



講座 粒子運動論～惑星から荷電粒子まで

4. 応 用

4.5 自由電子レーザー中の相対論的荷電粒子の運動

4.5 Dynamics of Relativistic Charged Particle in Free-Electron Laser

岸本 泰明, 今寺 賢志

KISHIMOTO Yasuaki and IMADERA Kenji

京都大学大学院エネルギー科学研究科

(原稿受付: 2015年1月6日)

ハミルトン構造を維持しつつ、正準座標の制限を取り去った非正準 Lie 摂動論は、ジャイロ運動論モデルを構築する数学的基礎として核融合プラズマ分野で発展してきた。この摂動論は、同様に多様な磁場や電場の中で運動する荷電粒子系である加速器や自由電子レーザー中の粒子ビームや高強度レーザーに照射されたプラズマ粒子の解析にも有力である可能性がある。ここでは、この手法を、収束型ウィグラー磁場とガイド磁場が共存した自由電子レーザー中での相対論的電子の軌道解析や共鳴近傍でのビーム安定性の解析、許容されるビーム電流限界の評価などに適用し、その有用性と意義について議論する。

Keywords:

Non-canonical Lie perturbation theory, free electron laser (FEL), relativistic electron beam, focusing wiggler, higher order secular perturbation, guiding field

4.5.1 はじめに

電場や磁場の中での荷電粒子運動は複雑なプラズマの挙動を理解する基礎過程として精力的に研究がなされてきた。磁場閉じ込めプラズマはその典型例であり、磁力線の周りを旋回運動する荷電粒子は、様々な時空間スケールで変化する場の中でドリフト運動を行い、それが起源となって輸送現象や MHD 現象などの様々な集団現象が引き起こされる。この変化する“場”は、外部から与えられる閉じ込め磁場やプラズマ中の力学均衡から決まる径電場などもあれば、プラズマ中に発生する乱流場もある。このような様々なスケールで変化する場の中での軌道解析法として非正準 Lie 摂動法がある[1]。

この方法は正準ハミルトン理論を非正準座標系に対して適用できるよう拡張した非正準ハミルトン理論に基づく摂動解析法であり、前者では座標系の取り方に制限（正準座標）があるのに対して、後者ではそれをより広いクラスの非正準座標に拡張することで解析に有利な任意の座標系を選択できる利点がある。さらに、新旧座標の関係を表す変換式が関数関係式で記述されるため、それらが混在した変換の母関数を求めることなく座標変換を行うことができる利点がある。さらに、運動方程式に対して直接摂動展開を行う平均化法とは異なり、非正準 Lie 摂動論では、運動方程式の基となる拡張された $2N+1$ 次元位相空間ラグランジアン (N は次元) を導入し、それに対して摂動展開を行うため、摂動の各次で系を記述するハミルトニアンが定義さ

れる。このように系のハミルトン構造が維持されることで、ハミルトン力学におけるネーターの定理やリュービルの定理などの重要な定理が摂動の各次で成立する。これらの特徴を活かし、非正準 Lie 摂動論はこれまで核融合プラズマにおけるジャイロ運動論[2-5]の基礎として発展してきた。

同様に、多様な電場や磁場の中で運動する荷電粒子系として加速器中の粒子ビームや高強度レーザーに照射されたプラズマがある。これらのビーム系やレーザー系と磁場閉じ込め装置との共通性は、共に外部から与えられる強い電場や磁場で荷電粒子の基本軌道がデザインされている点であり、したがって、それらをゼロ次の軌道解として高次の摂動論を展開することにより長時間（周期）の粒子ダイナミックスや安定性を解析することができる。これらの系に対しても、同様に非正準 Lie 摂動論を適用する意義は十分にあると考えられる。

ここでは、近年、X 線領域からテラヘルツ領域までの幅広い周波数領域において発振波長が原理的に可変である自由電子レーザー (Free Electron Laser: FEL) を例に、周期的に変化するウィグラー磁場中で運動する相対論的電子ビームの軌道解析に非正準 Lie 摂動論の導入を行う。どの波長領域の FEL でも、レーザーの発振出力を増大させるためには電子ビームの電流量を増大する必要があるが、そのためには、ウィグラー磁場自身に電子ビームの収束機能をもたせたり、外部から付加的な磁場（四重極や八重極磁場

Graduate School of Energy Science, Kyoto University, Uji, KYOTO 611-0011, Japan

corresponding author's e-mail: kishimoto@energy.kyoto-u.ac.jp

など)を印加したりする必要がある。しかし、そのような付加的磁場によるビーム軌道の変化がレーザー発振に影響を及ぼしたり、場合によっては、高次摂動が永年的な発散をもたらしたりする可能性がある。そのような複雑な状況下での軌道解析を行い、非正準 Lie 摂動論の可能性や意義について広く議論する。

4.5.2 FEL と相対論的電子ビームのダイナミクス

自由電子レーザー (FEL) とは、相対論的エネルギー (相対論因子 γ) をもつ電子ビームが周期的 (波長 $\lambda_w = 2\pi/k_w$) に変化するウィグラー磁場 (強度 B_w) を通過する際に、電磁場との共鳴的な相互作用を引き起こし、コヒーレントな電磁波を発生させる系に対する総称である (図 1 参照)。発振波長は $K = eB_w/mc^2k_w$ として、 $\lambda = \lambda_w(1 + K^2/2)/2\gamma^2$ で与えられる。近年では、短波長側では X 線領域[7]、長波長側ではテラヘルツ領域[8]の自由電子レーザーが注目されている。

この系で高出力を得るためには、電流値 I_b の高い相対論ビームを、ウィグラー磁場中を安定に伝播させる必要があり、その方法の一つとして、図 2 のようなウィグラー表面を湾曲させた (a) 収束型ウィグラー磁場[9]や (b) 軸方向ガイド磁場、あるいはその併用などが考えられる[10, 11]。これらの収束磁場は、レーザー発振に直接関与する短周期のウィグラー振動とともに、異なった周期のベータトロン振動やサイクロトロン振動をもたらす。これらによって高電流ビームの伝播特性を高める一方、異なった磁場間で共鳴が発生することから、適用可能な磁場構造や強度について

十分な考察が必要となる。また、仮にビーム伝播が達成されたとしても、そのような横方向の振動が縦 (進行方向) のレーザーとの共鳴条件に影響を与えるとレーザー発振を阻害する可能性もある。このため本章では、自己収束型ウィグラー磁場とガイド磁場を併用した系に対して解析を行い、高次摂動まで取り入れた系統的な解析手法として非正準 Lie 摂動法の有用性を議論する[12-14]。

4.5.3 収束型ウィグラー中の相対論的電子軌道

今、対象とする系の拡張位相空間の座標を z^μ 、対応する共変ベクトルを γ_μ とすると、その系での運動方程式は基本

1 形式の変分原理 $\delta \int \gamma_\mu dz^\mu = 0$ で与えられる[1]。 μ は、

$\mu = 0$ を独立変数として、 $\mu = 1-6$ を位相空間次元に割り当てている。時間 t を独立変数として正準座標 $z^\mu = (t, \mathbf{q}_c, \mathbf{p}_c)$ を選択すると、対応する共変ベクトルは $\gamma_\mu = (-h, \mathbf{p}_c, 0)$ となり、このときハミルトニアンは、 A をベクトルポテンシャル、 ϕ を静電ポテンシャルとして、

$$h = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{p}_c - e\mathbf{A}/c)^2} + q\phi, \quad (1)$$

となる。 q は荷電粒子の電荷であり、以下では、電子 ($q = -e$) を考える。基本 1 形式はスカラーであることから、解析に適した座標系を自在に選択できる利点がある。例えば、図 1 のビーム系では、ビームに付随する種々の物理量の変化をビームの伝播距離の関数として表現した方が便利であることから、時間 t の代わりに進行方向の座標 (例えば z) を独立変数に選択する場合が多い。その場合、座標の $\mu = 0$ と $\mu = 3$ 成分を入れ替えて $z_a^\mu = (z; \mathbf{q}_{c\perp}, t, \mathbf{p}_c)$ とすると対応する共変ベクトルは $\gamma_{a\mu} = \gamma_\nu \partial z^\nu / \partial z_a^\mu$ の関係より $\gamma_{a\mu} = (-K_c, \mathbf{p}_{c\perp}, p_{ct}, 0)$ で与えられる。但し、 $(\mathbf{q}_{c\perp}, \mathbf{p}_{c\perp})$ は $(\mathbf{q}_c, \mathbf{p}_c)$ の垂直成分であり、 $p_{ct} = -h$ は旧ハミルトニアンに対応する運動の恒量である (定常場の場合)。物理変数に運動の恒量を選択すると、その変数は定数パラメータとして取り扱うことができるため、ラグランジテンソルや運動方程式を簡単化することができる。これはジャイロ運動論において磁気モーメントが運動の恒量であることに類似した利点であるといえる。このとき、新ハミルトニアンは

$$K_c = -\sqrt{\alpha^2 - (\mathbf{p}_{c\perp} - e\mathbf{A}_\perp/c)^2} - eA_z/c, \quad (2)$$

となる。但し、 $\alpha^2 \equiv (p_{ct} + e\phi)^2/c^2 - m^2 c^2$ である。

ここまでは、正準変数を用いてきたが、先述のように、それに限定することなく任意の非正準変数に拡張することができる。例えば、正準運動量の代わりに非正準運動量 $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}_{c\perp} - e\mathbf{A}_\perp/c$ や $p_t = p_{ct} + e\phi$ を導入すると、座標と対応する共変ベクトル、および新ハミルトニアンは以下で与えられる。

$$z_a^\mu = (z; \mathbf{x}_\perp, t, \mathbf{p}_\perp, p_t), \quad (3)$$

$$\gamma_{a\mu} = (-K; \mathbf{p}_\perp + e\mathbf{A}_\perp/c, p_t - e\phi, 0), \quad (4)$$

$$K = -\sqrt{\alpha^2 - \mathbf{p}_\perp^2} - eA_z/c. \quad (5)$$

但し、 $\alpha^2 \equiv p_t^2/c^2 - m^2 c^2$ となる。

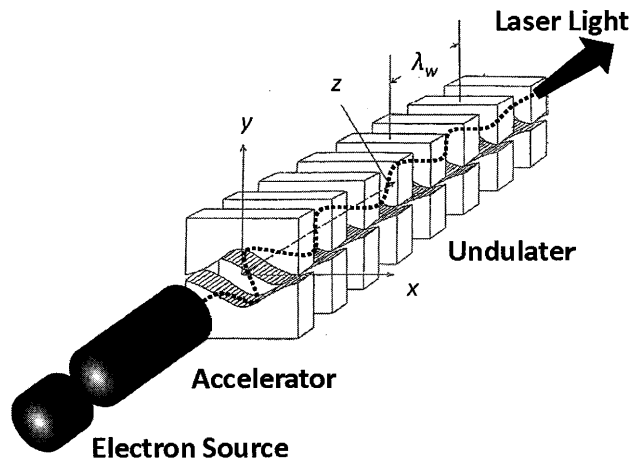


図 1 自由電子レーザー (FEL) の概要[6].

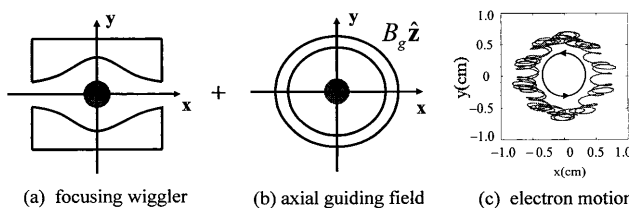


図 2 電子ビーム収束のためのウィグラー設計。 (a) 自己収束ウィグラー、 (b) 一様ガイド磁場。 (c) は (a) と (b) を併用した場合の電子運動の様子。

文献[12]では、(3)-(5)式を基礎に、 $\varepsilon \sim r_b/\lambda_w \sim p_w/\alpha$ を展開パラメータとして図2(a)の自己収束磁場を摂動展開し、 $O(\varepsilon^1)$ の理想的な平板ウィグラー磁場 $cA_x^{(1)}/c = p_w \sin k_w z$ に対する軌道解を最低次として、 $O(\varepsilon^3)$ の4重極磁場 $cA_x^{(3)}/c = (p_w/2)k_w^2 y^2 \sin k_w z$ 、および $O(\varepsilon^4)$ の6重極磁場 $cA_x^{(4)}/c = (p_w/12)k_w^3(3xy^2 - x^3) \cos k_w z$ までを高次摂動と見なし、Lie 摂動論を展開した。ここで、 r_b は典型的なビーム径、 $p_w = \sqrt{2}Kmc$ はウィグラー運動による横方向運動量、 $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - 1}mc$ は電子の全運動量である。この展開は、ビーム系は装置サイズ(～ウィグラー周期)に比べて十分に小さく、また、ウィグラー運動による運動量変化は粒子の全運動量(主に進行方向運動量)に比べて小さいとしたもので、高エネルギーの電子ビーム程($\gamma \gg 1$)近似精度は高くなる。

ここでは、 $z_a^\mu \rightarrow Z^\mu$ および $\gamma_{a\mu} \rightarrow \Gamma^\mu$ によって $O(\varepsilon^1)$ のウィグラー中心軌道に移った後、さらに、 $Z^\mu \rightarrow \bar{Z}^\mu = z_a^\mu - \sum_n \varepsilon^n g_\mu^{(n)}$ によって $O(\varepsilon^4)$ までの高次振動項がLie変換によって除去された新ウィグラー中心軌道に移ることにより、 $O(\varepsilon^4)$ までを繰り込んだ基本1形式($\Gamma^\mu \rightarrow \bar{\Gamma}^\mu$)を導き、その運動方程式からビーム粒子が長周期で運動するベータトロンの振動 $\bar{X} = \bar{X}_0 \sin(k_\beta z + \theta_x)$ 、 $\bar{Y} = \bar{Y}_0 \sin(k_\beta z + \theta_y)$ を導いている。ここで、 $k_\beta = p_w k_w / 2\alpha$ はベータトロンの波数であり、電子のエネルギーの増大とともに長周期になることがわかる。また注目すべきは、求められたベータトロンの振動の振幅は初期値に依存することから、エミッタンスの大きさなどによっては低次の振動と同程度の振幅になる点である。つまり、長時間の解析を行う上では、このような高次の項を繰り込んだ摂動解析が重要であることがこの結果からもわかる。

4.5.4 ガイド磁場を導入した相対論的電子軌道

ここでは、4.5.3で行った収束ウィグラーにさらにガイド磁場 $B_g \hat{z}$ を印加した二つの磁場構造が存在する場合の軌道解析を試みる。座標と共変ベクトルは(3)-(5)式からスタートする。ガイド磁場がある系では、電子は x 方向のウィグラー運動とガイド磁場とのローレンツ力によって y 方向にもウィグラー運動が発生するとともに、ガイド磁場によるジャイロ運動も発生する。 $\lambda_g \equiv 2\pi/k_g$ は粒子が1回ジャイロ運動する間に粒子が進行方向に進む距離を表わし、ウィグラー波数との間に

$$k_g = eB_g/c\alpha = (p_w/\alpha)(B_g/B_w)k_w \quad (6)$$

の関係がある。 $B_g \sim B_w$ 程度のガイド磁場では、 $k_g \ll k_w$ となる。また、 $k_w \sim \pm nk_g$ では、ウィグラー運動とジャイロ運動が共鳴を起こす領域が存在するため、4.5.4.2で議論するように、新たな座標変換を導入すると見通しがよくなる。本記事では文献[13]に沿って、共鳴から十分離れた領域(4.5.4.1節)と共鳴領域(4.5.4.2節)における軌道解析の結果について紹介する。

4.5.4.1 非共鳴領域の扱い

最初に、平板ウィグラー磁場 $\tilde{A}_x^{(1)} = p_w \sin k_w z$ にガイド磁場 $\tilde{A}_x^{(2)} = -ak_g y$ が加わった系において、共鳴領域

($k_w \sim \pm nk_g$) から十分に離れた領域での軌道解析を行い、座標変換の見通しを立てる。ここでは、 $k_g \ll k_w$ を想定してガイド磁場を $O(\varepsilon^2)$ としている。このとき軌道は、 $(\cos k_w z, \sin k_w z)$ に比例する最低次のウィグラー運動と、 $(\sin k_g z, \cos k_g z)$ に比例するジャイロ運動の線形結合で与えられることから、座標変換については幾つかの選択肢があるが、ここでは最低次のウィグラー運動を基本に、 $z^\mu = (z; x, y, t, p_x, p_y, p_t) \mapsto Z^\mu = (z; X, Y, t, U, V, p_t)$ の変換を考える。ここで、

$$X = x - C_w(p_w/\alpha k_w) \cos k_w z, \quad (7)$$

$$Y = y + C_g(p_w/\alpha k_w) \sin k_w z, \quad (8)$$

$$U = p_x + C_w p_w \sin k_w z, \quad (9)$$

$$V = p_y + C_g p_w \cos k_w z. \quad (10)$$

但し、 $C_w = k_w^2/(k_w^2 - k_g^2)$ 、 $C_g = k_w k_g/(k_w^2 - k_g^2)$ である。この座標 Z^μ と $\Gamma_\mu = \gamma_\nu \partial z^\nu / \partial Z^\mu$ から求められる共変ベクトルに対して、Lie 摂動論($Z^\mu \rightarrow \bar{Z}^\mu = Z^\mu - \sum_n \varepsilon^n g_\mu^{(n)}$)を用いて振動項を各次数で除去して永年項のみを残すことにより、最終的に以下の $O(\varepsilon^4)$ までの基本1形式が求められる。

$$\bar{\Gamma}_\mu^{(0)} d\bar{Z}^\mu = \bar{p}_t d\bar{t} + \alpha dz, \quad (11)$$

$$\bar{\Gamma}_\mu^{(2)} d\bar{Z}^\mu = (\bar{U} - \alpha k_g \bar{Y}) d\bar{X} + \bar{V} d\bar{Y} - C_w^2(p_w^2/4\alpha) dz, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_\mu^{(4)} d\bar{Z}^\mu = & \left[-\frac{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}{2\alpha} - C_w \frac{p_w^2}{8\alpha} k_w^2 (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) \right. \\ & \left. + \frac{GeI_b p_w^2}{c^2 (k_w r_b)^2} k_w^2 (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) + C_w^3 \frac{p_w^4}{32\alpha^3} - C_g^2 \frac{p_w^2}{4\alpha} \right] dz. \end{aligned} \quad (13)$$

但し、 $\bar{\Gamma}_\mu^{(1)} d\bar{Z}^\mu = \bar{\Gamma}_\mu^{(3)} d\bar{Z}^\mu = 0$ である。ここで、(13)式の右辺3項の I_b は電子ビーム電流であり、有限電流による径方向電場(発散力)と自己ピンチ磁場(収束力)の効果を $O(\varepsilon^4)$ としてモデル的に導入している。

運動方程式は、共に長周期のベータトロンの振動とサイクロトロンの振動の結合系として表現され、その解は図1(c)で与えられる長周期のヘリカル運動となり、 $\bar{Z}^\mu = (z, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{t}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{p}_t)$ は以下の4波数($j=1-4$)を持った正弦波の線形結合として表現される。

$$k_\beta^{(j)} = \pm \sqrt{2k_{\beta*}^2 + k_g^2 \pm \sqrt{4k_{\beta*}^2 k_g^2 + k_g^4}}/\sqrt{2}, \quad (14)$$

$$k_{\beta*} = \sqrt{\frac{C_w p_w^2}{4\alpha^2} - \frac{2eGI_b k_w}{c^2 (k_w r_b)^2 \alpha}}. \quad (15)$$

但し、 $G = (mc/\alpha)^2 [1 + C_w^2(k_w^2 + k_g^2)K/2k_w^2]$ である。

これら摂動論から得られた理論解とシミュレーションで得られた数値解を比較した結果を図3に示す。このケースでは展開パラメータを $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ に設定しており、ウィグラー磁場のピッチが $\lambda_w = 5$ cm、磁場強度が $B_w = B_g = 1$ kG、初期の粒子位置が $x(z=0) = y(z=0) = 0.0398$ cm、ビームエネルギーが 4.29 MeV の場合に相当する。長周期のベータトロンの振動を含め、理論解が数値解とよく一致していることがわかる。

さらに、電子ビームが伝播するためには(14)式の波数が実値である必要があることから、ウィグラー磁場中を通過できるビーム電流の最大値は文献[10]に従って以下で求め

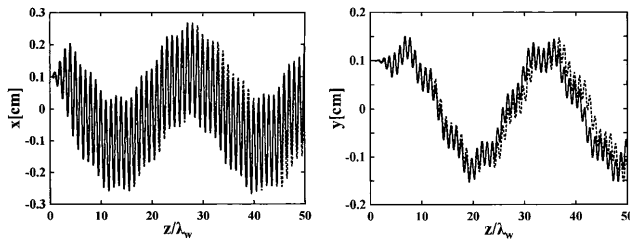


図3 収束ウィグラー磁場とガイド磁場を併用した場合の(左)x方向と(右)y方向の粒子軌道(実線:数値解, 点線:式(7)-(15)で与えられる理論解). パラメータは, $l_w = 5$ cm, $B_w = B_g = 1$ kG, $x(z=0) = y(z=0) = 0.1$ cm, $E_b = 4.29$ MeV[文献[14]より].

られる.

$$I_{b,\max} = \frac{c^2 (k_w r_b)^2 p_w^2}{8G\epsilon a} \left[C_w + \frac{1}{2} \left(\frac{B_g}{B_w} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

(16)式からわかるように, 許容される最大電流値はガイド磁場の増大とともに増加する. 一方, 次節で議論するように, $k_w \sim \pm nk_g$ では共鳴が発生してビーム伝播が困難になることから, $k_g/k_w = (p_w/\alpha)(B_g/B_w)$ が共鳴の条件から外れるようにガイド磁場強度とビームエネルギーの関係を調整する必要があることがわかる.

4.5.4.2 共鳴領域の扱い

一方, 共鳴領域ではガイド磁場によるジャイロ運動がウィグラー運動と同等の寄与をすることから, ウィグラー運動を除去した(7)-(10)式で記述される $Z^\mu = (z; X, Y, t, U, V, p_t)$ から, 作用・角変数で記述したジャイロ運動を除去する変換 $Z_R^\mu = (z; R_x, R_y, t, \mu, \theta, p_t)$ を施すと見通しが良くなる[12]. ここで, t と p_t 以外の変数は以下で与える.

$$R_x = X - \sqrt{2\mu/ak_g} \cos \theta, \quad (17)$$

$$R_y = Y + \sqrt{2\mu/ak_g} \sin \theta, \quad (18)$$

$$\mu = (U^2 + V^2)/2ak_g, \quad (19)$$

$$\theta = \tan^{-1}(U/V). \quad (20)$$

今, 最低次の共鳴 $k_w + k_g \sim 0$ は平板ウィグラー磁場とガイド磁場の系が発散((7)-(10)式で $C_w \rightarrow \infty$, $C_g \rightarrow \infty$) することから除外し, ここでは $k_w + 2k_g \sim 0$ の共鳴領域を考える. この座標 Z_R^μ と $\Gamma_{R\mu} = \Gamma_\nu \partial Z^\nu / \partial Z_R^\mu$ から求められる共変ベクトルに対して, Lie 摂動論 ($Z_R^\mu \rightarrow \bar{Z}_R^\mu = Z_R^\mu - \sum_n \epsilon^n g_{R\mu}^{(n)}$) を用いると, 対応する $O(\epsilon^4)$ までの基本1形式は以下で与えられる.

$$\bar{\Gamma}_{R\mu}^{(1)} d\bar{Z}^\mu = -ak_g \bar{R}_y, \quad (21)$$

$$\bar{\Gamma}_{R\mu}^{(2)} d\bar{Z}^\mu = \bar{\mu} d\bar{\theta} - \left[k_g \bar{\mu} + (C_w^2 + C_g^2) \frac{p_w^2}{4\alpha} \right] dz, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{R\mu}^{(4)} d\bar{Z}^\mu = & - \left\{ \frac{p_w^4}{64\alpha^3} (3C_w^4 - 2C_w^3 + C_w^2 C_g^2 + 10C_w C_g^2 + 3C_g^4) \right. \\ & + \frac{k_g^2 \bar{\mu}^2}{2\alpha} + \frac{k_g^2 \bar{\mu}^2}{2\alpha} + C_w \frac{p_w^2}{8\alpha} k_w^2 (\bar{R}_x^2 + \bar{R}_y^2) \\ & \left. + \frac{p_w k_w^2 \bar{\mu}}{4ak_g} (\cos \hat{\theta} + \sin \hat{\theta}) \right\} dz. \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, $\bar{\Gamma}_{R\mu}^{(3)} d\bar{Z}^\mu = 0$, $\bar{\theta} = (k_w + 2k_g)z$ である. この基本1形式から運動方程式を導出すると, $(\bar{R}_x, \bar{R}_y)$ と $(\bar{\mu}, \bar{\theta})$ の運動は分離され, 前者はジャイロ中心の運動を与え, 後者は以下の関係式を満たす.

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\theta}} = \frac{\frac{p_w}{\sqrt{2\alpha}} \frac{k_w^2 \bar{\mu}}{k_g} \sin \bar{\theta}}{k_w + 2k_g + \frac{2k_g^2 \bar{\mu}}{\alpha} + \frac{p_w}{\sqrt{2\alpha}} \frac{k_w^2}{k_g} \cos \bar{\theta}}. \quad (24)$$

ここで, 右辺分母第4項と分子は共鳴に伴う長周期摂動(非共鳴領域では振動成分のため除去される)によるもの, 右辺分母第3項は永年摂動によるものであり, 共に $\bar{\Gamma}_{R\mu}^{(4)} d\bar{Z}^\mu$ ((23)式)に由来している. これらは, 平均化法では無視される項である. $f(\bar{\theta}) = -(k_w + 2k_g + p_w k_w^2 \cos \bar{\theta})/\sqrt{2\alpha} k_g$, C を定数とすると, (24)式には以下の解析解が存在する.

$$\bar{\mu} = \frac{\alpha}{2k_g^2} \left[f(\bar{\theta}) \pm \sqrt{C + \left(\frac{\alpha f(\bar{\theta})}{2k_g^2} \right)^2} \right] \quad (25)$$

ここで, $\bar{\mu}$ は $\bar{\theta}$ に対して(発散しない)振動解であることから, 共鳴が発生してデザイン軌道から離れたとしても, その結果共鳴条件が破れ, 軌道は有界領域に留まることを意味している. また, 粒子のエネルギーが十分に大きいと仮定して右辺分母第3項を無視すると, (24)式は

$$\bar{\mu} = \frac{C}{k_w + 2k_g + \frac{p_w}{\sqrt{2\alpha}} \frac{k_w^2}{k_g} \cos \bar{\theta}} \quad (26)$$

となる. これから, $\delta k \equiv k_w + 2k_g$ を共鳴幅として定義すると, 不安定条件は

$$\frac{|\delta k|}{k_w} < \frac{p_w}{\sqrt{2\alpha}} \frac{k_w}{k_g} \quad (27)$$

と見積もられる. ウィグラー振動の運動量は粒子全体の運動量に比べて小さいことから ($p_w/\alpha \ll 1$), 共鳴幅は二つの異なった共鳴層間の幅(k_g)より十分に小さく, 共鳴層の重なりやそれによる軌道の彷徨運動は弱いことが期待される.

4.5.5 まとめと課題

本節では, ジャイロ運動論モデルの数学的基礎である非正準 Lie 摂動論を様々な電場・磁場で制御される加速器中の粒子ビームや高強度レーザーに照射されたプラズマのダイナミクスなどの幅広い研究に展開することを目的に, それを FEL における相対論的電子ビームの軌道解析に適用し, その有用性や可能性を検討した. 本手法の主な利点を以下にまとめる.

- 1) 一般的な摂動法では, 運動方程式(あるいはブラソフ方程式などの運動論方程式)に対して摂動展開を行うのに対して, 非正準 Lie 摂動論では, 運動方程式の基となる拡張された $2N+1$ 次元位相空間ラグランジアンを導入し, それに対して摂動展開を行うため, 摂動の各次で系を記述するハミルトニアンが定義される. 本記

事では、そのような系で長周期のベータトロン振動を精度良く求めることに成功している。

- 2) 運動の恒量を拡張位相空間の変数の一つとすることで、ラグランジテンソルや運動方程式を簡単化することができる。この利点は一般的なオイラー・ラグランジ方程式で循環座標を用いることで方程式系が簡単化されることと類似している。一般にそのような座標系はハミルトン・ヤコビ方程式を解いて決定する必要があるが、本記事で紹介した相対論的電子ビームの軌道解析では（定常場を仮定した場合）エネルギーが、高強度レーザー場中の相対論的電子の軌道解析に対して非正準 Lie 摂動論を適用したケース[15]では進行方向の運動量が恒量であるため、そのような変数を座標の一つとした系に非正準変換を用いて移ればよい。これは本手法が相対論的荷電粒子の運動に適していることを示唆している。
- 3) 共鳴近傍での軌道解析は、一般に（0となる分母の）摂動展開を行うことで行われる。一方、本手法では作用・角変数を導入し、共鳴近傍では位相が大きく変化しないことから関連した振動項を永年項と見なすことで、共鳴近傍での安定性解析を行い、不安定となる各々の共鳴幅は隣接する共鳴間の距離と比較して十分に狭いことを明らかにした。このように共鳴現象に対しても本手法は有用である。

粒子の運動エネルギーが増大してより相対論的になると展開パラメータは小さくなり、近似精度が高くなる。しかし、長時間の運動を記述する上では、なお高次の項は重要である。本文献がそのような相対論領域の粒子の軌道解析の一助となることを期待する。

参考文献

- [1] J.R. Cary and R.G. Littlejohn, Ann. Phys. **151**, 1 (1983).
- [2] R.G. Littlejohn, J. Math. Phys. **23**, 742 (1982).
- [3] R.G. Littlejohn, J. Plasma Phys. **29**, 111 (1983).
- [4] T.S. Hahm *et al.*, Phys. Fluids **31**, 1940 (1988).
- [5] A.J. Brizard and T.S. Harm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
- [6] 岸本泰明: NCC News 13 (1991).
- [7] T. Tanaka and T. Shintake eds., "SCSS X-FEL Conceptual Design Report", RIKEN Harima Institute/SPRING-8 (2005).
- [8] G.L. Carr *et al.*, Nature, **420**, 153 (2002).
- [9] E.T. Scharlemann, J. Appl. Phys. **58**, 2154 (1985).
- [10] K.R. Chu and A.T. Lin, Phys. Rev. Lett. **67**, 3235 (1991).
- [11] K. Sakamoto *et al.*, Phys. Rev. Lett. **70**, 441 (1993).
- [12] Y. Kishimoto *et al.*, Phys. Plasmas **2**, 1316 (1995).
- [13] K. Imadera and Y. Kishimoto, Plasma Fusion Res. **6**, 1201004 (2011).
- [14] K. Imadera, PhD Thesis, Kyoto University (2010).
- [15] N. Iwata *et al.*, Plasma Fusion Res. **5**, 028 (2010).



きし もと やす あき
岸 本 泰 明

京都大学大学院エネルギー科学研究科教授。1981年広島大学修士課程修了，1984年大阪大学博士課程修了，日本原子力研究所（現日本原子力研究開発機構）を経て、2004年より現職。主な研究分野は、トカマクを中心としたプラズマ乱流輸送や高強度レーザーと物質との相互作用に関する理論・シミュレーション研究などのプラズマ物理。構造の起源を問う学術としてのプラズマ物理に興味を抱き、本小特集とも関係した物質の電離過程や放電・雷現象など、幅広いプラズマ現象に興味をもって研究を行っています。（HP:<http://www.center.iae.kyoto-u.ac.jp/kishi/index.html>）



いま であら けん じ
今 寺 賢 志

京都大学大学院エネルギー科学研究科助教。主な研究分野は、核融合プラズマのジャイロ運動論シミュレーション研究。Lie 摂動論によるジャイロ運動論モデルの定式化から始まり、近年はトロイダル配位での乱流輸送シミュレーション研究に従事しています。その過程で行った研究をこのように特集で紹介できることを大変ありがたく思っております。家では、5歳の息子とのかくれんぼが毎日の日課。