

小特集 カオスと同期現象の科学－プラズマ科学の新しい視点－

3. 液晶対流系におけるカオスと同期現象

日 高 芳 樹

九州大学大学院工学研究院

(原稿受付：2012年5月24日)

対流系はカオスの実験研究の対象として重要な役割を果たしてきた。特に液晶に電場を印加したときに生じる電気対流は、液晶の特質を生かしてさまざまな時空カオスを観察することができる。その一つが秩序構造の一部が乱流化する時空間欠性である。本章では、パラメトリック変調に対する同期現象によって時空間欠性を秩序化する時空カオス制御についての実験研究を紹介する。

Keywords:

spatiotemporal chaos, spatiotemporal intermittency, controlling chaos, nematic liquid crystal

3.1 対流系とカオス

2枚の平行平板間に挟んだ流体を下から熱すると対流（熱対流）が生じる。平板のサイズが平板間の距離に対して十分に大きいと、対流の循環的な流れ構造（ロール）が規則的に配列した秩序構造が現れる。これは非平衡開放系の「散逸構造」の典型例であり、非平衡・非線形物理学の研究対象として多くの研究が行われてきた。

そのような研究の一つに散逸系のカオスがある。カオスの物理学的観点からの研究と対流系は歴史的に密接な関係がある。たとえば、バタフライ効果やストレンジアトラクターといったカオスの重要な概念が提示された「Lorenzモデル[1]」では、気象を熱対流によってモデル化し、秩序構造の振幅の時間変動を表す常微分方程式が導出された。また、ロジスティック写像の示すカオスへの遷移過程（周期倍分岐）において制御パラメータの示す関係から得られる「Feigenbaum定数」が実験的に検証されたのも熱対流系であった[2]。

対流系は本来、空間自由度をもつ大自由度系だが、Lorenzモデルでは、対流構造の時間変動が空間的にはコヒーレントに起こると仮定することによって対流系を少数自由度にしている。実験的に少数自由度系を作るためには、平板間の距離 d に対する平板の大きさ L の比（アスペクト比： $\Gamma=L/d$ ）を小さくする。ロールのサイズ λ は d 程度なので、 Γ は系内のロールの数に相当する。 Γ が小さければ系内の空間的コヒーレンスは保たれる。Feigenbaum定数の検証をはじめとしたカオスの実験研究もこのような小アスペクト比系で行われた。

3.2 液晶電気対流

対流は液晶に電場を印加することによっても生じる。こ

の液晶電気対流は、熱対流と比べて実験研究における多くのメリットがあるため、散逸構造の研究対象として様々な研究が行われている。

液晶は棒状の分子が一方向にそろった有機物である[†]。分子の重心の位置はランダムなので流体としてふるまうが、分子配向の秩序があるので弾性や異方性といった結晶的な性質ももつ。分子の配向を表す単位ベクトルを「ディレクタ」とよび、 $\mathbf{n}$ で表す。この液晶を透明電極の塗布された2枚の平行平板ガラスの間に挟むことによって観察する（図1(a)）。電極表面に施された配向処理により、 $\mathbf{n}$ を均一に x 方向に向けることができる。また電場の方向を z とする（ $\mathbf{E}=(0,0,E)$ ）。

液晶は通常誘電体とみなされるが、不純物イオンによって弱い導電性を示す（図1(b)）。その際の導電率は異方性をしめす。すなわち、 $\mathbf{n}$ に平行な方向の電場に対する値 $\sigma_{\parallel}$ と垂直な方向の値 $\sigma_{\perp}$ が異なる。電気対流は $\Delta\sigma=\sigma_{\parallel}-\sigma_{\perp}>0$ の液晶で起こる。 x 方向に流れる電流は、

$$J_x = \sigma_{\parallel} E_x + \Delta\sigma \theta E \quad (1)$$

と表される。ここで、 θ は $\mathbf{n}$ の x 軸に対する角度を表す。

熱的な揺らぎによって $\theta \neq 0$ になると、第2項によって x 方向に電流が流れ、電荷の蓄積が起これ E_x を生じる。しかし θ は弾性によって緩和し、蓄積電荷も(1)式の第1項によって緩和する。ところが E があるしきい値以上になると、蓄積電荷が電場に引きずられて流れを引き起こし、 $\mathbf{n}$ にトルクがはたらくため θ は緩和しなくなる。したがって J_x が増加するので蓄積電荷も緩和しなくなる。そのため流れはますます成長し、最終的に定常な対流にまで至る。このようなフィードバック過程は電極の間隔 d 程度の特定の波長に対してのみはたらくため、対流ロールが x 方向に周

[†] 液晶にはいくつかの種類があるが、本章ではNematic液晶のみを扱う。

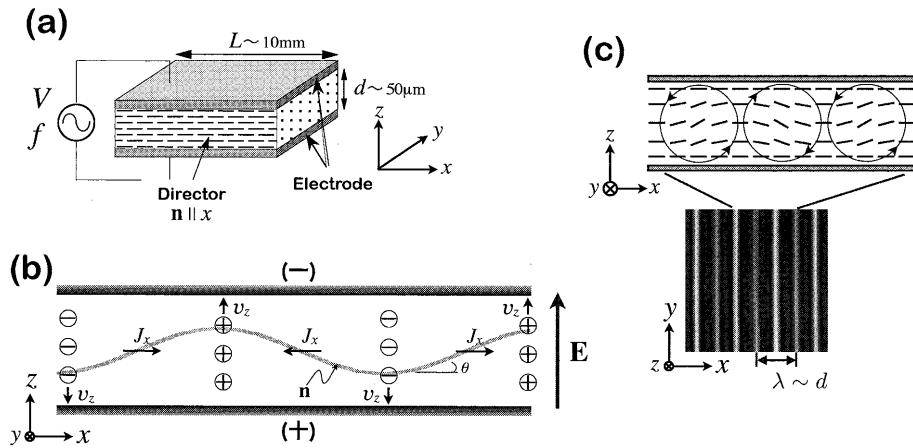


図1 液晶電気対流。(a) サンプルセル。(b) 電気流体力学的不安定性。(c) 対流構造の可視化。

期的に配列した散逸構造が形成される。この状態では、対流からのトルクによって $\mathbf{n}$ も x 方向に周期的な変調を受ける。このようにして $\mathbf{n} \parallel x$ で流れのない平衡状態が不安定になることを「電気流体力学的不安定性」とよぶ。液晶は屈折率の異方性ももつため、 $\mathbf{n}$ の周期的な変化は屈折率の周期的な変化を導く。これによって対流周期構造は偏光によって容易に可視化され、 x - y 面内のストライプパターンとして観察される (図1 (c))。

液晶電気対流は、発見当初は液晶物理学の問題としてとらえられていた。しかし、このようにパターンの可視化が容易なこと以外にも、制御パラメータが電圧なので温度差に比べ扱いやすいことや、配向制御によって系の対称性を変えられること、配向と対流の相互作用によって多彩な非線形現象を呈することなど様々な利点をもつため、現在は散逸構造の非線形物理の研究対象として活発な研究が行われている。

液晶電気対流では、帯状にエッチングした電極を交差させるという簡単な方法で小アスペクト比 (少数自由度) 系を作ることができる[3]。この場合、印加電圧の上昇とともに、ストライプパターンが不安定化してロールの y 軸からの傾き角の周期振動 (リミットサイクル) が生じ、さらに準周期振動 (トーラス) [3] や間欠的遷移を経てカオスへ至る過程が観測されている。

しかし、配向制御によって一様な系が作りやすいことや、応答時間が短いことから、むしろ大アスペクト比 (大自由度) 系が作りやすいことが液晶電気対流の利点である。大自由度系では、ストライプパターンが不安定化するとロールの揺らぎによって欠陥が生じる。この欠陥は不規則に生成・運動・消滅を繰り返すので、この状態は「欠陥乱流」とよばれる[4] (図2)。

欠陥乱流は「時空カオス」の一種である。つまり大自由度系では、リミットサイクルは現れず時空カオスへ直接転移する。時空カオスは、相軌道 (アトラクター) の特徴 (フラクタル構造と正の Lyapunov 指数) によって定義される「カオス」のように厳密な定義はないが、ストライプパターンの不安定化によって生じた揺らぎの相関距離 ξ (欠陥乱流の場合は欠陥間の平均距離) が、ロールのサイズ λ より

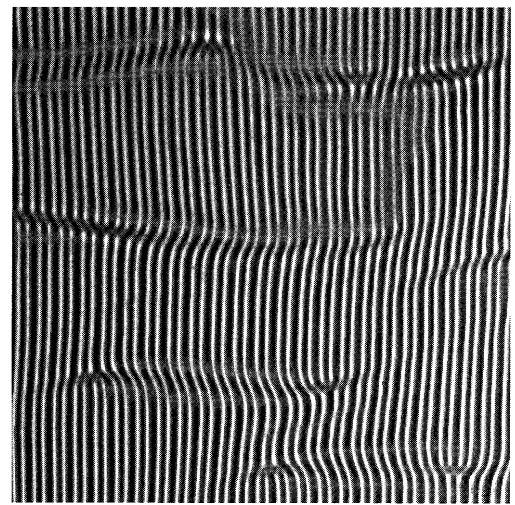


図2 欠陥乱流。

十分に長い状態を時空カオスとよび、 ξ が λ より十分に短い「発達乱流 (fully-developed turbulence)」と区別される。つまり、局所的な秩序を保ったまま長波長の揺らぎが生じている弱い乱れを時空カオスとよぶ。カオスも通常はリミットサイクルから生じる弱い乱れを考えるが、カオスを観測する小アスペクト比系は系のサイズ L が ξ より短いので、空間的なコヒーレンスが保たれているといえる。液晶電気対流では、欠陥乱流以外にも、ソフトモード乱流[5] や時空間欠性 (後述) などの時空カオスが生じる。

以下では、液晶電気対流における時空カオスと同期現象の観点から興味深い現象を紹介する。

3.3 欠陥格子と時空間欠性

印加電圧の周波数が比較的高い場合、欠陥乱流の欠陥はスキュードバリコース不安定性によって生じる[6]。欠陥乱流では欠陥は x 方向に広く横断 (グライド運動) するが、印加電圧の上昇によって対流と配向の相互作用による別の不安定性 (アブノーマルロール不安定性) が生じると、グライド運動が狭い領域内に制限されるようになる。その結果、欠陥の運動は凍結し、欠陥が周期的に配列した「欠陥格子」とよばれる高次秩序パターンが現れる[7] (図3)。

欠陥の周期構造は平衡系にも見られるが（例えば第二種超伝導体の磁束格子やスメクチック液晶のTGB相[8]）、非平衡開放系に現れる欠陥格子は、平衡系の静止安定構造とは異なり、 $f_0=1$ Hz 程度のリミットサイクルを伴う[9]（図4）。このリミットサイクルの発生機構については、次のように振動化学反応[10]とのアナロジーが成立する。上述したように、液晶電気対流では、 $\mathbf{n}$ の初期配向が x 方向だと対流ロールが x 方向に並ぶ（ロール軸は y 方向）。ところが、液晶の粘性率の異方性によりディレクタは対流からトルクを受け、 y 方向へ向けて回転しようとする。印加電圧が低いと配向処理によって回転は抑えられているが、電圧が高くなると対流からのトルクが強くなって回転を始める。ロールの向きはディレクタの向きによって決まるので、ディレクタの回転はロールの向きを回転させる。このロールの回転が再びディレクタの向きを変える。このようにしてストライプパターンは不安定化するが、この過程は、対流を活性化因子、配向（ディレクタの回転）を抑制因子とし、Hopf不安定性が起こっているものとみなすことができる。

さらに、欠陥格子の1つのユニットが擬似的な小アスペクト比系となっているため空間自由度が抑えられ、このHopf不安定性によってリミットサイクルが現れたと考えられる。1つのユニットが振動子としてふるまうので、欠陥格子は連続媒質に自発的に形成された離散的結合振動子系であるとみなすことができる。このリミットサイクルの振動数は、印加電圧とともに上昇するが、一定電圧に対しては系内ではほぼ一様である。ただし振動の位相は不均一

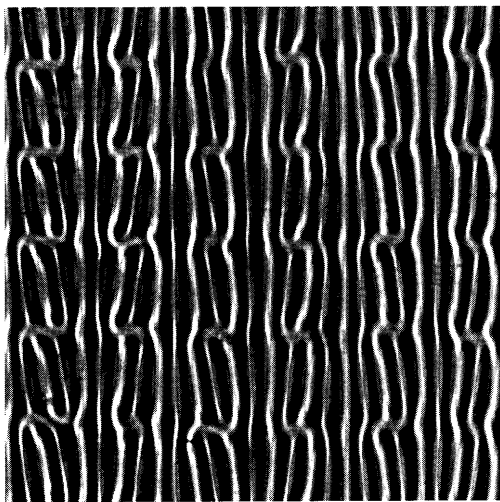


図3 欠陥格子。

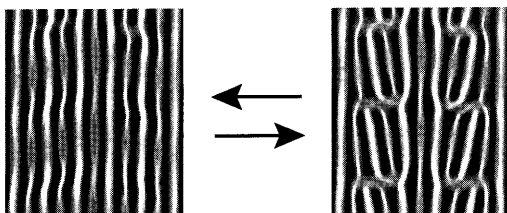


図4 欠陥格子における振動。

で、また振動自体が間欠的に現れたり止まったりする[9]。

このような欠陥格子の状態からさらに印加電圧を上げていくと、格子の一部が崩壊して乱流になり、秩序（格子）領域と無秩序（乱流）領域が共存した「時空間欠性」の状態となる（図5(a)）。時空間欠性は、熱対流系[11]や磁性流体[12]などの実験系だけでなく、カオスを示す写像系を格子状に並べて拡散的に結合させた「結合写像格子（Coupled Map Lattice）[13]」などの理論モデルにおいても見られる普遍的な現象で、時空カオスの一典型例として盛んに研究されている。

時空間欠性のパターンから、局所的な空間スペクトルを用いた画像解析によって、空間の各点を2つの状態（格子または乱流）に分けることができる（図5(b)）。そこから得られる観察領域に対する乱流領域の面積比 S_T が、時空間欠性の状態を表す指標となる。 S_T は電圧上昇とともに増えていき、最終的に全領域が乱流になる。

3.4 時空間欠性の共鳴制御

カオスに関する研究の一分野に、系の状態をカオスから秩序状態へと近づけるカオス制御がある。その手法は、系の時間遅れ信号を利用するフィードバック制御[14, 15]と、周期外力を付加的またはパラメトリックに与える共鳴制御[16]に大別される。これまでの研究から、少数自由度系ではカオス制御を効果的に行うための時間遅れの間隔や与え

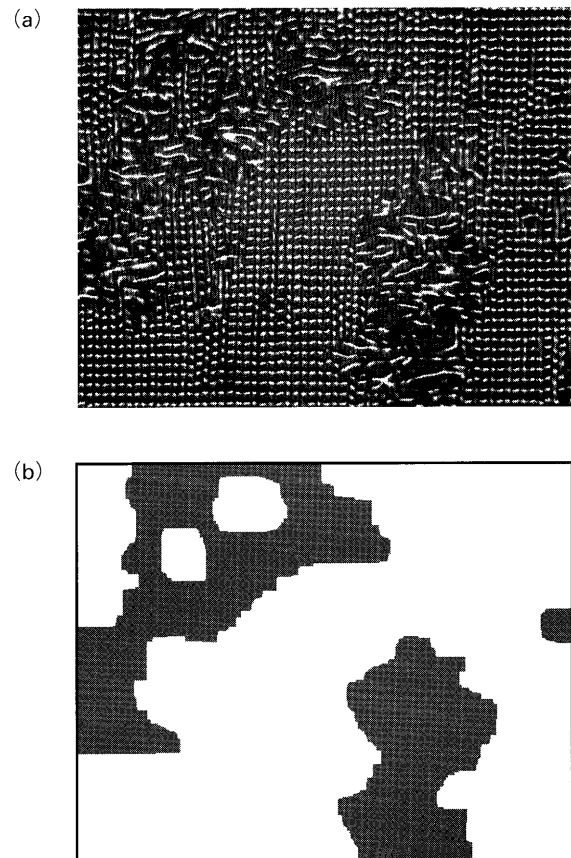


図5 (a)欠陥格子の時空間欠性。(b)(a)の2値化。白が格子領域、グレイが乱流領域を表す。

る周期外力の振動数に関する理解は得られている。近年、これをさらに時空カオス制御へ拡張する試みが始まっており、時空カオスを示す系に周期外力を加えた理論モデルなどが提案されている。時空カオス制御の研究から得られた成果は、他の流体系や化学反応拡散系など空間自由度をもつ非線形系への応用が期待され、多くの理論的、実験的研究が必要とされている。しかし時空カオス制御に関する実験的研究は、現在までのところあまり行われていない。

通常の液晶電気対流の実験では $f=1$ kHz 程度の正弦波交流電圧（実効値 V ）

$$V(t) = \sqrt{2}V \cos(2\pi ft) \quad (2)$$

を印加するが、ここでは次のような振幅 a_m 、周波数 F_m の振幅変調を加えた交流電圧

$$V(t) = \sqrt{2}V \left[1 + \frac{a_m}{2} \cos(2\pi F_m t) \right] \cos(2\pi ft) \quad (3)$$

を時空間欠性を示す系に印加した。これは制御パラメータに対する変調なので、一種のパラメトリック変調である。液晶電気対流は、電圧制御の精度の高さおよび系内へ伝わる効果の速さから、このようなパラメトリックな周期外力の効果を調べる研究に適している。実験の結果、図6に示すように S_T が徐々に減少し、格子が再形成する現象が見られた。これは時空カオス制御が実現されていることを意味し、特に時空間欠性に対する制御としては初めての例である[17]。

一般に振動子の共鳴現象では、与える外力の周波数が振動子の固有振動数と等しいときに振動子の振幅が最大になる。つまり振動子の振幅の外力振動数依存性を表す共鳴曲線では、振動子の固有振動数と等しい位置にピークが現れる。そのことを念頭に置いて、パラメトリック変調と時空カオス制御の関係を調べるために、 F_m を変化させながら、振幅変調印加後の格子領域の面積比 $S_{DL} (= 1 - S_T)$ を測定した。まず初期状態を $S_{DL} = 70\%$ 程度とした。この初期状態に、それぞれの F_m に対して $a_m = 2\%$ の振幅変調を与えた後、一定時間経過したときの S_{DL} を図7に示す。このように、変調を与えることによって最大で S_{DL} が97%まで増大している。また格子領域のリミットサイクルの振動数 f_0 と同じ振動数で変調を与えた場合に S_{DL} が最も大きい。図7の結果は、 S_{DL} を指標とした一種の共鳴曲線とみなせる。また、振動子である格子の1つのユニットがパラメトリック変調に対してどのように振る舞うかを観測すると、静止した格子に振動が誘導されるのが確認される。一方、すでに振動状態にある格子は、変調の位相に引き込まれることが明らかとなった[17]。このことから、格子がパラメトリック変調に同期することによって、格子領域に隣接する乱流領域に格子が再形成され、その結果、乱流領域が減少すると考えられる。

3.5 まとめ

液晶電気対流の時空間欠性に対する共鳴制御の実験研究の結果について紹介した。一般にカオスは、リミットサイ

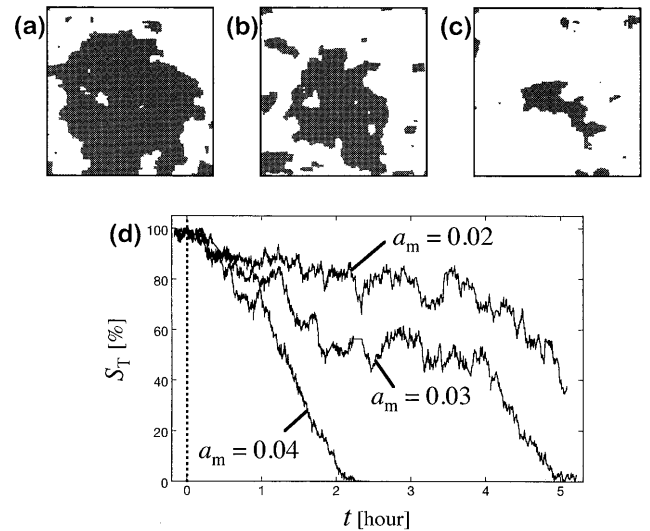


図6 時空間欠性の制御過程。(a)初期状態。(b)1500 s 後。(c)6000 s 後。(d)初期状態 ($S_T = 97\%$) からの S_T の時間変化。

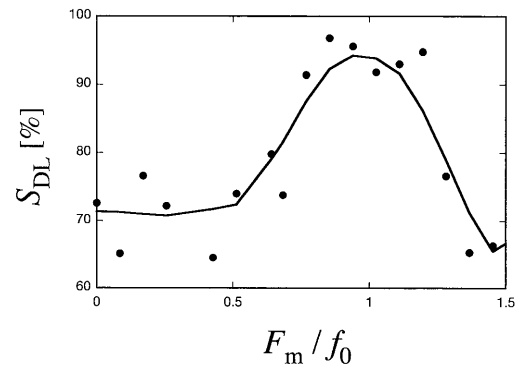


図7 時空間欠性制御の共鳴曲線。

クルが不安定化して発生し、カオス状態でもそのリミットサイクルの振動数が比較的強い成分として残っている。共鳴カオス制御では、そのリミットサイクルの振動数と等しい周波数の外力を印加することによってリミットサイクルを再安定化させることによって行われる。一方、欠陥格子の時空間欠性では、疑似的少数自由度系であった格子の個々のユニットがカオスを示すことによって乱流化するのではなく、格子自体が融解して実効的自由度が高くなることによって乱流が発生すると考えられる。このことは、乱流領域では通常のカオスとは違って f_0 が顕著な振動数として現れていないことからわかる。また、制御の過程を詳細に観察すると、乱流領域内で核発生的に欠陥格子領域が発生することはなく、境界部分の乱流状態が格子に変化することによって制御が進んでいることがわかる。つまり、本章で述べた時空カオス制御の特徴は、時間的な同期が空間的な相互作用を介して空間的秩序構造を再形成している点にある。

そのような空間的な相互作用は、液晶配向が本来もつ長距離相関、すなわち弾性によって実現されると考えられる。変調がない状態では、秩序領域の対流もディレクタも空間的にインコヒーレントに振動している。変調によって対流振幅が振動すると、対流-ディレクタ間の相互作用に

よってディレクタのコヒーレントな振動も生じる。この秩序領域のコヒーレントな振動は、弾性的相互作用を通じて境界付近の乱流状態のディレクタと強く相互作用し、乱流状態をコヒーレントな周期振動状態に変える。このような過程によって秩序構造が再生されると考えられる。

本章は及川典子氏（はこだて未来大学）との議論に負うところが大きい。ここに謝辞を述べる。

参考文献

- [1] P. Bergé, Ch. Vidal and Y. Pomeau (相澤洋二 訳) : カオスの中の秩序 (産業図書, 1992).
- [2] A. Libchaber, S. Fauve and C. Laroche, *Physica* **7D**, 73 (1983).
- [3] Y. Hidaka, H. Orihara and Y. Ishibashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 3950 (1992).
- [4] S. Kai and W. Zimmermann, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **99**, 458 (1989).
- [5] Y. Hidaka, K. Tamura, S. Kai and W. Zimmermann, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **161**, 1 (2006).
- [6] S. Nasuno, O. Sasaki, S. Kai and W. Zimmermann, *Phys. Rev. A* **46**, 4954 (1992).
- [7] N. Oikawa, Y. Hidaka and S. Kai, *Phys. Rev. E* **70**, 066204 (2004).
- [8] T. C. Lubensky, *Physica A* **220**, 99 (1995).
- [9] N. Oikawa, Y. Hidaka and S. Kai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, 2917 (2004).
- [10] 蔵本由紀 編: リズム現象の世界 (東京大学出版会, 2005).
- [11] S. Ciliberto and P. Bigazzi, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 286 (1988).
- [12] P. Rupp, R. Richter and I. Rehberg, *Phys. Rev. E* **67**, 036209 (2003).
- [13] K. Kaneko, *Physica D* **34**, 1 (1989).
- [14] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
- [15] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto and J. N. Weiss, *Science* **257**, 1230 (1992).
- [16] Y. Braiman and I. Goldhirsch, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2545 (1991).
- [17] N. Oikawa, Y. Hidaka and S. Kai, *Phys. Rev. E* **77**, 035205 (R) (2008).