

高周波磁気デバイスの磁場解析技術の進展とその応用

Magnetic Field Analysis for Magnetic Devices

田邊信二 三菱電機(株)先端技術総合研究所

S. Tanabe, Mitsubishi Electric Corp., Advanced Technology Laboratory

At frequencies higher than 500 MHz, displacement currents need to be introduced for magnetic device simulation. Different modes that appear at high frequencies in magnetic devices are explained. The finite element method (FEM), method of moments (MoM) and finite difference time domain (FDTD) method are explained as "full wave" electromagnetic simulation methods. The advantages and disadvantages of each simulation method with respect to magnetic devices are discussed.

Key words: high-frequency analysis, magnetic devices, finite element method, method of moment, finite difference time domain, magnetic recording heads, inductors

1. はじめに

処理情報の大容量化は、必然的にデータ伝送速度の増大、すなわち、信号の高周波化をもたらしている。代表的な磁性デバイスである磁気ヘッドにおいては、そのデータ転送速度は、すでに 100 MHz を超えており、携帯電話の RF 部などで用いられるインダクタでは、1 GHz 近い周波数で動作することが要求されている。

高周波での磁性膜自体の挙動に関しては、すでに、本学会誌の解説記事で、詳しい解説がなされている^{1), 2)}。本解説では、純粹に、Maxwell の電磁方程式の範囲に限って、すなわち、磁性体を透磁率 μ 、導電率 σ のマクロな特性をもった均質な物質として扱った場合について、その高周波特性の解析法について述べる。

2. 高周波電磁場解析の必要性

磁性デバイスの場合、本来、磁気ヘッドにしてもインダクタにしても磁場のエネルギーを扱うデバイスであり、ある程度の周波数までは、そのキャパシタンスは解析上無視できる。そのため、渦電流項 ($\partial \mathbf{B} / \partial t$) は考慮しても、変位電流項 ($\partial \mathbf{D} / \partial t$) は考慮する必要がなかった。

しかし、周波数が高くなり、変位電流に対するインピーダンスが金属内の実電流に対するインピーダンスに対し無視できないオーダまで下がってきた場合、変位電流を考慮したいいわゆる「フルウェーブ (full wave)」の解析が必要となる。

2.1 高周波電磁場解析と低周波電磁場解析の違い

Maxwell の方程式の、Ampère 則に変位電流項が加わっただけで、世界は大きく変わる。すなわち、変位電流項の付加により、「放射電磁場」が現れる。基礎的な話になるが、電磁場には、「静電場」、「誘導電磁場」、「放射電磁場」がある。「静電場」は電荷の勾配によるもので、ポテンシャルの勾配 ($-\text{grad } \phi$) で表されるものである。そのほか電荷が「等速運動」することで、誘導場が発生する。誘導電磁場は、電場と磁場の位相が 90 度ずれており、伝播されるエネルギーは、ゼロである。すなわち、ある点 P において、時間的なエネルギーの移動はなく、電場のエネルギー ($1/2 \epsilon E^2$) と磁場のエネルギー ($1/2 \mu H^2$) が、和を一定に保ったまま角周波数 ω で、交互に置き変わるものである。それに対し、放射電磁場は、電荷の「加速運動」により発生 [その詳しい原理を知りたい読者は、文献 3 (もともとは重力波についての解説書だが、電磁波の発生についても丁寧に記述されている) を参照されたい] するもので、電場と磁場は同位相であり、エネルギーを無限遠方へ放射する場である。電場、磁場は、Faraday 則、磁場に対する Gauss 則から、それぞれ式 (1), (2) で表される。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi. \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2)$$

ここで、 ϕ は電気スカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}$ は磁気ベクトルポテンシャルを表す。このとき、Ampère 則、電流保存則は、ポテンシャルを用いて、式 (3), (4) のように表せる。

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} = \left(\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \right) \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \phi \right). \quad (3)$$

$$\text{div} \left(\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \phi \right) = 0. \quad (4)$$

ここで、 μ, σ, ϵ は、それぞれ、透磁率、導電率、誘電率のテンソルを表す。ここで、透磁率 μ は複素テンソルであり、導電率 σ と誘電率 ϵ は、実テンソルである。もちろん導電率は、誘電率の虚数成分 ϵ'' に角周波数 ω の掛かったものであるから、誘電率 ϵ を複素数で表して、式 (3), (4) を表現することもできるが、なぜか「歴史的？」に、式 (3), (4) のような表現をとる。

式 (4) は、電流の連続性を表す式で、導電率 σ と電場の

強度の積にあたる実電流（強制電流＋渦電流）と、電場の時間変化の大きさに比例する変位電流の和が系のなかで一定であることを示している。つまり、次の節で示すように、実電流しか考慮しない低周波解析では、例えば、ヘッドやインダクタのコイル導線を流れる電流量はどこでも一定であるが、高周波で変位電流が無視できなくなるとコイル間、コイル基板間などの変位電流路ができ、コイルの入口と出口では、電流量が異なってくる。

ここで、磁気ベクトルポテンシャルの3成分と電気スカラーポテンシャルの合計4つのポテンシャル成分のうち1次独立なものは3つである。そのため、 $\mathbf{A}, \phi$ を一義に決めるには、ゲージ条件を課する必要がある。ここで、Lorentz条件、

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

を課すことにより、磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と電気スカラーポテンシャル ϕ は4次元的に対称に扱え、式(3)と(4)は、 $\mathbf{A}, \phi$ それぞれに対する独立な Helmholtz 方程式

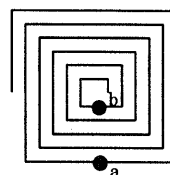
$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} = - \mu_0 \mathbf{J}$$

で表される。これは、いわゆる波動方程式であり、エネルギーを伝播する放射場を含んだ式である。

2.2 磁気デバイスにおける高周波電磁場解析の必要性

電磁場の発生源を点源とした場合、静電場は距離の3乗、誘導電磁場は距離の2乗、放射電磁場は距離の1乗に反比例して減衰する。そのため、電磁場源の近傍では、静電場、誘導電磁場が支配的であり、遠方では、放射電磁場が支配的となる。このことから、静電場、誘導電磁場を「近傍場」放射場を「遠方場」と呼ぶ。誘導場と放射場がちょうど等しくなる距離は、場の振動の波長を λ とすると $\lambda/2\pi$ [m]となる。ここで周波数が1 GHzとしても、自由空間での波長 λ は、30 cm、 $\lambda/2\pi$ も5 cm程度になり、マイクロンオーダーの、ヘッドやインダクタの世界では、放射場の考慮は必要ないようにみえる。しかし実際には、接近した2つの金属間では、高周波になると電磁エネルギーは電磁波の形で伝送する、TE (Transfer Electric), TM (Transfer Magnetic), TEM (Transfer Electromagnetic) といったモードで伝送される。前にも述べたように、磁性デバイスの場合は、 C に対して L が支配的な「 L 性のデバイス」であるが、それでも高周波になると C が無視できなくなり、上のような伝送モードが現れる。現在東北大荒井研究室にて試作している、高周波用薄膜インダクタ^{4), 5)}においても、LCの共振は2～5 GHzあたりにあり、このインダクタを使用する1 GHz近傍では、 $1/(C\omega)$ [Ω]の値が、 $L\omega$ [Ω] n の数%程度になる。Fig. 1⁶⁾は、このインダクタのスパイラルコイル（5ターン）各部の電流値を、変位電流を考慮し



	Inductance (nH)	Current density at (a)	Current density at (b)
With displacement currents	6.7	51.7 (A/m ²)	46.3 (A/m ²)
Without displacement currents	10.1	63.5 (A/m ²)	62.5 (A/m ²)

Fig. 1 Effect of displacement currents.

た場合と考慮していない両方の場合について、有限要素法で計算したものである。周波数は携帯電話の送信波の940 MHz、電流の波長は30 cm程度あり、Fig. 1のa点とb点の位相差はほとんどないので、変位電流を考慮していない解析では、電流値はほぼ一定である。しかし、変位電流を考慮した解析では変位電流の形で基板(Si)などへ抜けていく電流があるため、a点とb点の電流値は10%ほど変化している。また、コイル間の容量 C のため、コイルの実効的なターン数は、実際のターン数（5ターン）よりも小さくなり、インダクタンスは、30%以上小さくなっている。

2.3 高周波での磁性体の特性

Fig. 2は、FeAlOグラニューラー系軟磁性膜の複素透磁率の周波数特性⁷⁾である。損失となるその虚数成分は、数10 MHzあたりから渦電流損失のため上がりだし、1 GHzあたりからは、自然共鳴による損失が現れ出す。ここで、実際には、渦電流損失は誘電率の虚数成分である導電率 σ による損失で、後に述べる、高周波での損失の計算では、透磁率の虚数成分としては扱わない。この渦電流損失を下げるためには、磁性膜の導電率 σ を下げる必要がある。自然共鳴損失を下げるためには、磁性膜の異方性磁場 H_k を大きくすることが必要である。 H_k と自然共鳴のピーク周波数 f_r の間には、Landau-Lifshitz-Gilbert方程式から、以下の関係があることがよく知られている⁸⁾。

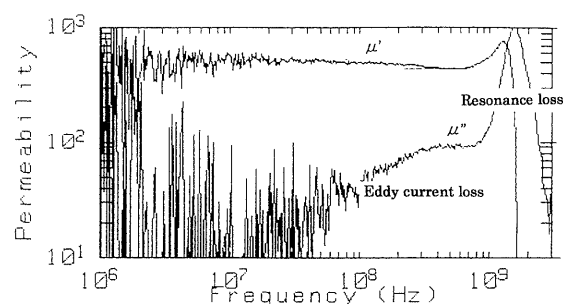


Fig. 2 Complex permeability of FeAlO granular soft magnetic film (after Yamaguchi, Shimada et al.).

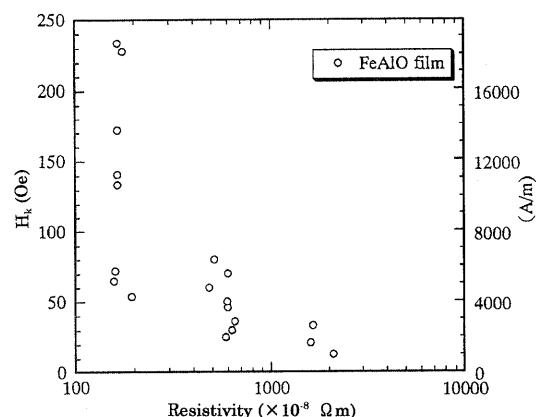


Fig. 3 Relationship between the resistivity and anisotropy magnetic field (after Yamaguchi *et al.*).

$$f_r = \frac{\gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{M \cdot H_k}{\mu}} \quad (7)$$

ここで、 γ は、ジャイロ磁気定数、 M は磁化を表す。しかし実際には、Fig. 3⁹⁾にあるように (Fig. 3 で横軸は導電率でなく抵抗率で表している)、膜の比抵抗を上げようとする、 H_k は下がってしまう。上に掲げた、FeAlO 膜の場合、膜厚 $0.1 \mu\text{m}$ で、導電率 $2 \times 10^5 [\text{S/m}]$ 、 $H_k = 4,000 [\text{A/m}]$ ($50 [\text{Oe}]$) 程度である。

3. モーメント法と有限要素法

電磁場解析モーメント法 (MoM: Method of Moments) と有限要素法 (FEM: Finite Element Method) は、共に周波数ドメインでの電磁場の解析法である。タイムドメインでの解法が、場の過渡的な状態を解析するのに対し、周波数ドメインでの解法は、有限要素法の離散化に Ritz 法 (Rayleigh-Ritz 法とも呼ぶ) が用いられることからわかるように、系の安定 (定常) 状態を求めている。計測器でいえば、後で述べる FDTD 法が、デジタルオシロスコープなのに対し、モーメント法、有限要素法は、スペクトラムアナライザにあたる。

ここで解くべき問題は、

$$Lf = g \quad (8)$$

の形でかける。ここで、 L はオペレータであり、 f が求めるべき未知関数、 g が励起源を表す既知関数である。電磁場のモーメント法では通常、求めるべき未知数に導体の表面電流、励起にあたる既知関数 g に、電場を考え、オペレータ L の逆オペレータ L^{-1} は、積分関数である Green 関数となる。一方、有限要素法は、領域 Ω 内の以下に出てくる式 (11)、(12) を、境界 Γ 上での境界条件に基づき解く方法で、通常、その磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と電気スカラーポテンシャル ϕ を未知関数に、励起電流密度 $\mathbf{J}$ または電荷密度 ρ を既知関数におく。

ここで、後述の式 (11)、(12) は、連続な関数 f に対しては、数値的に解けないので、未知関数 f を次のような有限

な級数に展開する。

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (9)$$

ここで、 α_n は定数、 f_n は、展開関数、もしくは、基底関数と呼ばれる。このように未知関数を、式 (9) のように、有限な数の展開関数で展開することで、電磁方程式は、自己随伴 (self-adjoint)¹⁰⁾ な微分方程式であることから、随伴マトリクス $L^a (=L^*)$ (複素共役の転置) は、 $L=L^a$ が成り立つ自己随伴マトリクス、いわゆる、エルミート (Hermitian) マトリクスとなる。このことは、後に述べる定式化の基礎になる。

3.1 有限要素法

有限要素法の高周波におけるコマーシャルな解析ツールが出て、その応用が広まったのは比較的最近である。解析ツールもかなり汎用なものとなってきたが、それでも実際のデバイスの解析にはある程度の基礎的知識が必要であり、以下、それらのツールを使う立場でその内容を解説する。

3.1.1 基本理論 有限要素法には、後で簡単に述べる、要素の辺に未知数を割り付ける辺要素を用いた有限要素法もあるが、ここではより一般的な、接点に未知数を割り付ける節点要素の有限要素法について述べる。節点に変数を割り付ける場合、渦電流、変位電流とも考慮して、電場、磁場を直接解こうとすると、それぞれ (x, y, z) の 3 変数合計 6 変数となる。それに対しポテンシャルを変数とした場合には、磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の (x, y, z) の 3 成分と電気スカラーポテンシャル ϕ 合計 4 変数で解ける。ここで、 $\mathbf{A}, \phi$ を、それぞれ、角周波数 ω で正弦的に振動するポテンシャルとすると、式 (1)、(3)、(4) は周波数ドメインにおいて、次のように書ける。

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \omega \mathbf{A} \quad (10)$$

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} = (\sigma + i\omega\epsilon)(i\omega \mathbf{A} + \text{grad } \phi) \quad (11)$$

$$\text{div} \left(\frac{\sigma}{i\omega} + \epsilon \right) (i\omega \mathbf{A} + \text{grad } \phi) = 0 \quad (12)$$

通常有限要素法では、2.1 で述べた、ゲージ条件は課さずに、 $\mathbf{A}$ についてのベクトル波動方程式 (11) と ϕ に関するスカラー波動方程式 (12) を、そのまま離散化して解く。

有限要素法における離散化の方法としては、Ritz 法と Galerkin 法がある。Ritz 法は、汎関数法、変分法とも呼ばれ、物理的にはエネルギー最小原理に対応する。磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と電気スカラーポテンシャル ϕ を変数としたエネルギー汎関数 F の変分をゼロにする状態が、いわゆる定常状態である。そこで、式 (11)、(12) のなかで、ポテンシャルを適当な展開関数を用いて近似したものを代入し、その変分をゼロとする式から、求めるべきマトリクス方程式と、自然境界条件が導かれる。一方、Galerkin 法は、重み付き残差法の一様で、展開関数と重み関数 (試験関数) に同じ関数を用いる手法である。ポテンシャルを近

似関数で展開し、式(11)の各項を左辺にまとめてゼロに等しいとおいた式と式(12)の左辺に代入しても、残差 r が出る。この残差に重み関数 w_i (=展開関数 f_i) を掛けたものを全領域 Ω で積分した値をゼロとおくことで、求めるべきマトリクス方程式と、自然境界条件を導く。離散化の方法によって、出てくるマトリクス方程式は同じだが、自然境界条件は異なるので、汎用のプログラムを使う場合には、マニュアルで確認する必要がある。

上で求められたマトリクス方程式、

$$\begin{bmatrix} S \\ \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (13)$$

を、解くにはマトリクス $[S]$ の逆マトリクス $[S]^{-1}$ を式(13)の左から掛けてやればよい。ここで、 $(N \times N)$ (N は未知数の数) のマトリクスであるが、スパースな対称マトリクスになる。例えば、3次元有限要素法でよく用いられる、tri-linear (式(14)のように有限要素内のポテンシャル ϕ^e を展開) な6面体8接点要素を用いると、一つの接点は、8つの有限要素の構成点となり、自分自身を含めて27個の接点と相互作用をする。

$$\phi^e = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \quad (14)$$

いま各接点は4自由度をもつことから、一つの行、列に入る非ゼロ項の数は、108となり、これは N がどんなに大きくなっても変わらない。ここで逆マトリクス $[S]^{-1}$ を求める手法として、Gaussの消去法のような直接法と、CG (Conjugate Gradient) のような間接法とがある。間接法は、メモリも少なく済み、(収束すれば) 計算時間も早い。が、薄膜デバイスのように厚みの薄い金属面で構成されているモデルの場合、どうしても有限要素のアスペクト比が大きくなり、また、導電率 σ をもった有限要素が入ると収束性が極めて悪くなる。また、間接法は、マトリクスをセグメントに分けて、仮想記憶を用いディスクとのページング処理をしながら解くことができない(できても極めて効率が悪い)。そのため、例に示した磁気デバイスの解法では、Gaussの消去法を用いた。

3.1.2 有限要素法の利点 有限要素法の特長としては、「対象物を、実際に近い形で、実際の材料定数で解ける」点にある。ユーザは、境界条件にさえ気をつければ、その物理現象をいかにモデル化するかに集中できる(実際には、限られたメモリのなかで、いかに誤差の少ないように有限要素分割するかなど経験的ノウハウも大きい)。また、マトリクスがスパースな対称マトリクスで、マトリクスの各要素の計算も比較的簡単な、加減乗除でできるのも有限要素法の特長である。

3.1.3 有限要素法の欠点 有限要素法の欠点は、逆マトリクスの計算に膨大なメモリー容量を必要とする点だろう。例えば、たかだか10,000未知接点(4万変数(A_x, A_y, A_z, ϕ))の問題でも、Gaussの消去法では、マトリクスを記

憶させる配列だけでも倍精度で、 $40,000 \times 1,000$ (対象マトリクスのバンド幅を1,000として) $\times 8$ (Bytes) $\times 8$ (bits/Byte) $\times 2$ (複素数)、ということで5Gビット程度になる。しかし、ハードウェアの進歩と低価格化のスピードは速く、ここに示した例では、2GBのメモリと70GBの仮想記憶領域を組み、「腕力」でデバイス問題を解いている。有限要素法の権威 University of Toronto のKonrad教授も、筆者のこの様子を見て、「あなたの方法は、“Brutal Method”だ。」と称していたが、「結果が大事なデバイス設計の世界ではその方法がいいのかもしれない」と、ハードウェアに頼る方法を否定はしていなかった。

もう一つ、ポテンシャルを用いた有限要素法の問題としてよく言われているのが、「スプリアス解」の問題である。スプリアス解とは、磁束密度 B の発散がゼロ、電束密度 D の発散が電荷密度 ρ にならないような解をいう。有限要素法では、式(11)、(12)に真の連続なポテンシャル関数でなく、各要素ごとに式(9)のように近似した関数を用いているため、たとえ多次要素を用いても、1回微分は不連続になり、求めた解(ポテンシャル)は、いわゆる、弱解となり、最終的に、磁束密度 B と電束密度 D の発散条件が満たされなくなり、非物理的な解が現れる。スプリアス解を除去する方法としては、定式化の段階で「ペナルティ項」を付加したり¹¹⁾、辺要素¹²⁾を用いる方法が提案されている。

3.2 モーメント法

モーメント法による高周波解析は、有限要素法よりも歴史的に、はるかに古い。モーメント法の場合、式(8)でオペレータ L が積分関数であることから、後で述べるように各要素の計算には、有限要素法と違って、複雑な積分がでてくる。そのため、Galerkin法での離散化により、原理的にはすべての場合に汎用なモーメント法というのも可能であるが、実際には、それぞれの問題に適した重み関数や展開関数を用いることで、計算の高速化を図っている。また、磁性体の取り扱いなどで、有限要素法と違い、通常、ソースレベルでの「カスタマイズ化」が必要になる。

3.2.1 基本理論 モーメント法においては、通常、式(8)の未知関数 f には、表面電流 J (磁流 J_m)、既知関数 g には外部ソースによる印加電場 E^i (磁場 H^i) を割り付ける。またオペレータ L は、系内の物質からの散乱電場(磁場)を $E^s(H^s)$ とするとその接線成分により、

$$LJ = (-E^s)_{\text{tan}} = (j\omega A + \text{grad } \phi)_{\text{tan}} \quad (15)$$

と定義される。ここで A は、磁気ベクトルポテンシャル、 ϕ は電気スカラーポテンシャルで、一般には、以下のように定義される。

$$A(r) = \mu_0 \iiint J(r') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dv' \quad (16)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint q(r') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dv' \quad (17)$$

ここで有限要素法と同じように、未知関数 f を、式(9)の

ように展開する。一般に領域 Ω での関数 f と g の内積は、以下のように計算される。

$$\langle f, g \rangle = \iiint_{\Omega} f g^* d\Omega \quad (18)$$

ここで、 g^* は g の複素共役関数を表す。 L の領域内の適当な重み関数 w_m との内積を取ることに、

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, L f_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (19)$$

となる。これは、マトリクス $[l_{mn}]$ 、縦ベクトル $[\alpha_n]$ 、 $[g_m]$ を用いて以下の式で書ける。

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \quad (20)$$

上に述べたように、未知関数 f に電流、既知関数 g に電場を割り付けると、マトリクス $[l_{mn}]$ はインピーダンス $[Z_{mn}]$ 、縦ベクトル $[\alpha_n]$ は電流 $[I_n]$ 、右辺の縦ベクトル $[g_m]$ は、電圧 $[V_m]$ を表す。

上でも述べたように、モーメント法の場合、マトリクスの各要素の計算は、有限要素法と違い複雑な積分計算となる。その計算を（精度を落とすことなく）近似的に高速にするため、モデルに対応して、さまざまな、展開関数、重み関数が用いられる。その代表的なものとして、ポイントマッチング (point matching) 法、部分領域 (subsection) 法がある。ポイントマッチング法は、離散的な各点においてのみ、式 (19) が成り立つとして、その重み関数として、Dirac のデルタ関数を用い、内積計算における積分の次数を下けている。この方法は、有限要素法や FDTD が苦手としている、「細く長い線路」の解析などに用いられる。 f の領域の部分的な領域ごとに展開関数 f_n を用いる方法で、各部分領域ごとに、三角形関数や正弦関数を用いて近似する。実際のモーメント法の定式化は、複雑で、モデルごとに異なり、本解説の範囲も、筆者の能力も超えているので、ここではふれない。詳細に興味のある読者は、文献 13 などを参照されたい。

3.2.2 モーメント法の利点 モーメント法の利点の一つは、複雑な形状の線路から構成されるデバイスに対する磁場解析が、分割も簡単で、比較的高速にできることにある。モーメント法では、物質の表面だけをメッシュ分割すればよく、物質の内部、空間の分割はいらない。また、積分法であるので、有限な計算領域、境界条件を設定する必要がなく、無限遠方での放射パターンの解析などが簡単にできる。

3.2.3 モーメント法の欠点 磁気デバイスの解析を考えた場合、モーメント法では、磁性体の内部の分割を切らないため、磁性体のもつ透磁率を、表面インピーダンスの形で、表面要素に取り込む。磁性体の表皮深さを考慮するような問題への対応はほとんど不可能である。また、有限要素法や FDTD と違って、問題に合わせてソースコードレベルでの最適化が必要なことも、「ツール」としては欠点だろう。

4. FDTD 法

FDTD (Finite Difference Time Domain) 法は、時間項を含めた差分法で、1966 年の、「Yee 格子」の提案¹⁴⁾を起源とするが、実際にアンテナなどの解析に応用されだしたのは、Mur による吸収境界に関する論文¹⁵⁾などの出た 1980 年代になってからである。当時は、主に軍用に、大型並列計算機による大規模な計算が主だった。最近では、ワークステーションレベルでかなり実用的な解析が行われるようになり、磁気デバイスの分野でもいくつかの応用例が報告されている¹⁶⁾。FDTD 法一般に関する解説としては Taflov によるテキスト¹⁷⁾を参照されたい。

4.1 基本原理

FDTD は、その名のとおりに、タイムドメインでの解析法で、電磁現象の時間変化を解析する手法である。その基本的な原理としては、「電磁場といえどもその伝播速度は、真空中での光の速さ c を超えることはない」という、自然原理に基づいている。Fig. 4 は、上で述べた「Yee 格子」を示す。すなわち、電場と磁場の各成分を、 $1/2$ 格子ずつずらしながら割り付ける。FDTD 法では Maxwell の方程式のうち、電場磁場のローテーションの式、Faraday 則と Ampère 則のみを用い定式化する。また、電場と磁場を対称に扱うよう、電流密度 $\mathbf{j}$ [A/m²] 以外に、「磁流密度」 $\mathbf{j}_m$ [V/m²] を導入する。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{j}_m \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j} \quad (22)$$

ここで、例えば、 (i, j, k) の位置の、時間 $(n+1/2)$ での磁場 $\mathbf{H}$ の x 成分は、

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right) \quad (23)$$

から、その差分式を求め、まとめると、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} H_x \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = & \left(\frac{1 - (\rho'_{i,j,k} \Delta t / 2 \mu_{i,j,k})}{1 + (\rho'_{i,j,k} \Delta t / 2 \mu_{i,j,k})} \right) H_x \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} \\ & + \left(\frac{\Delta t / \mu_{i,j,k}}{1 + (\rho'_{i,j,k} \Delta t / 2 \mu_{i,j,k})} \right) \\ & \times \left(\frac{E_y \Big|_{i,j,k+1/2}^n - E_y \Big|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right. \\ & \left. - \frac{E_z \Big|_{i,j+1/2,k}^n - E_z \Big|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

すなわち、 $(n+1/2)\Delta t$ 時間の磁場 $\mathbf{H}$ の x 成分は、 Δt 時間「過去」の同じ (i, j, k) 位置での磁場 H_x と、 $(1/2)\Delta t$ 時間「過去」で、 (i, j, k) の周りの $(i, j \pm 1/2, k)$ 、 $(i, j, k \pm 1/2)$ 位置での電場 E_y 、 E_z 、それと、 (i, j, k) 位置の透磁率などの既知の材料定数で表される。ここで、 ρ' [Ω/m] は、等価磁気抵抗率を表す。このように、初めに任意の位置に初期条件と

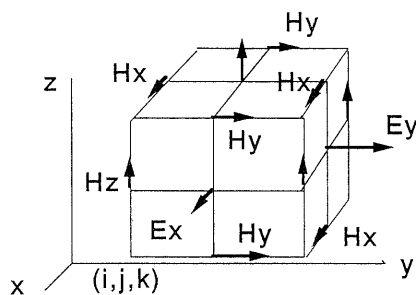


Fig. 4 Yee space lattice.

しての電場 $\mathbf{E}$, もしくは, 磁場 $\mathbf{H}$ を与えることで, 順次リープフロッグ (leap frog) 式に, Δt ごとの電磁, 磁場分布を求めることができる. ここで, すでにおわりのように, 電場と磁場とは時間的に $(1/2)\Delta t$ ごとずれて求まる.

4.2 FDTD 法の利点

その利点は, 上の原理からわかるように, マトリクスを解く必要がないということにある, そのため, 100 万要素程度の計算が, 200 MB 程度のメモリで可能である. もう一つの利点としては, タイムドメインでの解析法ということで, SPICE などの回路解析プログラムとの融合^{18)~20)}が, 比較的簡単にできることにある. 電磁場解析では, 通常, トランジスタや FET などの非線形能動素子は扱えない. また, LCR などの受動素子についても, その集積度が上がってくると, 現実には, 有限要素法, FDTD だけでは解析できない. そこで, 各タイムステップごとに, FDTD から磁場 (電場) を SPICE に, 電流 (電圧) の形で渡し, $(1/2)\Delta t$ [s] 後, SPICE から, 電圧 (電流) を, 電場 (磁場) の形で, FDTD へ返すということを繰り返すことにより, 例えば磁気ヘッドやインダクタの部分は FDTD で, IC の部分は SPICE で解析しながら, 回路込みでの電磁特性の解析ができる.

4.3 FDTD 法の欠点

FDTD 法の欠点としては, 差分法であるということから, 要素のアスペクト比を大きく ($1:10$ 程度でも) 取ると発散するということがある. そのため, 「シュガーキューブ (sugar cube)」と呼ばれる立方体要素が一般的である. さらに, FDTD 法は, 時間項も含めた差分法であるため, 時間項 ($c\Delta t$: c は真空中での光の速さ) についてのアスペクト比も考える必要がある. 発散を防ぐためには, 以下の条件を満たす必要がある.

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (25)$$

立方体要素を用いた場合には, 式 (25) は,

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}}} = \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \quad (26)$$

となる. ここで Δ は, 立方体の一辺の長さを示す. いま,

例えば, ギャップ長 $0.5 \mu\text{m}$ の磁気ヘッドを, $200 \mu\text{m} \times 200 \mu\text{m} \times 200 \mu\text{m}$ の領域で, 解析するとすると, シュガーキューブを用いた場合, 総要素数は, $64,000,000$ になる. また, 100 MHz で 10 サイクル計算しようとする, 式 (26) から, Δt は $10^{-15} [\text{s}]$, タイムステップ数は, $100,000,000$ ステップとなり, ワークステーションレベルでは現実不可能である. もう一つの欠点としては, FDTD は時間ゼロから計算を始めるため, 定常状態を求める場合には, 損失の少ない系では何サイクルも計算しないと収束しないという欠点がある.

4.4 吸収境界

有限要素法, FDTD 法のように, 有限な領域 Ω 内で問題を解く場合, 本来, 無限遠方へ放射される放射場のエネルギーが境界で反射し, ちょうど金属で囲まれた箱の中の問題を解くようになり, 本来ない定在波が現れてしまう. そこで, あたかも, 領域が無限遠までするようにする条件として, 吸収境界条件を設定する. ここで, その詳細を説明するつもりはないが, 一つ, 磁性をやるものとして興味深い吸収境界があるので, それをこの解説の本旨からははざれるが, 簡単に説明する. それは, PML (Perfectly Matched Layer) と呼ばれ, 1994 年に Berenger により提案された²¹⁾もので, 現在最も性能のよい吸収境界である. 内容は数学的なもので, 材料として (現在) 実在するものでないが, このような材料系が開発された場合, その開発者が特許料で一生遊んで暮らせることは間違いない. まず, 初めの条件として, 表面での反射が起こらない条件として自由空間のインピーダンス $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 [\Omega]$ とのマッチング条件,

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (27)$$

を満たす必要がある. ここで, $\sigma^* [\Omega/\text{m}]$ は, 磁気損失 ($= \omega \mu''$) を表す. ここまでであれば, フェライトでも可能かもしれない. PML としては, さらに, 同じ x 方向に振動する電場, 磁場に対する導電率, 磁気損失が, y 方向に進む電磁波と, z 方向に進む電磁波とは異なるという性質をもっている.

5. 実際のデバイスへの適用

高周波電磁解析の磁性デバイスへの適用は, 近年, 始まったばかりでそれほど多くはないが, 上にも述べたようにいくつか出てきている^{6), 16), 22), 23)}.

5.1 薄膜インダクタ, 磁気記録ヘッドへの適用

本解説はデバイスの高周波特性自体を議論するものではなく, その解析法を議論するものなので, ここでは, 高周波に特徴的な結果の一つを解説する. Fig. 5 は, 940 MHz で動作するある薄膜インダクタの特性の磁性膜厚依存性をプロットしたもの (詳細な条件は文献 6, または, 文献 22 を参照) だが, 透磁率は一定としているのに, 必ずしも膜厚

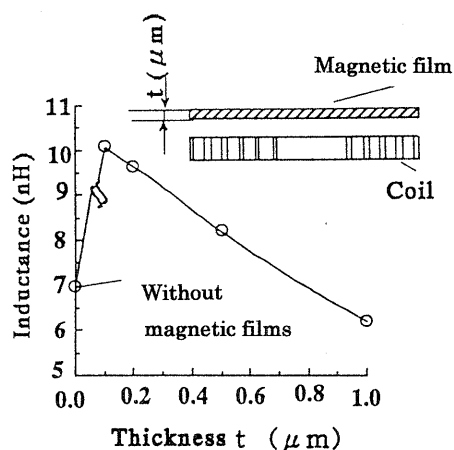


Fig. 5 Effect of the magnetic film thickness ($\mu_r = 300$, $\sigma = 10^6$ S/m).

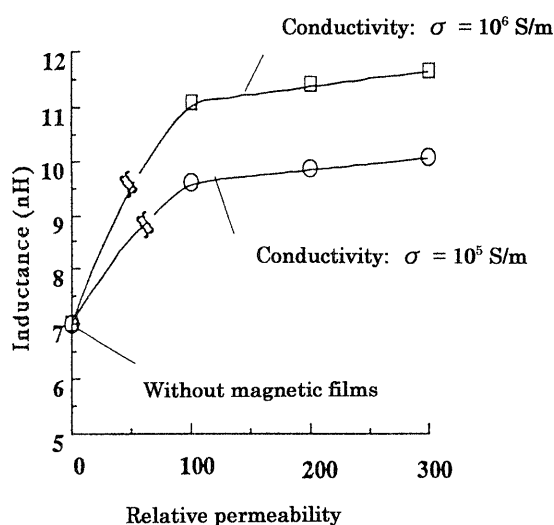


Fig. 6 Effect of the permeability and conductivity of magnetic films (thickness: $0.1 \mu\text{m}$).

の増大に伴いインダクタンスは増大していない。この現象は、実験的にも確認されており^{4), 5)}、表皮効果だけでは説明できない現象である。Fig. 6 は、やはり 940 MHz で、横軸にインダクタの磁性膜の比透磁率をとり、2 種類の導電率をもった磁性膜からなるインダクタのインダクタンスをプロットしたものである。この結果から、高周波においては、膜の導電率をできるだけ下げることが大切なことがわかる。

5.2 磁気デバイスの高周波化に対する留意点

前節の膜厚に関する現象は、膜の導電率 σ による高周波電磁場の遮蔽効果のためと考えられる。Fig. 7 は、横軸に膜厚、縦軸に金属内での磁場強度に膜厚をプロットしたもののだが、ピークの膜厚はややずれているが、Fig. 5 と同じような特徴のカーブが得られる。やはり同じ 940 MHz の周波数を用いている携帯電話の Cu の電磁シールドが、表皮深さの 1/3 程度の膜厚で、-80 dB といった十分なシールド特性がとれているのも同じ効果と考えられる。このことと、Fig. 6 から高周波の磁気デバイスでは、金属内部で

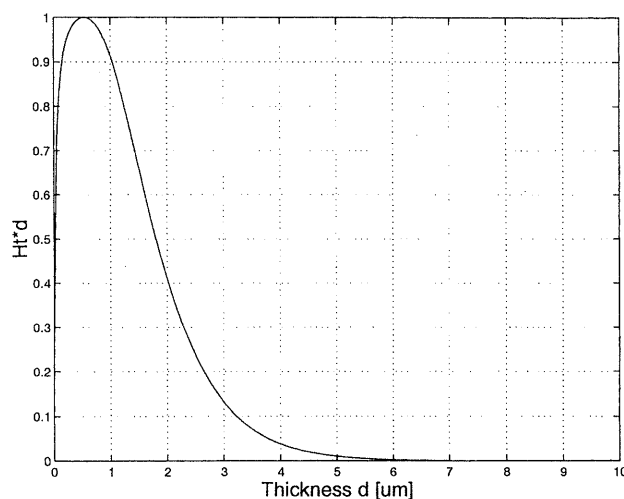


Fig. 7 Product of the transmission rate and thickness.

の磁場強度を大きくするため、磁性膜の導電率をできるだけ低くすることが大切であることがわかる。すなわち、磁性デバイスの高周波化に、高抵抗軟磁性膜^{7), 24)}、高周波での透磁率の測定手法²⁵⁾の開発が欠かせない。

6. ま と め

本解説では、磁性デバイスの解析においても、周波数が高くなると、変位電流の効果が無視できなくなることを、まず示した。デバイスにもよるが、磁性デバイスの解析でフルウェーブ解析を必要とするのは、だいたい 500 MHz よりも上の周波数あたりからである。また、有限要素法、モーメント法、FDTD 法という、代表的な高周波電磁場解析手法について、その特徴を解説した。これらはあくまでも「ツール」であり、万能なツールは決してなく、解くべき問題、モデルに合わせて最適なツールを選択していく必要がある。データ転送の高速化、使用帯域の広域化に伴うキャリアの高周波化は、今後ますます進み、磁性デバイスが GHz の信号を扱う日も遠くないと考えられる。また、高周波解析は、ある意味で、ハードウェアの発展に伴って発達してきたところもあり、今後より一般的なものとなっていくと考える。

謝 辞 インダクタについての実験データ、ご討論をいただいた東北大学電気通信研究所の山口助教授、高周波軟磁性材料に関するデータ、ご討論をいただいた東北大学科学計測研究所の島田教授、有限要素法理論について、ご示唆いただいた University of Toronto, Konrad 教授に感謝いたします。

文 献

- 1) W. H. Doyle, S. Stinnet, C. Dawson, and L. He: 日本応用磁気学会誌, 22, 91 (1998).

- 2) 斎藤郁夫: 日本応用磁気学会誌, **22**, 1437 (1998).
- 3) P. C. W. デイヴィス: 「重力波のなぞ」, 松田訳 (岩波書店, 1981).
- 4) 山口, 高橋, 末沢, 熱海, 荒井, 菊池, 島田, 李, 田邊, 高田: 電気学会マグネティクス研究会, **MAG-98-16**, 19 (1998).
- 5) 末沢, 高橋, 山口, 荒井, 菊池, 島田, 田邊, 伊東: 電気学会マグネティクス研究会, **MAG-98-247** (1998).
- 6) S. Tanabe, Y. Shiraki, K. Itoh, M. Yamaguchi, and K. I. Arai: Intermag '99 GR-13, to be published.
- 7) 李, 北上, 島田, 末沢, 山口, 荒井, 田邊: 電気学会マグネティクス研究会, **MAG-98-14** (1998).
- 8) 例えば, 太田恵造: 「磁気工学の基礎 II」 9 章, p. 354 (1973).
- 9) M. Yamaguchi, K. Suezawa, and K. I. Arai: *J. Appl. Phys.*, **85**, No. 11 (June, 1999).
- 10) G. Arfken: "Mathematical Methods for Physicists," Chapter 9 (Academic Press, 1970).
- 11) N. A. Demerdash and R. Wang: *IEEE Trans. Magn.*, **26**, 1656 (1990).
- 12) M. Hano: *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-32**, 1275 (1984).
- 13) R. F. Harrington: "Field Computation by Moment Methods" (IEEE Press, 1992).
- 14) K. S. Yee: *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, **14**, 302 (1966).
- 15) G. Mur: *IEEE Trans. EMC*, **23**, 377 (1981).
- 16) 田邊信二: 信学技報, **MR98-24** (1998).
- 17) A. Taflov: "Computation Electrodynamics" (Artech House, Inc., 1995).
- 18) V. A. Thomas *et al.*: *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, **4**, 141 (1994).
- 19) G. Kobidze: EMC '99 Tokyo, 19P1-5, to be published.
- 20) 田邊, 山口: 三菱電機技報 4 月号, No. 155 (1999).
- 21) J. P. Berenger: *J. Computational Physics*, **114**, 185 (1994).
- 22) 田邊, 白木, 高田, 山口, 荒井: 電気学会マグネティクス研究会, **MAG-98-15** (1998).
- 23) 田邊信二: 日本応用磁気学会講演概要集, 21aD-1, 199a (1998).
- 24) 加藤和照: 東北大スピニクス研究会, 97-1-4 (1997).
- 25) 藪上, 山口, 荒井: 電気学会マグネティクス研究会, **MAG-96-163** (1996).

(1999 年 4 月 26 日受理)



田邊信二 たなべ しんじ

昭 55 東北大学理学部物理学科卒, 同年三菱電機(株)入社. 主に垂直磁気記録ヘッドの開発に従事. 昭 57~58 東北大学電気通信所, 平 1~2 University of Minnesota (MINT) 研究員, その後, 平 8 より, 電磁波関係の研究にも従事, 現在に至る. 専門 磁性物理, 電磁気学