

## 小特集 コーシー条件面(CCS)法によるプラズマ位置形状再構築

# 2. コーシー条件面(CCS)法の原理

## 2. The Principle of the CCS Method

栗原 研一

KURIHARA Kenichi

日本原子力研究開発機構核融合研究開発部門

(原稿受付：2014年9月29日)

プラズマの位置形状制御を行う一般化された体系の中で、問題の定式化を行う。与えられた情報を前提にした時、原理的に CCS 法が解析解の形式を維持していることから、与えられたセンサーの下で最も尤もらしいプラズマ位置形状を与える。また、どのような磁気センサーが位置形状同定の必要十分条件になるのか、といった計測条件を導くまでの応用にも言及する。さらに渦電流など未知電流が近傍にある場合等の存在がどのように CCS 法と連成されるのかについても解説する。最後に CCS 法の精度について、現在でも単独或いは EFIT の前段等多くの装置で実施されているフィラメント電流近似法との大規模な比較データを提示するとともに、多くの重要で本質的な質問について Q&A 形式で解説を試みる。

### Keywords:

plasma equilibrium control, plasma shape reproduction, partial differential equation, analytical exact solution, Green's function, boundary condition, Cauchy condition surface

### 2.1 プラズマ位置形状再構築問題の設定

トカマク型プラズマ核融合装置は、円環状外部強磁場と環状電流による磁場との合成による螺旋状の磁力線が、端のない多層の円環面構造を形成する点にこのトカマク型装置の特徴がある。この独特の磁力線構造こそが、プラズマ内に高いエネルギー閉じ込め状態の実現を可能にしていると考えられる。

トカマク型装置では、プラズマ中で2つの観点からの力の平衡が重要な要素であることが知られている。第1番目の平衡は、プラズマ内部の空間のミクロ的な各点において成立している力の平衡である。ポロイダルアルフベン時間より長い時間スケールでは常に、電磁力 ( $j \times B$ ) と圧力勾配 ( $\text{grad } p$ ) が釣り合っており、力学平衡が成立しているとみなせる。一方、第2番目の平衡は、空間的に見ると、よりマクロ的な観点での平衡、即ち円環プラズマ全体に係わる力の平衡である。ドーナツ状のプラズマは外側に膨らむ方向のマクロ的な力があるため、外部のポロイダル磁場 (PF) コイルによる垂直磁場で容器内に留めておく、即ちマクロ的な力学平衡が必要である。通常 PF コイルにより、プラズマの位置や形状、プラズマ表面と容器壁との距離等を希望の状態に制御する。

このような平衡プラズマの実験解析や制御には、まず計測信号からプラズマ位置形状全体像、平衡制御対象諸量 (プラズマ電流、位置形状、プラズマ表面と壁との距離等)、内部諸量 (内部インダクタンス等) を高精度同定することが必要である。実験装置の進展と新たな実験上の要求

を満たすために、計算機の著しい進歩を背景に高度化が繰り返されてきた[1]。

実験炉 ITER や、それに先立つサテライトトカマク TJ-60SA で計画されている実験でも、炉心プラズマの総合性能向上に果たす位置形状再構築の役割は益々増しており、原型炉でのより厳しい炉心環境においても一層の高度化が期待されている。この平衡状態の真空場を同定 (再構築) する CCS 法について、特に数理的な観点で紹介して行こう。

### 2.2 プラズマ平衡解析問題の基本共通概念

解析対象の特徴を整理しておこう。イオンと電子から成るプラズマ粒子は磁力線周りをラーマー回転しながらトラス中を運動している。1本の磁力線が織りなす面 (= 磁気面) とプラズマ粒子軌道の旋回中心が横たわる面とが近似的に同一となるため、プラズマと外部の真空領域との境界は、最も外側の磁気面、即ち最外殻磁気面で規定される。ここで、磁気面はプラズマ中で多層殻構造であることを前提としている。

CCS の原理の解説では、対象の体系はトロイダル方向に一様であること、即ち2次元軸対称が近似的に成立していることとする (図1参照)。勿論厳密には軸対称とは言えない。トロイダル磁場コイル間の磁場リップルやプラズマ中の閉じた磁力線に沿ってヘリカル構造の磁気島が発生する場合などがあり、これらは軸対称ではない。これらの非軸対称性は、量的に小さかったりプラズマの回転等により

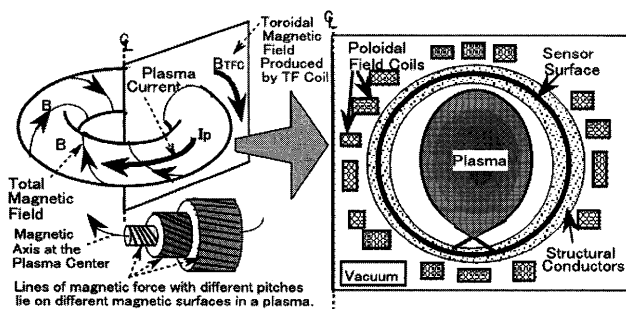


図1 トカマクプラズマ平衡解析のトポロジー概念。

時間平均的な状態として軸対称とみなせる場合が多いと考えられる。

2次元軸対称近似を前提としたトカマクプラズマ平衡解析の構成要素は、図1に示すとおり、トロイダル方向に周回電流を保持するプラズマおよび他の導体、プラズマ周りに装着された電磁気センサー、PFコイルと極めて単純な構造となる。真空容器等の構造物が受動導体として存在しており、プラズマやコイルの変動磁場で励起された電場で渦電流が駆動され、しかも通常分布は観測が不可能であることから、平衡解析でも重要な要素となる。CCS法の原理の説明では、その存在を無視することにし、後で触れることにする（詳しくは3章、4章を参照）。使用する計測量は、これまでの研究開発で最も信頼性の高い電磁気計測、即ち磁場（=磁束密度）、磁束、プラズマ電流、PFコイル電流、等を考える。

### 2.3 磁束関数の積分形式解析解の導出[1]

プラズマ電流およびコイル電流が作る電磁気量を計測し、ポロイダル断面上でプラズマ内外の磁場（磁束）分布を再構築することが平衡解析である。プラズマ電流やコイル電流の時間変化で渦電流が励起されるが、変位電流が無視できるので静的な電流場の解析である。したがって、電流分布  $\mathbf{j}$  と磁場  $\mathbf{B}$  とからなる定常場の Maxwell 方程式

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

が基礎方程式である。 $\mu_0$  は真空の透磁率。(2)式から、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  となるベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}$  を導入し、(1)式に代入して、 $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}$  と変形する。さらにトカマクの軸対称性（トロイダル方向の空間偏微分  $\partial/\partial\omega = 0$ ）と Coulomb ゲージ  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  を考慮して、磁束に比例する関数「磁束関数」 $\phi$  ( $\equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_\omega$ ,  $\mathbf{A}_\omega$ :  $\mathbf{A}$  のトロイダル方向成分) とトロイダル方向の電流密度  $j_\omega$  との関係を表す次の2階偏微分方程式が得られる。磁束  $\phi$  (Wb) と磁束関数  $\phi$  との関係は、 $\phi = 2\pi\phi$  である。

$$\text{div} \left( \frac{\text{grad } \phi}{r^2} \right) = -\frac{\mu_0 \cdot j_\omega}{r} \quad (3)$$

ここで、 $r$ : トカマク体系対称中心軸からの距離。

ある点での磁束関数値  $\phi$  の勾配 ( $r$  および  $z$  方向微分) と  $r$  方向、 $z$  方向のポロイダル磁場（磁束密度）と

$\mathbf{B}_{\text{pol}} \equiv {}^t(B_r, B_z)$  とは、以下に示す関係がある ( $t$  は転置を表す)。

$$\mathbf{B}_{\text{pol}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \text{grad } \phi \quad (4)$$

ここで偏微分方程式の境界値問題の解法として Green 関数解法を採用する。この解法は、Green 関数（斉次型偏微分方程式を満たす空間2点間の応答関数で、微分演算子を用いるとデルタ関数となる関数）を使用して微分演算子を完全に外し、適切な領域での積分を含む形式に変換して解析解を構成する。そこに境界条件を適用して解を完成させる。

今問題にしている式(3)の Green 関数  $G(x, y)$ ,  $x \equiv {}^t(r_x, z_x)$ ,  $y \equiv {}^t(r_y, z_y)$  は次式である。

$$G(x, y) \equiv G(r_x, z_x, r_y, z_y) \\ = \frac{4}{k} \sqrt{r_x \cdot r_y} \left\{ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) \cdot K(k) - E(k) \right\}, \quad (5)$$

$K(k)$ ,  $E(k)$ : 第1種および第2種完全楕円積分,  $k^2 \equiv 4r_x r_y / \{(r_x + r_y)^2 + (z_x - z_y)^2\}$ 。

この Green 関数を用いて、(3)式を積分形式に変換すると次式が得られる。

$$\sigma \phi(x) + \int_{\partial\Omega} [G(x, y) \cdot \text{grad } \phi(y) - \phi(y) \cdot \text{grad } G(x, y)] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} = \int_{\Omega} \mu_0 j(y) \cdot G(x, y) \frac{dV(y)}{r_y} \quad (6)$$

ここで、 $\sigma \equiv \{8\pi^2(x \in \Omega), 4\pi^2(x \in \partial\Omega), 0(x \in (\Omega + \partial\Omega) \text{ 以外})\}$ ,  $\Omega$ : 電流源を含む全領域,  $\partial\Omega$ : 領域を囲む境界。

この領域の選び方によって、様々な有用な関係式が得られることは後の各論で触れるが、例えば、 $\Omega$  をプラズマ、境界  $\partial\Omega$  をプラズマ最外殻磁気面、とすれば、プラズマ電流密度分布と内部の磁束関数との関係が得られる。境界  $\partial\Omega$  は同じで、 $\Omega$  をプラズマを除く領域に置けば外側領域の磁束関数の解析が可能となる。この式から、今考えている問題に存在する幾つかの興味深い性質を読み取ることができる。まず、第2項は境界上での面積分（プラズマ軸対称系では線積分に変換）になるが、この境界で必要な値は、磁束と磁束密度に関係する量  $\phi$  および  $\text{grad } \phi$  であり、しかも磁束密度は境界の面素（線素）の方向成分であることがわかり、このことは計測器の設置条件に繋がる。次に、観測点  $x$  を境界上の点をとるように扱えば、境界積分方程式が得られ、未知数間の制約条件を課すことが本方法の再構築精度が高い要因の一つである。

出発点の Maxwell 方程式(1), (2)とそれを軸対称性を用いて変形した(3)式では、磁束関数と磁束密度に微分演算子  $\text{rot}$  や  $\text{div}(\text{grad}/r^2)$  が作用した形式であったが、Green 関数を用いることにより、この積分形式の解析解が得られ実質的な逆演算がなされたことと等価となっている点は重要である。

平衡解析に係わる3物理量（電流・磁束密度・磁束）と

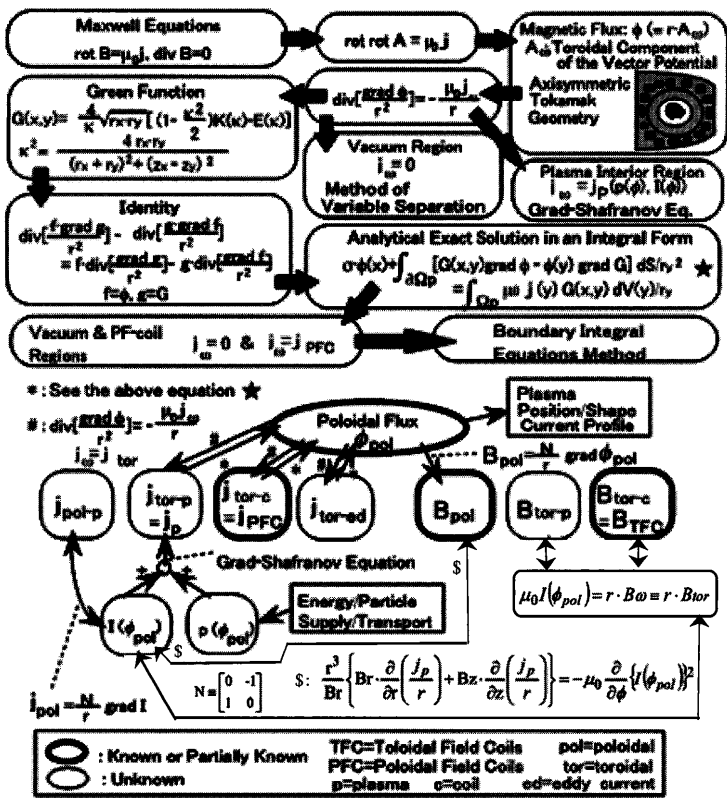


図2 トカマクプラズマ平衡解析における物理量の関係。

それらを関係付ける式を関係図の形で図2に示す。参考文献[1]の同様の図を改訂してある。

### 2.4 コーシー (Cauchy) 条件面法

磁束関数の積分形式解析解を基礎に、具体的な位置形状解析法の分類を行い、それぞれ特徴の整理を試みる。平衡解析で主要なパラメータは、相互に或いは計測量と図2で示した関係をもっているのを、これを利用して磁束関数分布を求め位置形状を再構築することになる。

プラズマ電流分布が一意に再構築できれば、プラズマ全領域の磁場分布が計算でき、結果として位置形状も再構築できることになるが、これは未だ完全には答えが出ていない(本章付録Q1参照)。一方、プラズマを解析領域の外に出した穴の空いた領域を用いることで、プラズマ電流分布を求めずに、位置形状の一意再構築を可能とした方法が、境界積分方程式法[2]であり、その解析領域の工夫から、センサー曲面上での面(線)積分を回避した方法が、Cauchy条件面法[3]である。ここでは図3のような一般化した軸対称系を考える[1]。

Green関数を用いた偏微分方程式解法は、解が近似表現ではない点で、高精度が期待できる最大の特徴である。しかも、面(線)積分の部分で自然な形で境界条件や計測条件を組み込むことができる。積分形式の解は式(6)で表現できるが、どの領域にこの式を適用し、どこに観測点を置くかによって、様々な積分方程式を構成することができる。

軸対称トカマクプラズマの場合、ポロイダル断面内に3つの閉曲線が考えられる。計測器を設置する閉曲線  $\partial\Omega_s$ ,  $\partial\Omega_s$  に含まれるプラズマ側の閉曲線  $\partial\Omega_p$ , 全体を包含す

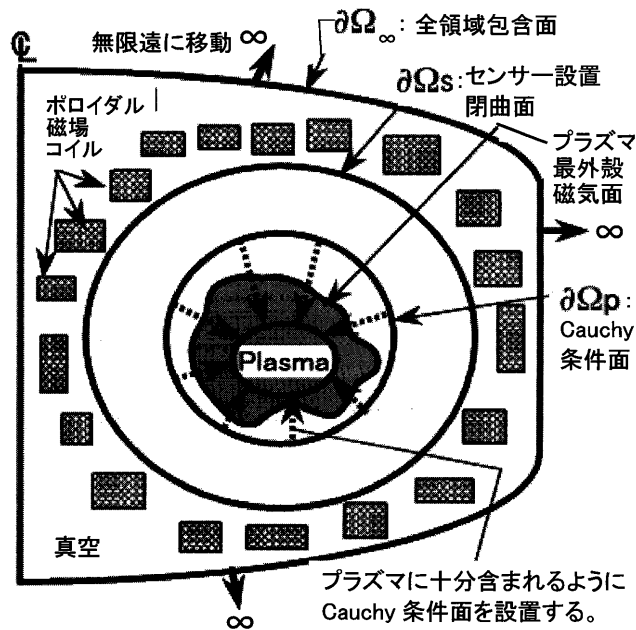


図3 Cauchy条件面法のトポロジー概念(2次元軸対称系)。

る閉曲線  $\partial\Omega_\infty$  の3閉曲線である(図3参照)。この3平面の中の2閉曲線によって構成される領域に、式(7)を適用する。電流としては、PFコイル電流やその他の既知の電流を前提とする。なお、想定されるプラズマ内に  $\partial\Omega_p$  面を充分含まれるように設置することが要求される。方程式解法上は、プラズマが  $\partial\Omega_p$  面よりさらに内側にあるとして真空場を拡張し、その拡張した真空場中に必ず存在する筈のプラズマ表面の条件をもつ磁気面を探索する。その探索したプラズマ表面と  $\partial\Omega_p$  面との間の領域は、解析上は真空とし

て扱うわけである。

まず、境界積分方程式法は以下の3領域への適用による3方程式に基づく。

方程式①： $\partial\Omega_\infty - \partial\Omega_s$  領域で、観測点を  $\partial\Omega_s$  上： $\partial\Omega_s$  上での磁束と磁束密度との関係。

方程式②： $\partial\Omega_s - \partial\Omega_p$  領域で、観測点を  $\partial\Omega_s$  上： $\partial\Omega_p$  上および  $\partial\Omega_s$  上での磁束と磁束密度との関係。

方程式③： $\partial\Omega_s - \partial\Omega_p$  領域で、観測点を  $\partial\Omega_p$  上： $\partial\Omega_p$  上および  $\partial\Omega_s$  上での磁束と磁束密度との関係。

これら3つの境界積分方程式から、 $\partial\Omega_p$  上での磁束と磁束密度が算出され、これにより  $\partial\Omega_\infty - \partial\Omega_p$  領域で磁束が計算できるようになり、プラズマ表面磁束値の等高線を探査すれば、この領域に含まれるプラズマ最外殻磁気面が再構築できる。実際の計算機処理では、どの領域においても、次の同じ形式の離散化した方程式に変換され、1次ベクトル方程式の解法に帰着する。

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M W_\phi(x, z_i) \cdot \phi(z_i) + \sum_{i=1}^M W_B(x, z_i) \cdot B_t(z_i) + W_c(x) \quad (7)$$

ここで、 $\phi$ 、 $B_t$  はそれぞれ離散点での磁束と接線方向磁束密度、 $W_\phi$ 、 $W_B$ 、境界上の磁束、境界上の磁場から点  $x$  での磁束への応答、 $W_c$  は点  $x$  でのコイルが作る磁束、 $x \in \Omega$ 、 $z_i \in \partial\Omega$  である。

計測点設置面  $\partial\Omega_s$  上の計測量への条件を緩和するために、 $\partial\Omega_p$  上での磁束と磁束密度（即ち Cauchy 条件：閉曲線上で Dirichlet 型条件（磁束）および Neumann 型条件（磁束密度）を互いに独立に規定する条件の型）を最小2乗法で求める次の Cauchy 条件面法は、どの種類の計測であっても計測点の数に応じた精度が得られるという意味で、合理的な方法といえる。

方程式④： $\partial\Omega_\infty - \partial\Omega_p$  領域で、観測点は計測点： $\partial\Omega_p$  上での磁束と磁束密度との関係。

方程式⑤： $\partial\Omega_\infty - \partial\Omega_p$  領域で、観測点を  $\partial\Omega_p$  上： $\partial\Omega_p$  上での磁束と磁束密度との関係。

1番目の方程式④は、 $\partial\Omega_p$  上の離散点での磁束と磁束密度を未知変数とし、計測点数分構成できる積分方程式である。2番目の方程式⑤は、 $\partial\Omega_p$  上の離散点での磁束と磁束密度を未知変数とし、境界積分方程式である。これらを連立して  $\partial\Omega_p$  上での磁束と磁束密度が算出され、前述と同様にプラズマ最外殻磁気面が同定できる。

これらを解析領域と対比し、図4に示す（文献[1]より引用）。図中の式番号は上の各方程式番号に対応している。

Cauchy 条件面法は、同定安定性、精度共に高く、 $\partial\Omega_p$  面の位置形状が同定精度に及ばず影響は小さく、如何なる形状のプラズマも同定対象となり、総プラズマ電流も同定結果から計算可能、等々、実験解析への応用に好ましい特徴を多くもっている。

JT-60U および ITER への CCS 適用例を正解のサンプル平衡との重ね描きで図5、図6に示す。

Method Item	Boundary Integral Equation Method			Cauchy Condition Surface Method	
Equation#	①	②	③	④	⑤
Region for Analysis					
Surface	$\partial\Omega_\infty$ $\partial\Omega_s$ $\partial\Omega_p$	$\partial\Omega_s$ $\partial\Omega_p$	$\partial\Omega_s$ $\partial\Omega_p$	$\partial\Omega_p$	$\partial\Omega_p$
Current (ic)	PF Coils	None	None	PF Coils	PF Coils
Boundary Integral Eq.	Yes	Yes	Yes	No	Yes
Variables	$\phi(\partial\Omega_s)$ $B_t(\partial\Omega_s)$ $\phi(\partial\Omega_p)$ $B_t(\partial\Omega_p)$	$\phi(\partial\Omega_s)$ $B_t(\partial\Omega_s)$ $\phi(\partial\Omega_p)$ $B_t(\partial\Omega_p)$	$\phi(\partial\Omega_s)$ $B_t(\partial\Omega_s)$ $\phi(\partial\Omega_p)$ $B_t(\partial\Omega_p)$	$\phi(\partial\Omega_p)$ $B_t(\partial\Omega_p)$	$\phi(\partial\Omega_p)$ $B_t(\partial\Omega_p)$

$B_t(\partial\Omega) = n \cdot \text{grad } \phi(\partial\Omega)$ . (Known = ○, Unknown = ●, Partially Known = ☆)  
 ★ : The observation surface is indicated by a thick line

図4 扱う領域と構成できる方程式との関係。  
（境界積分方程式と Cauchy 条件面法と対比。番号は本文中の方程式番号に対応。）

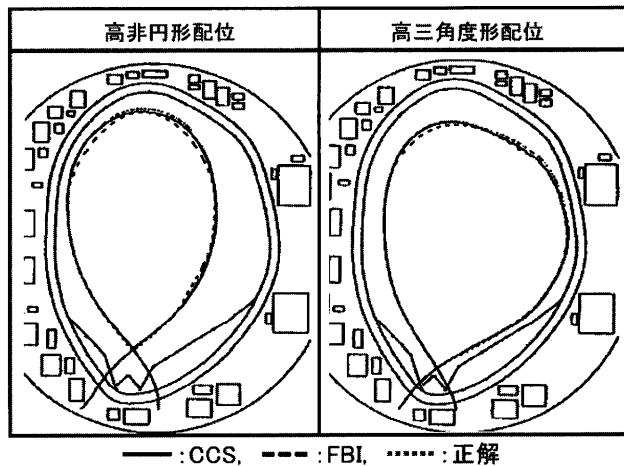


図5 JT-60U プラズマへの CCS 法の適用例。  
（CCS法と正解との誤差は非常に小さい。FBI法には大きい誤差がみられる。）

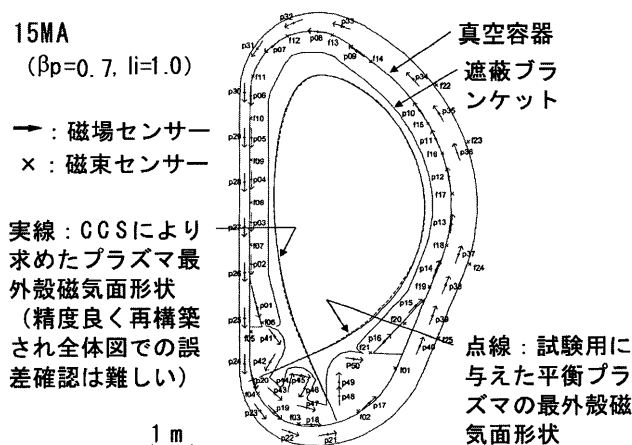


図6 ITER プラズマへの CCS 法の適用例。

## 2.5 プラズマ電流重心位置の計算法

プラズマ位置形状再構築のためには、Cauchy 条件面が対象プラズマに十分含まれることが絶対条件となる。磁気面同定という観点で代表点として考えられることは、層状の磁気面の中心として定義される磁気軸である。内部の磁

束分布は今のところ議論の対象としていないこともあり、プラズマ電流の重心を求め、その近くに Cauchy 条件面の中心を設置することとした。サイズは、その位置と真空容器との相対位置からプラズマに十分含まれるサイズを選択するアルゴリズムとした。

トカマクプラズマの制御のために、各種方法が考案された中でプラズマの位置の中心を検出する方法があったが、ここでは磁束 ( $2\pi\phi$ ) および接線方向の磁場 ( $B$ ) センサーから繰り返し計算などを要せず直接的に求める方法として新たに考案した相関係数積法を以下に説明する[4]。

相関係数積法は、以下の手順である：

(a) 予め1本の単位電流を流すフィラメント電流をあるノード ( $N_r, N_z$ ) に置いた時にセンサー設置位置に発生する磁束、磁場の値  $X_i(N_r, N_z)$  を計算し、対応づけて格納しておく。ここで ( $N_r, N_z$ ) はそれぞれ  $r$  方向、 $z$  方向のノード番号である。

(b) 実際の測定値  $Y_i$  に対して、磁束および磁場それぞれに分けて各フィラメント電流ノードが作る磁束および磁場の相関係数  $\eta_\phi^2(N_r, N_z)$  および  $\eta_B^2(N_r, N_z)$  を計算する。即ち、

$$\eta_\phi^2(N_r, N_z) \text{ および } \eta_B^2(N_r, N_z) = [\Sigma(X_i - X_{av}) \cdot (Y_i - Y_{av})] / [\Sigma(X_i - X_{av})^2 \cdot \Sigma(Y_i - Y_{av})^2], \quad (8)$$

ここで、 $X_{av}$  および  $Y_{av}$  は、それぞれ  $X_i$  および  $Y_i$  の平均値を示す。

(c) 相関係数の積  $\eta_\phi^2 \times \eta_B^2$  を最大にするフィラメント電流ノード ( $N_{r_{\max}}, N_{z_{\max}}$ ) を電流重心とする。

JT-60U での適用では、 $R$  方向  $\times$   $Z$  方向それぞれ 7 cm, 10 cm 間隔で 20 点  $\times$  20 点のノードを採用し、求めた電流重心に縦長楕円形状の Cauchy 条件面を置く。なお実時間制御への適用で高速性が要求される場合には、Cauchy 条件面毎に全ポロイダル断面上の各点の磁束を、センサー計測値ベクトルと各点毎に固有の定ベクトルとの内積で計算できることに着目し、その定ベクトルを予め計算し格納しておく。

なお、この電流重心と磁気軸とのサンプル平衡データの位置比較では文献[4]に示したように概ね一致している。特に磁気軸の  $Z$  方向位置としては精度のよい近似として使うことが可能である。その場合、より連続的な意味で電流重心を必要な場合には、離散ノードの内挿を行う。

## 2.6 プラズマ位置形状の可同定性

プラズマ最外殻磁気面位置形状は、電磁気計測だけで厳密に同定可能かどうか？またどのような電磁気センサーが必要か？という問題は核融合装置の設計段階において最も重要な課題の一つである。偏微分方程式 (3) は「楕円型」に属し、解の決定条件は、(3) の右辺にある電流分布が既知であるという前提下で「Dirichlet 条件（この場合磁束計測に対応）または Neumann 条件（磁束密度計測に対応）のどちらかが全境界上で与えられた時に一意に解が確定する」とされている。しかし、解析領域として電流分布が未知のプラズマを含めると先の前提条件に適合しない。この

可同定性条件は、Green 関数を用いた解法において、プラズマを解析領域の外に出した穴の空いた領域を用い、積分経路に工夫を施すことで導出される。ここでは図 3 のような一般化した軸対称系を考える。

式 (6) における左辺積分計算で境界上での  $\phi$  および  $\text{grad}\phi$  が必要となることに加え、式 (6) 右辺積分計算で領域内  $j$  が必要であることからわかるように、可同定条件に関係する物理量は、電流 ( $j$ )、磁束密度 ( $B$ )、磁束 ( $2\pi\phi$ ) である。特に、磁束密度として要求されているのは計測器設置曲線の接線成分である。計測器設置曲線（通常真空容器壁）がプラズマを囲み、プラズマ以外の電流源はこの曲線のプラズマ側電流 ( $j_{\text{in}}$ ) と外側電流 ( $j_{\text{out}}$ ) に存在するものとする。この構成での可同定条件は、プラズマの内部状態には無関係に以下となる。

(a) 外側電流源 ( $j_{\text{out}}$ ) が既知であれば、この 2 量は互いに従属。センサーは片方でよい。

(b) 外側電流源 ( $j_{\text{out}}$ ) が未知の場合、プラズマ側電流 ( $j_{\text{in}}$ ) が既知であれば、この 2 計測量からプラズマ形状は可同定である。

(c) プラズマ側電流源 ( $j_{\text{in}}$ ) が未知の場合、順解析等何らかの方法で  $j_{\text{in}}$  を先に算出することが必要である。プラズマ形状と同時に逆解析で扱えるかどうかは議論が必要である（第 3 章で触れる）。

具体的には、磁束密度接線成分  $B_s$  と磁束  $\phi_s$  の 2 種類が設置された場合の装置に当てはめることで、例えば図 7 に示す 3 ケースの可同定条件を導くことができる。

## 2.7 Cauchy 条件面 (CCS) 法のマクロ諸量の精度評価

CCS 法の精度を評価するため、これまで最も実績のある方法との比較が最も感覚的に理解しやすいと思われることから、6 本のフィラメントでプラズマ電流による真空場を表現する「フィラメント電流近似法 (FBI 法)」との比較を行う。

FBI 法は、CCS 法と同様に電磁気計測器を用いて予め設定した 6 本のフィラメント電流値と垂直磁場、水平磁場コイル電流値を決める方法である。この方法は、これまで JT-60 ではショット評価におそらく最も多く使用されている方法である。このフィラメント電流の設置位置は同定精度に及ばず影響が大きいので、予め設定した有限個の設置位置のフィラメントセットでは、全放電時間のプラズマを

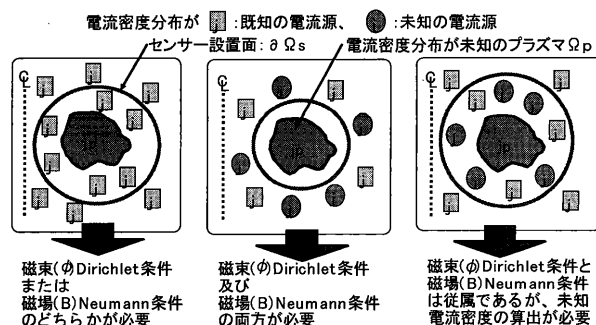


図 7 プラズマ最外殻磁気面形状の可同定条件（磁束  $= 2\pi \times$  磁束関数）。

カバーすることはできないことが知られていた。勿論、毎回任意のフィラメント電流設置位置を求めることは算法も含め難しいと考えられる。また、FBI法は、分布電流がわずかに6本の線電流で近似できる根拠を含め理論的裏付けが全くないながら、円形断面プラズマの場合にはよい精度で同定する方法であり、これまで世界的に見ると開発元のGAとそこで開発されたEFITの初段で使用されている方法である。

比較方法は、JT-60 平衡データベース（様々な平衡配位からなるデータ集合で高三角度配位5063ショット、高非円形配位1372ショット）を入力として、CCS法（以降「CCS」）とFBI法（以降「FBI」）の方法で最外殻磁気面全体形状を求めた後、各種マクロパラメータを計算し、それらと元の平衡データベースの真値とを比較することでそれぞれの精度等を比較する。各種マクロパラメータとは、幾何学水平中心( $R_p$ )、磁気軸垂直位置( $Z_p$ )、X点の水平位置( $R_x$ )、真空容器最下部からのX点高さ( $X_p$ )、水平ランチャーとプラズマ表面距離( $\delta_0$ )、三角度( $\delta$ )、断面頭頂部水平位置の幾何学中心水平位置 $R_p$ からのずれを小半径で規格化)、ラムダ値 (Shafranov  $\Lambda + 1 = \beta_p + l_i/2$ , ここで  $\beta_p$  はポロイダルベータ値,  $l_i$  は内部インダクタンス)、総プラズマ電流( $I_p$ )他、である。この時の使用センサーは、接線方向磁気プローブ12本、磁束ループ15本と全コイル電流である(詳しい位置は[5]参照)。

表1に、CCSとFBIの両方法により同定された各種マクロパラメータを統計処理して、真値からの誤差に関する標準偏差を示す。表2に、CCSとFBIの両方法により同定されたラムダ値の真値に対する誤差、プラズマ電流値誤差の平均値、標準偏差を示す。平衡データベースに含まれる高三角度配位および高非円形配位それぞれの全てのケースについて、CCSおよびFBIによる全体像の同定を実施し

た。CCSでは同定失敗はなかったが、FBIでは、良好に終了したケースについてだけ比較図や平均値/標準偏差計算に使用し、同定失敗ケースはデータとして使用しないようにした。

以上の結果から次の評価ができる。

- (1) 実時間制御用全平衡パラメータ値について、CCSの方がFBIよりも高い精度で同定する。高非円形配位の場合の方が、高三角度配位より楕円度が増すためその傾向は著しい。
- (2) この平衡データベースの範囲では、CCSでは同定失敗はなく、一方FBIでは高三角度配位で約2%、高非円形配位で約20%の同定失敗ケースが存在する。CCSの方がロバストである。
- (3) ラムダ値については、CCSが僅か真値より平均的に過小評価する。一方のFBIは平均的に過大評価し、その傾向は高三角度配位の場合に著しい。
- (4) プラズマ電流については、CCSでは、磁気プローブと磁束ループの信号からの従属情報として計算され、その平均誤差+/-標準偏差は通常のログスキーコイル計測のS/N比から想定される計測誤差1-2%よりも小さいので、プラズマ電流は、過渡期を除いて計算で求まる量になる。過渡期でもセンサーの数が多ければ(JT-60Uの体系での検討では40-50個程度)、原理的に渦電流の効果を排除することもできるが、既設のセンサー数では渦電流を積極的に考慮することが必要。
- (5) 断面全体像の再構築傾向は、FBIの場合には、特に高非円形配位に対して、6本のフィラメント位置近くの磁気面で凸、フィラメント間の磁気面で凹に同定する。既に適用限界を超えている非円形度である可能性が高い。

表1 平衡データベースを入力とした CCS と FBI との比較。  
各位置形状マクロパラメータの同定誤差に関する標準偏差値。

位置形状 マクロ量	テスト 平衡配位	高三角度配位 5063ケース (内ダイバータ1195)		高非円形配位 1372ケース (内ダイバータ503)	
		CCS 同定失敗：無し	FBI 同定失敗：105ケース	CCS 同定失敗：無し	FBI 同定失敗：257ケース
$R_p$		1.29 cm	2.27 cm	0.95 cm	8.49 cm
$Z_p (=Z_{axis})$		3.37 cm <sup>*1</sup>	4.71 cm <sup>*2</sup>	3.80 cm <sup>*1</sup>	8.18 cm <sup>*2</sup>
$R_x$		0.70 cm	0.90 cm	0.94 cm	1.34 cm
$X_p (=Z_x + 152.6\text{cm})$		1.55 cm	1.81 cm	1.25 cm	5.15 cm
$\delta_0$		2.31 (1.80) <sup>*3</sup> cm	4.90 (2.33) <sup>*3</sup> cm	1.74 (1.62) <sup>*3</sup> cm	9.89 (7.81) <sup>*3</sup> cm
$\delta$		$3.50 \times 10^{-2}$	$5.22 \times 10^{-2}$		

\*1：電流重心として同定、\*2：フィラメント電流中心として同定、( )<sup>\*3</sup>：ダイバータ配位のみ使用

表2 平衡データベースを入力とした CCS と FBI との比較 ラムダと  $I_p$  の平均誤差とその標準偏差値。

算出 マクロ量	テスト 平衡配位	高三角度配位 5063ケース (内ダイバータ1195)		高非円形配位 1372ケース (内ダイバータ503)	
		CCS 同定失敗：無し	FBI 同定失敗：105ケース	CCS 同定失敗：無し	FBI 同定失敗：257ケース
ラムダ	平均誤差	$-1.61 \times 10^{-2}$	$+7.51 \times 10^{-2}$	$-1.01 \times 10^{-1}$	$+2.19 \times 10^{-2}$
	標準偏差	$1.65 \times 10^{-1}$	$2.15 \times 10^{-1}$	$3.44 \times 10^{-2}$	$4.22 \times 10^{-2}$
プラズマ 電流 (1 MA)	平均誤差	-4.10 kA	-21.9 kA	-0.184 kA	-63.6 kA
	標準偏差	15.9 kA	40.3 kA	11.0 kA	161.0 kA

## 参考文献

- [1] 栗原研一：プラズマ・核融合学会誌 76, 65 (2000).
- [2] K. Kurihara, Nucl. Fusion 33, 399 (1993).
- [3] K. Kurihara, Fusion Eng. Des. 50, 1049 (2000).
- [4] K. Kurihara *et al.*, Fusion Eng. Des. 74, 527 (2005).
- [5] 栗原研一他：「JT-60 プラズマ位置形状実時間可視化システム」, プラズマ・核融合学会誌 75(10)CD-ROM版, 28 (1999).

## 付録 CCS 法に関する Q&amp;A

ここでは、CCS に関する様々な想定質問に回答する形の Q&A を記述することで、CCS 法の理解の一助とすることを目的とする。

Q 1：プラズマ内部は求めることができるのか？

A：原理的にトカマクプラズマの最外殻磁気面形状は外部のある種類の磁場センサーで一意的に同定することが可能であることが示される[2]。CCS は、この可同定の必要十分条件を緩和した不完全な条件でも最小 2 乗法の意味で最尤形状を同定する方法で、プラズマ最外殻磁気面形状を、センサー数で決まる合理的な精度で求める。従って、CCS ではプラズマ内部を直接求めることはできない。しかし、内部を求めるための第 1 ステップは、形状を高精度で求めることになるので、その部分に CCS を使用することになる。外部の電磁気計測だけでは一意性が保証されているか明確でない\*1 プラズマ電流分布の同定に、さらに形状という未知情報を加えて問題設定をする方が、一意性が保証されている形状同定だけの問題設定よりも高精度の解を与えるとは一般的には考えにくいからである。センサーが十分にあれば、最外殻磁気面形状同定問題は、電流分布同定問題と完全に切り離せる独立問題であることを強調する。

一方、センサーの数や Cauchy 条件面の未知変数の数（センサー数で最大値が決まる）が、電流分布の変化範囲をカバーできる程十分な個数でない場合には、内部平衡という制約条件を含めて解くことが、解の自由度を下げる効果をもっているため、未知電流分布という不確定要素を増加させる悪い影響との総合影響として、精度が向上する側に作用するのか劣化する側に作用するのかを、想定されるプラズマ電流分布や制約条件の与え方に注意して評価することになる。この点は電流分布同定方法にも絡み、現時点では答えは得られていない。

\*1：プラズマ平衡は非線形の条件を課した場合での電磁気計測データのみを用いた解法において、電流分布の一意可同定性が保証されているかどうかは、現時点では不明確である。また、単なるトロイダル方向の周回電流という条件だけでは電磁気計測データのみによる電流分布の一意可同定性は成立しないことは既に示されている[4]。

Q 2：電流分布の違いによって同定精度はどのようになるのか？

A：一般に尖塔型 (peaked) より幅広型 (broad) の電流分布の方が、様々な方法にとって同定精度が悪いことが知られている。CCS 評価のために原子力機構の平衡プラズマ作成コードで作成した 4 種類 peaked, parabolic, broad, hollow の電流分布をもつプラズマに対して同定精度を評価した CCS 法提案論文[3]において、CCS と真の位置形状との重ね描きが表示されている。この中ではやはり broad 分布 (殆ど平坦分布) の outboard 側下方で誤差が見られることがわかる。hollow, parabolic, peaked の順で誤差が小さくなる。定量的には、2.6 節を参照。

Q 3：有限の雑音がセンサーに重畳することから、一般にセンサーと電流要素の距離が短くなる幅広型電流分布の方が検出精度が高くなり、電流分布が尖塔化すればするほど精度が低くなるのではないかと？したがって、そのどこかに同定され易い最適な分布形状があるのではないかと？また、Cauchy 条件面の設置位置は、プラズマ電流分布との関係において精度に影響を与えるのか？

A：プラズマ電流分布が同定精度にどのように効くのかについては、センサーの個数 (や位置) と関係していることが明確である。即ち、センサーが少なければ電流分布の違いが誤差の大小に大きく影響し、一方充分な数のセンサーが付いていれば、通常想定される様々な電流分布に対して誤差が小さく保たれ、電流分布の依存性は極めて小さい。

今の指摘の「幅広型 broad 分布の方が尖塔型 peak 分布に比べ実効的なセンサー・電流間距離が小さくなるので精度は上昇し、peak 分布の場合は反対に精度が悪いのでは...」という点は、センサーとの距離に近い方が、ノイズ一定という仮定の下で実質的な S/N 比が高くなるので、傾向的にはその通りであると考えられる。

しかし、これまでの適用経験から、精度を決めていると思われるより大きな要因は、別にあると考えており、同定対象のプラズマ電流分布のもつ未知変数の自由度の多寡であると推定される。これは次の説明で定性的に理解できる。peaked 電流分布の極端な場合は 1 本の線電流であるが、その場合の自由度 (未知変数) は、線電流の  $R$  位置,  $Z$  位置, その電流値の 3 変数だけである。一方の broad 電流分布の場合には、円環シート電流が多数入れ子状に (nested) 配置されていることと等価と見做せるので、最大で「中心座標 2 変数 + (電流および小半径の 2 自由度) × 入れ子数分」の未知変数の自由度をもつことになるので、平坦部分の広い電流分布になれば自由度は増える。

まずこの自由度分の真空場が表現できる方法かどうかの問題になる。CCS では、Cauchy 条件面上での磁束および磁場の自由度を選択できる。現在 JT-60 で稼動



中の CCS では 8 つの自由度 (面選択  $R$ ,  $Z$  の 2 自由度 + 磁場 6 自由度 + 磁束 6 自由度 - 磁場と磁束の整合条件  $6 = 8$ ) を与えている。今回の検討で使用した FBI では、8 つの自由度 (フィラメント中心位置  $R$ ,  $Z$  座標および小半径の 3 自由度 + 電流値 6 自由度 - フィラメント電流合計値とロゴスキーコイルの整合条件  $1 = 8$ ) となる。

これから自由度だけの比較では、CCS でも FBI でも 8 個より少ない自由度の電流分布であれば、表現できる可能性が高いことがわかる。また、一般的に自由度の大きい broad 分布の方が peaked 分布よりもあるいは hollow よりも同定が難しい傾向があるということになる。

勿論、方法側の自由度を上げれば、精度を改善できることになる。増加分含め自由度分の全変数を、センサーの数分 (当然自由度より多い) 構成される線型式から最小 2 乗法として求める。CCS 法では解析解としての自然な境界条件を求める方法であることから、センサーの数が許す自由度まで Cauchy 条件面上の磁場・磁束の自由度を上昇させれば精度の改善が可能となる。FBI では、フィラメントの数を増加させることで自由度を上げることになるが、これが独立性のない線電流を数少なく配置して成功してきた FBI にとっては別の問題 (逆問題における非適切性 (ill-posed) 問題) を発生させることに繋がる。これについては Q 5, Q 6 の回答で詳しく述べる。

このように同定しやすい分布が存在するというより、センサーの数から Cauchy 条件面に許される自由度の範囲が決まり、その Cauchy 条件の自由度でカバーできる範囲の自由度をもつ電流分布であれば精度良く同定する。このカバーする範囲はこれまでの検討で実用上問題のない程広範囲であることがわかっている。

また、Cauchy 条件面の設置位置は、同定精度に対して極めて鈍感である。但し、面の大きさがプラズマの大きさに比べ異常に小さかったり、プラズマより一部大きかった場合には、最外殻磁気面は求めにくいことがあるので、極端ではない適切な大きさを決めておく必要がある (Q10 参照)。

Q 4 : FBI でフィラメント数を増やせば、精度が上がるのではないかと 100 本くらい置けば、精度はずっと上がるはずではないか。

A : フィラメント数を増やして同定精度が改善／向上できるかどうか、或いは 100 本置いてプラズマ電流分布までも同時に求めることができるかどうか、のどちらについても、現時点で良好な結果が得られたという報告はない。これまでの経験では、単なる本数増加では無理であると考えている。本数の増加は、他のフィラメントとの独立性を下げてしまうために、最小 2 乗解に ill-posed 問題が発生する頻度を増加させる。即ち、センサーの同定誤差の 2 乗で与えられる評価関数の値

は、少ない本数の時に比べより小さくなる。しかし、フィラメント電流の値は正負の大電流になり、この結果得られる最外殻磁気面は当然大きくずれる。100 本もの多数のフィラメント電流を置けばこの ill-posed 問題の程度はより悪い側に働くことが容易に想像できる。総プラズマ電流に制限を加える程度では改善は見込めないであろう。

元々円形プラズマでは色々な電流分布をもっている、そのプラズマが作る真空場は 6 本のフィラメント電流源の自由度だけで近似的に置き換えられる、という「発見的」検討が発端である。いわば、数が少ないことに ill-posed 問題を回避する意味が FBI にはあると考えるべきである。一方フィラメントの本数を増やすことは、電流分布をより積極的に求めることを意図するように映る。しかし、これはフィラメント電流には個性がなく設置位置の違いのみが各フィラメントの独立性を決めているため、数を増やすと隣接するフィラメント電流同士は、独立性が殆どなくなってしまい正負反対の電流を流して評価関数を最小にしようとする ill-posed 問題の発生へと繋がる。

プラズマ電流分布を外部の電磁気計測からトロイダル方向に周回する電流という条件だけで、一意的に同定することはできず、無数の解 (電流分布) が存在することが示せる [4]。したがって、電流分布同定問題に直接触れずに、プラズマ側に成立する物理的に自然な境界条件 (閉曲面上での磁束および磁場条件) を求める方法が CCS である。

Q 5 : FBI でも、6 本のフィラメント位置を最適化すれば、精度が向上するのではないかと最適化した上で FBI と精度を比較すべきである。

A : 本検討で使用した FBI は、実験解析で実稼動していたものである。フィラメント設置位置 (中心位置および小半径) の最適化プログラムは動作している。勿論、もし現 FBI の最適化が不十分であるとして、最適化した後で CCS と比較することも一つの作業の選択としてはあるかもしれないが、その際に以下の FBI のもつ本質的な問題点を解決することが必要である。

- a) FBI ではフィラメント配置の最適化を図る方法の模索／開発／調整が必要である点。
- b) FBI で非円形プラズマを同定する際、適用限界のためか形状に凸凹のうねりが出る点。
- c) FBI の数本のフィラメント電流で、プラズマ電流分布の違いが表現できる根拠がない点。

また、FBI の計算では、Green 関数 (完全楕円積分) 計算、逆行列計算が時間を要し、特に実時間制御応用には困難が予想される。

Q 6 : CCS が渦電流対策を行わなければ、同定誤差が生じるのであれば、それは渦電流に対して弱いということを示しているのではないかと FBI では渦電流を考慮した場合は、垂直・水平磁場コイル電流をフリー



にすることである程度の精度は確保できている。

A：数理的検討から、現在のセンサーの種類、位置、数では、渦電流とプラズマとの解析領域を2つの相互独立の領域に分割できないことが判る。したがって、このセンサー状況を前提にすれば、CCSであっても、或いは他の如何なる方法であっても渦電流を考慮することが必要である。方法によって渦電流に対して敏感か鈍感かの多少の程度の差はあるかもしれないが、特にCCSが弱いということはこれまでの使用実績では観測されていない。例えば、プラズマ着火直後の同定では、CCSの方がFBIより早く同定可能になることが知られており、ロバストな方法と考えられる。

一方、渦電流を真空容器の周回電流であると仮定して、形状同定と同時に周回電流値或いはそのフーリエ成分を同定する方法が過去に報告され、FBIの場合には同定安定性を増す可能性があるとの報告もある。しかし、そこではポロイダル断面内で見た時、隣接部分で真空容器をトロイダル周回方向に流れる渦電流が印加されている一周電圧の向きと一致しないという物理的不整合が問題となることが知られている。さらに、同定した渦電流は、FBIのフィラメント電流で発生する磁気面の凸凹を緩和しているだけという可能性も考えられる。

また、垂直・水平磁場コイル電流をフリーにして同定することは、適用限界を超えてFBIを使用していることによる解の不安定性を回避する効果があると考えられるが、この渦電流の取り扱いでは、考慮できる渦電流は垂直・水平磁場コイルの発生磁場と同じ磁場を作る渦電流だけであり、言わば垂直・水平磁場コイルの発生磁場の浸み込み遅れ（時定数は約20ms程度）が考慮されていると考えることが妥当。（因にCCSでは、これまでの解析結果から浸み込み遅れとして既知の1次遅れ系を構成して容器内部のセンサーとの同時性を調整している。）フリーにしてあることで、この浸み込み遅れを考慮する以上の安定化効果を発揮している（即ち、FBIの方法の適用限界の補償と思われる）ために、コイル電流値に大きな誤差を混入させる原因となっていることが現実である。この垂直・水平磁場コイル電流誤差のために、FBIでは表2のように平均的にラムダ値に大きな誤差を発生させる場合があることは間違いないようである。

CCSおよびFBIでも位置形状同定に最も大きな影響を与える渦電流は、プラズマ立ち上げ／立ち下げ時および3角度形成時といった急激な変動時期に発生する渦電流である。一周電圧データを用いた渦電流推定と再構築への補正によりCCS法の過渡期安定性に効果があるとの結果も得られている。

Q7：ノイズを加えた場合（渦電流を考慮した場合）などの検討をすべきである。

A：ノイズ印加時のCCSのロバスト性については、実験放電での実時間制御への適用実績から見る限り幸い大き

な問題は観測されていない。前述のように、JT-60のセンサーを前提にすると、渦電流についてはノイズとしてではなく、積極的に考慮すべき対象である。

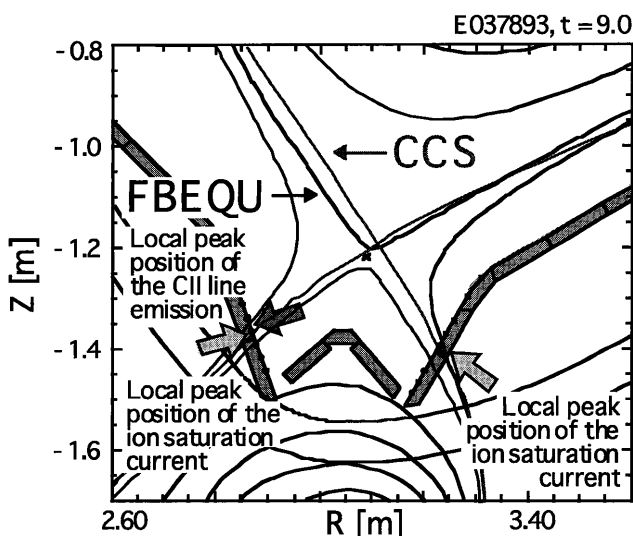
Q8：電磁気計測から求めた形状が正しいかどうかについて、別の計測装置で得られた信号から裏付けがとれないか？

A：ダイバータプラズマの計測器が使用できることから、セパトリクス線がダイバータ板に当たる点（ストライクポイント）について、2種類の計測値（CII線スペクトル強度およびダイバータプローブのイオン飽和電流）のピーク点とCCSによるストライクポイント点との比較で両者が精度良く一致することが明確。一方、FBIを用いて得られた $li$ を入力としている平衡再構築コードFBEQUの方にはずれが見られる。図付1に例を示す。

Q9：CCSは、JT-60SAへの改造後にも使える方法なのか？

A：この方法は、トロイダル電流場の解析解（境界積分形式）を基本としているので、トカマクプラズマであれば如何なる装置であってもそのまま適用できる。設計時にはセンサーの種類、位置、数のアセスメントに使える。装置完成以降では実時間制御用のパラメータ検出やプラズマの平衡解析にも使用できる方法である。電流分布解析の第1ステップとしての役割も重要である。

特にこの方法を用いたアセスメントでは、ブランケット、真空容器等の渦電流が流れる導体、コイル、プラズマがある体系で、プラズマ最外殻磁気面形状を同定するために必要なセンサーの種類や幾何学配置等を、数理的裏付けを基礎に例示することができる。



図付1 2種類の計測値のピーク点とCCSによるストライクポイント点との一致。

Q10: Cauchy 条件面が最外殻磁気面を横切るとどうなるか? ill-posed 問題が発生する場合は?

A: 一般に Cauchy 条件面をプラズマより大きく設置すると、センサー数が十分多ければ理論通り、面の外側は最外殻磁気面が求まり、面の内側については磁束 0 となる。センサー数が少なければ、面の外側でも最外殻磁気面に乱れが発生する場合がある。

CCS では、センサー間の整合がとれており、その設置センサー数で同定できる範囲の電流分布であれば、自然な境界条件が求められるので、基本的には ill-posed 問題は稀にしか発生しないという特長がある。但し、Cauchy 条件面が小さ過ぎる場合で且つ、面上の Cauchy 条件 (磁場および磁束) を独立に決定できる程センサーが十分設置されていない場合には ill-posed 問題が発生することがある。

Q11: プラズマ位置形状同定に必要なセンサーは何か?

A: プラズマに面した閉曲線上至るところ (線積分するのに十分な程度) で、磁場と磁束値の両方が与えられれば、それより外側のポロイダル磁場コイル電流値や渦電流値が不明であっても、プラズマの最外殻磁気面形状は同定できる。同じ体系で、プラズマ以外の電流分布が判れば、先の閉曲線上で磁場または磁束値のどちらかが与えられれば、プラズマの最外殻磁気面形状は同定できる。以上は厳密解を一意決定するための必要十分条件である。最小 2 乗法の意味では条件が緩和されセンサーの数は少なくできるが、その絶対数の多寡に応じて精度も上下する。(本文中の可同定性条件の議論を参照。)