生提供)を示す。黒色のエンストロフィー密度で渦構造を表現している。明るい灰色の等値面はパッシブスカラーである。パッシブスカラーの等値面が渦構造に巻き取られる姿が見られる。また、パッシブスカラーの値をより詳細に調べると、大規模渦の内部で比較的平坦な分布をもち、渦構造の外側で大きく変化することがわかっている[20]。

管状渦は更に、自己速度誘導等による集団構造の形成を通じて散逸や輸送に寄与する。すでに述べたように、管状渦構造は反平行渦対を形成しつつ密集するため、図3(b)に模式的に表わされるような、2対4本の反平行渦束がしばしば形成される[4,12]。このような渦束が形成されると、速度場は破線矢印の方向に引き伸ばされるため、そこに強い剪断層が形成され、これが更なる乱流混合・輸送の

役割を担う。このような渦による有限質量粒子の輸送と確率過程に関する研究も行われている[21]。

2.4 渦と圧縮性

工学的に重要な問題のいくつかでは、圧縮性が重要な役割を果たす。圧縮性はマッハ数が0.3~0.4を越えるあたりから顕著になる。航空機、高速車両に関する流れの多くやジェットエンジン、スクラムジェットエンジンなどの内部流れは圧縮性を考慮して調べられなければならない。圧縮性を伴う乱流シミュレーションでは、パラメータ領域によって流体の非圧縮性成分と圧縮性成分の役割が異なるため、注意が必要である。特に減衰性一様等方性乱流では初期条件の取り方によっていくつかの異なる時間発展があり得ることが知られており[22]、初期密度揺らぎを一定にし、非圧縮性に近い挙動を示す初期条件を選ぶと、渦と弱い圧縮性の相互作用を見ることができる。

弱い圧縮性の管状渦構造への明確な影響の一つは、渦伸長の低下に起因する過度の低下である[4,12]。3次元の流体運動では、歪速度テンソル $S_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ による渦伸張効果が過度を強化し、乱流の発達を促す。この伸張効果は、歪速度テンソル S_{ij} を成分とする 3×3 実対称行列の、正の固有値に対応する固有方向に引き延ばすことで過度を強化し、負の方向には弱めるものである。非圧縮性流体の場合、3つの固有値の和が常にゼロとなるため、正の固有値が大きい場合には負の固有値の大きさも大きくなる。したがって、有限過度領域は渦の伸張効果によって引き延ばされると同時に薄くなり、過度が強くて薄い渦層が形成される。このように薄くて強い過度は不安定となりこれが渦層の不安定性につながる。(たとえばケルビン・ヘルムホルツ不安定性を考えると良い。)圧縮性流体の場合には、3つの固有値の和について制約がないため、渦伸張が生じてても有限過度領域は負の固有値の方向にあまり薄くならず、結果としてケルビン・ヘルムホルツ不安定性を起こすような強い渦層の形成には至りにくくなる。また、流体の運動エネルギーの幾分かは回転成分から圧縮性成分

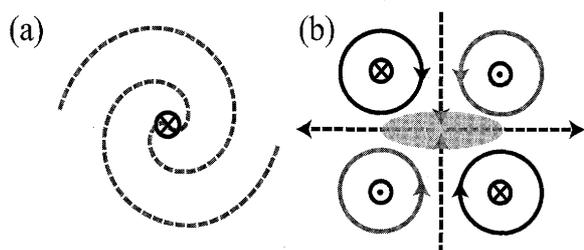


図3 (a)渦の螺旋構造による接触面の模式図。(b)反平行渦対のクラスター化に伴う剪断層の形成。

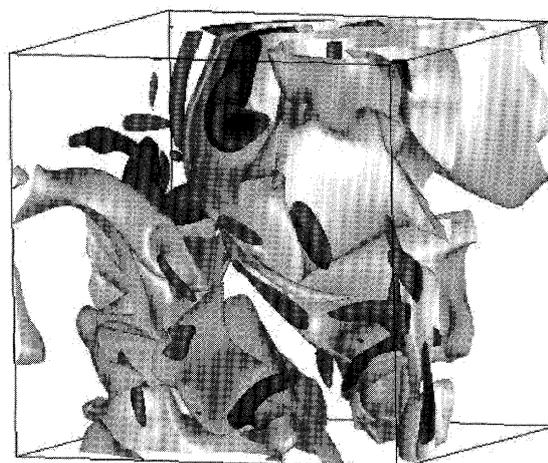


図4 非圧縮性一様等方乱流における、管状渦によるパッシブスカラーの巻き込み。(提供:名古屋工業大学 渡邊威先生、後藤俊幸先生)

に移され、圧力・速度発散相関などを通じて熱エネルギーとの交換が行われるが、これも渦度の成長を抑制する要因となる。このように、圧縮性乱流では非圧縮性乱流に比べて管状渦構造が形成されにくい性質がある。図5は、エンストロフィー密度の確率密度関数を、同じレイノルズ数の非圧縮性乱流と圧縮性乱流で比較したものである。高エンストロフィー密度イベントの発生頻度が圧縮性によって低下していることが明確にわかる。

圧縮性流体の最も顕著な性質の一つは音波の存在であり、高渦度領域である管状渦構造も音波の影響を免れない。音波の管状渦に対する影響は、渦の中心軸上での渦伸張やエンストロフィー密度を調べることでわかる。図6(a)は、同じレイノルズ数、異なるマッハ数下で成長した渦の中心軸上の渦伸張 $\partial u_{\parallel} / \partial x_{\parallel}$ (\parallel は渦中心軸に平行な方向) を、同じ初期条件から出発した非圧縮性乱流の渦中心軸のそれと比較したものである。非圧縮性乱流の渦伸張は一本の渦中心軸上で緩やかに変化しているのに対して、圧縮性乱流での渦中心軸は比較的短い周期での振動を有し、また、圧縮性が強くなるにつれて渦伸張の効果が弱くなっていることがわかる。また、渦中心軸に限らず、乱流場全体について調べてみても、渦伸張が弱くなることわかる。このことから、圧縮性によって乱流場の渦伸張が低下し、マッハ数が大きくなるにつれて旋回渦の回転が低下することは明らかである。

渦伸張の強度はマッハ数の関数として低下するが、渦中心軸上に現れる振動の波長は必ずしもマッハ数の関数とはならない。渦中心軸上の振動の周期の確率密度関数(PDF)を調べたのが図6(b)である。両対数でプロットしたPDFを非圧縮性乱流の場合について見ると、PDFがベキ分布を持つ領域が現れる。これは、渦中心軸上の渦伸張の変動波長には特別なスケールがないことを示しており、乱流の慣性小領域に特別なスケールが存在しないことと対応していると考えられる。他方、圧縮性乱流の場合には、特定の波長(概ねコルモゴロフ長の10倍程度、渦旋回直径と同程度)を中心に鋭いピークが現れる。このことは、渦中心軸上の渦伸張に、渦の直径程度の波長をもつ波動が発生していることを示唆している。この由来はそれほど明確にはなっていないが、現在のところ、これは渦直径と密接な関係を持っていること、この波動の周期・伝播速度の関係には音波の分散関係に類似した部分と、非圧縮性の渦波の分散関係に類似した部分とが交じり合っていることが示されている[23]。

2.5 まとめ

一様等方性乱流の管状渦構造の特徴のいくつかを、渦の中心軸の可視化とこれに関連する話題という観点から述べた。一様等方性乱流の最近の研究では圧力揺らぎの構造や、パッシブスカラーや有限質量粒子の輸送等の観点から研究されることが多いが、圧縮性の渦構造への影響もまだ必ずしも十分に理解できていない。特に減衰性の圧縮性乱流では、初期条件の選択次第で全く性質の異なる時間発展経路を辿る場合があるため、より網羅的な研究が必要に

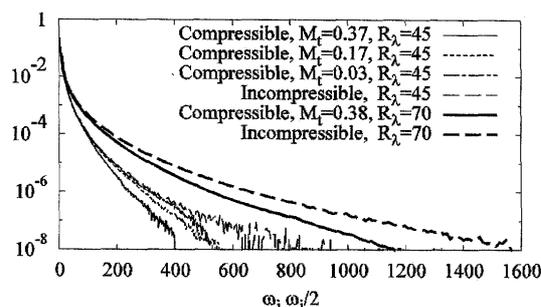


図5 弱い圧縮性を伴う減衰性一様等方性乱流と、同レイノルズ数の非圧縮性一様等方性乱流におけるエンストロフィー密度のPDF. 乱流マッハ数、テイラー長に基づくレイノルズ数について比較した。

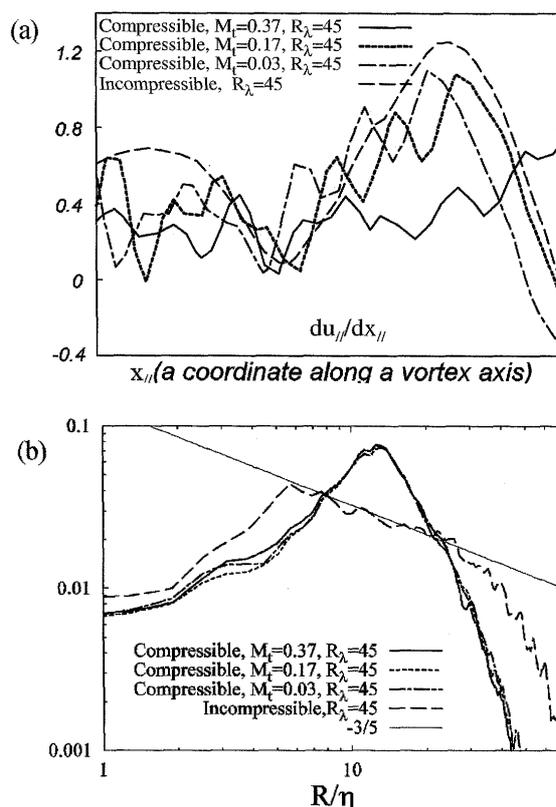


図6 弱い圧縮性をもつ乱流および、これと同じレイノルズ数の非圧縮性乱流における渦中心軸上の(a)渦波の波形サンプル、(b)波長のPDF(両対数グラフ)。記号 η はコルモゴロフ長を表す。

なる。また、パッシブスカラー輸送、有限質量粒子の輸送は、燃焼流や大気汚染物質の輸送等重要な問題とも関係するため、圧縮性流体の問題としても重要である。このような問題に取り組むためにも、一層の高いレイノルズ数をめざした大規模な直接数値シミュレーションを行っていく必要がある。

最後に、この原稿を書く機会を与えていただきました静岡大学の八柳先生に感謝します。また、名古屋工業大学の渡邊威先生、後藤俊幸先生にはオリジナルの画像を提供していただきました。ここに感謝の意を表したいと思います。

参考文献

- [1] 木田重雄, 柳瀬眞一郎著: 乱流力学(朝倉書店, 1999)。

- [2] W.D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence* (Oxford Science Publications, 1990).
- [3] Y. Kaneda, T. Ishihara *et al.*, *Phys. Fluids* **15**, L21-L24 (2003).
- [4] H. Miura, *J. Turbulence* **5**, (2004).
- [5] Y. Kaneda and T. Ishihara, *J. Turbulence* **7**, N20 (2006).
- [6] H. Miura and S. Kida, *J. Phys. Soc. Japan* **66**, 1331 (1997).
- [7] S. Kida and H. Miura, *J. Phys. Soc. Japan* **67**, 2166 (1998).
- [8] S. Kida and H. Miura, *Europ. J. Mechanics - B/Fluids* **17**, 471 (1998).
- [9] E. Siggia, *Phys. Fluids* **28**, 794 (1985).
- [10] S. Kida, H. Miura and T. Adachi, *Intermittency in Turbulent Flows*, ed. J.C.Vassilicos (Cambridge University Press, 2001).
- [11] S. Goto and S. Kida, *Fluid Dyn. Res.* **33**, 403 (2003).
- [12] H. Miura, *Comp. Phys. Comm.* **147**, 552 (2002).
- [13] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, 1992)
- [14] 福本康秀:ながれ **24** (2005)-**25** (2006) (連載記事).
- [15] J. Jiménez and A.A. Wray, *J. Fluid Mech.* **373**, 255 (1993).
- [16] S. Kida and T. Makihara, *Proc. International Symposium on Dynamics and Stability of Coheret Structures in Turbulence: Roles of Elementary Vortices* (ed. S.Kida, 2002) 229.
- [17] G. Kawahara, *Phys. Fluids* **17**, 055111 (2005).
- [18] T.S. Lundgren, *Phys. Fluids A5*, 1472 (1990).
- [19] S. Kida and H. Miura, *J. Phys. Soc. Japan* **69**, 3466 (2000).
- [20] T. Watanabe and T. Gotoh, *J. Fluid Mech.* **590**, 117 (2007).
- [21] L. Chen, S. Goto and J.C. Vassilicos, *J. Fluid Mech.* **553**, 143 (2006).
- [22] P. Sagaut and C. Cambon, *Homogeneous Turbulence Dynamics* (Cambridge University Press, 2008).
- [23] H. Miura, *Advances in Turbulence* (ed. H.I.Andersson, P.-A. Krogstat, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain, 2004) p.115.