

1-10

(昭和 47 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

船の応答の非線型性と高次元スペクトラム

——バイスペクトラムの応用——

正員 山内保文* 正員 大津皓平**

On the Non-Linearity of Ship's Response and the Higher
Order Spectrum—Application of the Bispectrumby Yasufumi Yamanouchi, *Member*
Kohei Ohtsu, *Member*

Summary

When the ship's response in waves is non-linear, the ordinary power spectrum of the response process is not enough and sometimes even misleading to show the statistical character of the ship's response.

One of the authors has attacked this problem^{1),3)} and computed theoretically the effect of weak-non-linearity of known types of ship's rolling on the apparent power spectrum, through a perturbation method, and also introduced^{2),3)} the multi-input spectrum analysis method to analyse a certain type of non-linearity of a ship's response. However these ways resulted to be not enough to show directly the existence of non-linearity and its character, and he has pointed out the necessity to introduce the higher order spectrum in the analysis of ship's response in waves. At present stage however, very few works have been published on the higher order spectrum, and its physical interpretation is not fully explained, and even the practical computational procedure are still left uncertain and unclear.

Here the authors firstly considered the physical meaning of the higher order spectrum, its relations with the character of the non-linearity of response process, on the basis of comparison with the ordinary power spectrum, and tried to make clear the necessity of higher order spectrum analysis in the study of ship's response in waves. Secondly, taking the Bispectrum and Trispectrum, the 2nd and the 3rd order spectrum as the most basic and important higher order spectra, the authors tried to do the same thing, relating with the skewness and peakedness of the response process, and then showed examples of Bispectrum, analysed from the ship's oscillations in waves.

Thirdly, to check the above mentioned thoughts, an analogue simulation of the weak non linear rolling was tried by analogue computer. A white compulsory input was feeded to the simulator which is weakly non-linear, and the record of output was analysed and the Bispectra were obtained.

The results are not fully satisfactory ones in some points, however, as the first step of introduction of the higher order spectrum method in the study of ship's response, expecting to proceed into the Cross-Bispectra or cross higher order spectra in near future, and to make up the deficiency of published materials on these problems, the authors wished to present these results.

As Appendices, the F.F.T. program, which is very effective in the computation of higher

* 船舶技術研究所

** 東京商船大学 (昭和 46.4~昭和 47.3 船舶技術研究所)

order spectrum, as well as in ordinary spectrum, and the program to get the Bispectrum through F. F. T. are summarised.

1 ま え が き

極端に高い波でなくとも、波の中の種々の応答の中に、様々な非線型性を示すものがあることは、多くの規則波中の模型実験や、理論的な考察によつて確かめられている。一方海洋波中の船の応答は確率過程として扱うことが便利であり、数式的な応答の表現にも、また統計的な予測にも都合のよいことも、今日ではすでに多くの人々の常識となつている。その場合解析には入力としての波浪および船体応答のいわゆる通常のオートスペクトラム、あるいは入力と応答とのクロススペクトラム等、周波数についての一次元スペクトラムが極めて有力な手がかりを与えることもよく知られている。

しかしながら、たとえば応答のオートスペクトラムが応答の周波数成分のパワーの分布を純粹に示し、時間領域で応答過程が、これら独立な周波数成分波の重畳、すなわち線型結合の形のみで完全に表現できるのは、応答過程が線型の場合のみであつて、海洋波浪を線型ガウス過程と考えれば、応答特性が線型である場合に限られることもすでに明らかである。波浪より与えられる外力が非線型である場合はもとより、応答特性が非線型になつたときには、もはや応答のスペクトラムの各周波数成分は互に独立ではなくなり、周波数領域においても他の周波数成分との結合が生じ、いわゆるエネルギーの漏洩、受け渡しが起こり、見かけのスペクトラムは、周波数領域における各成分の真の姿を示さなくなる。非線型応答に対しては、このような確率過程論的なアプローチは全く無力ではないかと批判されたのも、この故である。著者の1人はかつて^{1),2)}、一般に応答特性が運動方程式の上で種々の形の弱い非線型性を持つ、例えば船の横揺れのような応答について、スペクトラムの上に如何に非線型項の影響が現われるかを、近似計算によつて求めて報告した。また多入力、あるいは特別な形の高次スペクトラムの手法を用いて、ある形式の、弱い非線型特性が存在すると推定される場合について、応答の性質の推定を試みた^{2),3)}。しかしこれらの方法は、いずれも非線型性の存在と、統計論的に直接表示するものではない。

非線型結合のある場合には、他の周波数成分との関連の度合いを調べる必要があることは想像されるが、そのためには1次元スペクトラム、すなわち2次モーメントのスペクトラムでは不十分で、3次モーメント以上のスペクトラムが必要となつてくる。このようなスペクトラムの存在と、過程の非線型性との関連が1960年代に入ると、数人(例えば^{4)~6)}の統計学者によつて研究されている。このことは、確率分布において最も基礎となるガウス分布は、平均値と分散すなわち1次モーメントと2次モーメントのみによつて完全に表現されるのに反し、これが非ガウス分布になつて、あるいは歪み(skew)、あるいは尖つて(peak)くると、3次モーメントによつて表わされる歪度(skewness)、4次モーメントによつて示される尖度(peakedness)等が必要となり、分布が複雑になるにつれてさらに高次のモーメントを要するようになることとよく対応する。2次元周波数スペクトラムをバイスペクトラム(Bispectrum)、3次元周波数スペクトラムをトリスpectrum(Trispectrum)と呼んでいる。船の波浪中の応答の解析にも、このような高次元スペクトラム解析が必要であることは、先に著者の一人がすでに²⁾指摘したところである。

ところが現在の段階では、バイスペクトラム等の高次元スペクトラムについては、Hasselmann⁷⁾の浅海波に対する応用例や、岩田⁸⁾の同じく浅海波の計算例、永田⁹⁾の温度躍層がある場合の海水温度勾配の鉛直分布についての計算例が見られる程度で、その他の実用例は極めて少く、計算法の詳細すら明らかではない。またその持つ物理的な意味に至つては、僅かに永田の前記論文⁹⁾による、スパイクの存在する場合、正弦波の複合と考えてよい場合等に対する考察、あるいは永田¹⁰⁾による一次元高次スペクトラムとの関係についての考察が見られる程度で殆ど参考とすべきものがなく、不明の点が極めて多い。Hasselmann¹¹⁾はまた船の非線型運動についても確率論的考察を行つているが、極めて一般的、理論的な簡潔なものであつて、内容の意味づけや実用化を行う参考としてはやや不十分である。

著者らは今回、船の横揺れの実船試験記録から、その非線型性を再び追求し、バイスペクトラムをも求めてみた。そのため先ずバイスペクトラムの実用計算プログラムを開発し、バイスペクトラム、トリスpectrum等の性質、時系列の歪度、尖度等との関連について考察整理した。またこれをさらに室内実験によつて確かめるべく、弱い非線型特性を持つ運動方程式で表わすことのできる横揺れをアナログコンピュータによつてシミュレー

としその結果を解析した。すなわちノイズ発生器による白色な信号を外力として加えて不規則横揺れ応答を求め、その歪度・尖度・バイスペクトラム等を計算し、非線型要素の性質とバイスペクトラムの関連を調べた。その結果、シミュレーションにやや不完全なところがあつたほか、例に用いた横揺れの形のような非線型な応答の解析には、バイスペクトラムのみではあるいは十分ではなく、トリススペクトラム等さらに高次のスペクトラムが必要ではないかと想像されるとき、あるいはバイスペクトラムにはなお十分に説明できない点が見出される等、必ずしも十分満足な成果が得られたとは言えない。しかし、今後、他の形式の非線型応答の解析にも用いるためまた次の段階として当然試みる必要のあるクロスバイスペクトラムあるいは他の高次スペクトラムの理解とその解析への準備として、高次元スペクトラムの船の応答解析への応用の第一歩として、またその物理的な意味を明らかにして、将来の活用の可能性の有無とその限界を探る一助として、その結果をあえてここに報告することとした。

なお、バイスペクトラムなどの高次元のスペクトラムは、従来のように相関函数からの方法では膨大な計算を要し、計算機によつても極度に長い計算時間を要し、現実には実行をためらわせるものがある。そこで著者らは最近¹²⁻¹⁴⁾一次元スペクトラムの計算に当つても、その高速性の注目されている高速フーリエ変換法 F. F. T. (Fast Fourier Transform) を用いてプログラムを作成した。F. F. T. は一般のスペクトラム、クロススペクトラム解析にも今後大いに活用されると考えられるので、付録に F. F. T. のプログラムの方法、およびこの方法によるスペクトラムの推定法について考案、整理したところを示しておくこととする。

2 船体応答の非線型性と高次元スペクトラム

船体応答の非線型性を統計的立場より検討しようとする場合、高次元高次スペクトラムが必要になつてくるとはまえがきにおいて述べたところである。ここでは先ず高次元高次スペクトラムの定義を示し、もとの過程の時間領域における性質すなわちここでは、船体の非線型応答過程の性質との関連について考察し整理しておくことにする。

2.1 高次元スペクトラムの導入

高次元高次モーメントスペクトラムは今まで我々の親しんできた普通のスペクトラム、すなわち一次元二次モーメントスペクトラムあるいはパワースペクトラム（分散スペクトラムとも言う）と対比しやすい形によつて、つぎのように定義することができる。

平均値 $m=0$ の定常確率過程 $x(t)$ のパワースペクトラム $S(\omega)$ は、相関函数のフーリエ変換として

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.1)$$

と表わされた。ここで相関函数 $R(\tau)$ は、確率過程 $x(t)$ の二次モーメントの平均値で、

$$R(\tau) = E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt \quad (2.2)$$

このとき $R(\tau)$ は (2.1) のフーリエ逆変換として、

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.3)$$

と表わすことができる。

同じようにして高次元スペクトラム、一般に $(n-1)$ 次元 (n 次モーメント) スペクトラムは、

$$B_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{M}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_{n-1}\tau_{n-1})} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{n-1} \quad (2.4)$$

と $(n-1)$ 次元フーリエ変換の形で表わされる。 $\tilde{M}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ は確率過程の n 次モーメントの平均値で

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) &= E[x(t) x(t+\tau_1) x(t+\tau_2) \dots x(t+\tau_{n-1})] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau_1) x(t+\tau_2) \dots x(t+\tau_{n-1}) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

である。このとき (2.4) のフーリエ逆変換は、

$$\tilde{M}_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) e^{j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_{n-1}\tau_{n-1})} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{n-1} \quad (2.6)$$

のようになる。

ここで特に $n=3$ とした場合すなわち二次元三次モーメントスペクトラムをバイスペクトラム (Bispectrum),

$n=4$ とした三次元四次モーメントスペクトラムをトリスpektrum (Trispectrum) と呼んでいる。

2.2 応答時系列の統計的性質と高次元スペクトラム

船体応答を表わす確率過程 $x(t)$ が, (広い意味で) 定常のとき, $x(t)$ は Fourier Stieltjes 積分の形として,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dZ(\omega) \quad (2.7)$$

と表わすことができる。そのときこの表現を (2.2) に代入して計算すれば,

$$E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] = \delta(\omega_1 + \omega_2) S(\omega) d\omega \quad (\delta; \text{Dirac の } \delta \text{ 関数}) \quad (2.8)$$

の関係があることがわかる。これは 2 つの周波数 ω_1, ω_2 について $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の関係のあるときだけ $[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)]$ の平均値は, $S(\omega)d\omega$ の値をもち, $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ のときはいつも 0 になることを示す。時間領域のこの過程の分散 $E[x^2(t)]$ は,

$$E[x^2(t)] = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.9)$$

であるから, パワースpektrum は時間領域での時系列の分散に対する各周数成分からの寄与の程度を表わしていると考えられる。このことからパワースpektrum はまた分散spektrum とも呼ばれる。

($n-1$) 次元 (n 次モーメント) spektrum に対しても

$$E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)\cdots dZ(\omega_n)] = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n) B_n(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}) d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_{n-1} \quad (2.10)$$

となつて, 周波数における n 個のフーリエ係数の積 $dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)\cdots dZ(\omega_n)$ の平均値は, $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 0$ のときのみ $B_n(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1})d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_{n-1}$ の値をもち, $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n \neq 0$ のときは 0 となることを示している。一方 (2.6) 式より

$$M_n[0, 0, \cdots, 0] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}) d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_{n-1} \quad (2.11)$$

と表わすことができ, また (2.5) 式より

$$M_\nu(0, \cdots, 0) = E[x^\nu(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{x(t)\}^\nu dt \equiv \mu_\nu \quad (2.12)$$

となるから, μ_ν は, $x(t)$ の ν 次モーメントの平均値である。したがって (2.11) は, 一般に ($n-1$) 次元spektrum を ($n-1$) 周波数の全領域について, 積分したものはもとの過程 $x(t)$ の n 次モーメントの平均値を表わすということを示している。 μ_2 は分散 σ^2 である。特に $\nu=3$ のとき, σ^2 によつて正準化して

$$\frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = s \quad (2.13)$$

は歪度 (Skewness) と呼ばれる統計量, $\nu=4$ のとき

$$\frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = p \quad (2.14)$$

は尖度 (Peakedness) と呼ばれる統計量となる。

(2.10) において $n=3$ の場合, すなわちバイspektrum について考えると,

$$E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)] = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) B_3(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.15)$$

すなわち任意の 3 つの周波数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ をとつて, そのそれぞれの周波数におけるこの過程のフーリエ成分の積の平均値をとると, 三周波数の和が 0, すなわち $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ になるときのみ値をもち, その他の場合は存在しない。そして (2.11) に示されるように

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_3(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \mu_3 \quad (2.16)$$

すなわちバイspektrum を周波数 ω_1, ω_2 の全領域にわたつて積分すれば, この過程 $x(t)$ の三次モーメント μ_3 になる。バイspektrum の縦軸を分散 σ^2 を用いて正準化 (normalize) しておけば積分すると $\mu_3/(\sigma^2)^{3/2} = s$ となつて歪度を示すことになるからバイspektrum の体積は歪度を示すと云つてもよい。(Fig. 1) つまりある周波数の組み合わせ (ω_1, ω_2) におけるバイspektrum の値は, $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$ によつて従属的に定まる第三の周波数 ω_3 におけるフーリエ成分 $dZ(\omega_3)$ と ω_1, ω_2 のそれぞれにおけるフーリエ成分との積 $dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)$ の平均値 $E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)]$ ($\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$) によつて示され, もとの過程 $x(t)$ の三次モーメントすなわち歪度に寄与する度合いを示していると言ふことができる。このことは, ある周波数 ω_1 に

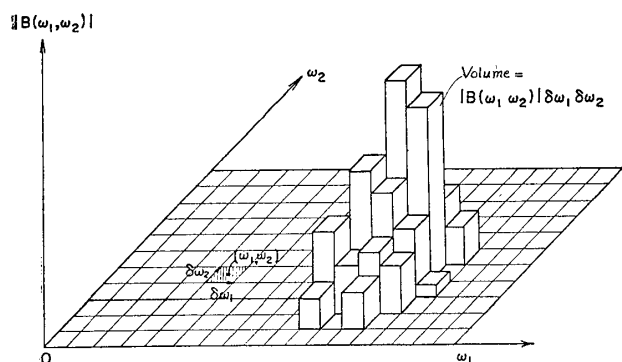


Fig. 1 Bispectrum

のフーリエ成分によつても定まるということである。 ω_1 と ω_2 の関連を示すバイスペクトラムは同時に、 ω_1 と ω_3 , ω_2 と ω_3 との関連をも示すものであることは、後に (2.20) 式によつて再び示されるとおりである。バイスペクトラムの表示法やそこから生ずる性質等については次章3において再び補うこととする。

2.3 弱非線型過程と Quasi Gaussian 分布

ガウス過程に対しては、バイスペクトラム以上の高次元スペクトラムは存在しない。あるいは逆にある過程が周波数成分が互いに独立なフーリエ成分のみによつて完全に表わし得るときには、いわゆる線型重ね合わせによつてガウス過程となる。もし外力がガウス過程で表わされるとき、応答の性質が線型であるならば、応答もガウス過程となる。そのとき平均値0の応答過程の時系列 x_t の統計分布 $p(x_t)$ はガウス分布となり、分散 $\sigma_{x_t}^2$ のみが定まれば一義的に定まる。すなわちパワースペクトラムだけによつてこの過程は完全に表わされる。ところが応答の性質が非線型となると、たとえ外力がガウス過程であつても応答は非ガウス過程となり、応答時系列 x_t の分布もガウス分布ではなくなり分散 $\sigma_{x_t}^2$ だけでは一義的に定まらなくなる。したがつて応答の過程もパワースペクトラムだけでは表現できなくなる。一般に波浪中の船の多くの応答には弱い非線型性があることが知られている。このとき x_t の分布もガウス過程からの歪みは極端に大きくはなく分布函数 $p(x_t)$ はいわば、Quasi Gaussian となる。そのとき $p(x_t)$ は、いわゆる Gram Charier の級数として知られているように、ガウス分布 $\phi(x_t)$ を第一近似としその逐次導函数 $\phi^{(n)}(x_t)$ を用いた級数展開

$$p(x_t) = c_0 \phi(x_t) + c_1 \phi^{(1)}(x_t) + c_2 \phi^{(2)}(x_t) + c_3 \phi^{(3)}(x_t) + \dots + c_n \phi^{(n)}(x_t) + \dots \quad (2.17)$$

が可能となる¹⁵⁾。ガウス分布 $\phi(x_t)$ および n 次の導函数 $\phi^{(n)}(x_t)$ はお互いに直交であることは、いわゆる Hermite の多項式による表現によつて明らかであるから、(2.17) は一つの直交級数展開である。そのとき

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1 & c_1 &= c_2 = 0 \\ c_3 &= -\frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} & c_4 &= \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} - 3 \\ c_5 &= \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

となることもわかつている。ここで μ_r は過程 x_t の r 次モーメントである。したがつて c_3, c_4 はそれぞれ

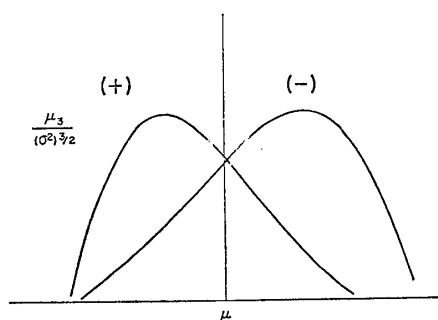


Fig. 2 Skewness

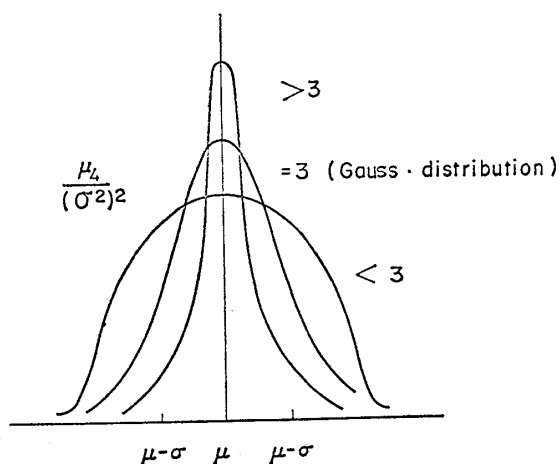


Fig. 3 Peakedness

れ先に (2.13), (2.14) 式によつて示した歪度, 尖度に対応する。尖度はガウス分布では 3 であることもこれより明らかである。いずれもガウス分布を基準として考えたもので, 歪度は Fig. 2 のようにピークが左へ寄るか, 右へ寄るかを示し, 尖度は Fig. 3 のようにガウス分布のピークの尖り方を 3 とし, これより鋭く尖っているか, 鈍いかを示すものである。このとき非線型な応答の過程 $x(t)$ そのものは Quasi-Gaussian 過程となる。そのときこの過程 $x(t)$ もガウス過程 $x^{(1)}(t)$ を第一次近似とし, 逐次近似パラメータ ε に関して展開することができることも知られている⁷⁾。

$$x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + \dots + x^{(n)}(t) + \dots \quad (2.19)$$

ただし $x^{(n)}(t) = 0(\varepsilon^n)$

ここで理論の詳細は他に譲り詳しくは述べないが, 第二項以下の一般に第 n 項の高いオーダーの項は, 第一近似であるガウス過程 $x^{(1)}(t)$ の第 n 次モーメントを用いて表現することができる。すると (2.19) のように表現される過程 $x(t)$ のパワースペクトラムを計算すると主として第一近似である第一項のガウス過程のパワースペクトラムが現われる。ただしそれは高次項の存在によつて多少変形されている。これと同じく, $x(t)$ のバイスペクトラムには主として第一項と第二項との相互作用による修正項の性質が現われるという関係があり, 次のような関係も導かれる。

$$B_3(\omega_1, \omega_2) = 2[S(\omega_1)S(\omega_2)K(-\omega_1, -\omega_2) + S(\omega_1)S(\omega_1 + \omega_2)K(-\omega_1, +\omega_1 + \omega_2) + S(\omega_2)S(\omega_1 + \omega_2)K(-\omega_2, +\omega_1 + \omega_2)] + \dots \quad (2.20)$$

すなわち弱い非線型, 非ガウス過程に対して, バイスペクトラムは, 主として二次の相互干渉係数を表わす。但し右辺には, 更に高次の項も含まれるので, トライスペクトラム以上が存在するときの効果も多少含まれてしまうことには注意する必要がある。これは, 非線型過程のパワースペクトラムには, バイスペクトラム以上の高次元スペクトラムが存在するため, その効果が多少含まれてしまい, パワースペクトラムが多少変形されて表われることと同様である。

同様に (2.19) 式の第 3 項は第一項, 第二項と干渉してトライスペクトラムを発生させる。すなわち高次元スペクトラムは弱い非線型, 非ガウス過程のパワースペクトラムによつては表わし切れない修正項を表現するのに用いられることが理解されよう。 n が大きくなつていくにつれてその重要度が減じてくることも想像される。但し非線型の性質によつて, 特にその性質を示すに有効な高次元スペクトラムが存在することはあり得ることである。

2.4 クロスバイスペクトラム

今まで述べたのは何れも一つの過程 $x(t)$ のバイスペクトラム, いわばオートバイスペクトラムとでも云うべきもので, $B_{xxx}(\omega_1, \omega_2)$ と表現してよいようなものである。しかし他の過程, 例えば入力 $x(t)$ に対する出力 $y(t)$ のように二つの過程の間に一次元スペクトラムとしてクロススペクトラム $S_{yx}(\omega)$ が存在するように, クロスバイスペクトラム $B_{yxx}(\omega_1, \omega_2)$ が次のように定義される。

$$B_{yxx}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{yxx}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.21)$$

$$M_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = E[y(t+\tau_1) \cdot x(t+\tau_2) \cdot x(t)] \quad (2.22)$$

(但し $E[y(t+\tau_1)] = 0$ とする)

そしてこのクロスバイスペクトラムは, 入力 $x(t)$ がガウス過程である場合, 非線型応答の二次近似

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_1(\mu) x(t-\mu) d\mu + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\mu_1, \mu_2) x(t-\mu_1) x(t-\mu_2) d\mu_1 d\mu_2 \quad (2.23)$$

ができるときには

$$B_{yxx}(\omega_1, \omega_2) = 2[H_2(-\omega_1, -\omega_2)H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)S(\omega_1)S(\omega_2) + H_2(-\omega_2, -\omega_3)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)S(\omega_2)S(\omega_3) + H_2(-\omega_3, -\omega_1)H_1(\omega_3)H_1(\omega_1)S(\omega_3)S(\omega_1)] + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } H_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\mu) e^{-j\omega\mu} d\mu \\ H_2(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\mu_1, \mu_2) e^{-j(\omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

の形となつて, $H_2(\omega_1, \omega_2)$ のような応答特性を求められるのに使われる。これらについての詳細はまた次の機会

に稿をあらためて実例計算と共に示すことにし以下主としてオートバイスペクトラムについて扱うこととする。

3 バイスペクトラム解析と船体応答過程

3.1 バイスペクトラムの性質とその推定法

2で検討したように、高次元高次スペクトラムは船体応答過程を調べるに当つて、1) 周波数相互間の関連性、あるいは各周波数の独立性を調べることに、2) 従つて応答過程の非線型影響をある形式で表現できること、3) 歪度、尖度等への周波数の場からの寄与を示しうることなどの役割をもつことがわかつた。そこで著者等は、高次元高次スペクトラムのそのような効用の確認と、その実用化の第一歩として、先ずバイスペクトラムを取り上げ推定計算法、解釈の仕方、得られる知見の範囲等について検討を行うことにした。バイスペクトラムの中には2において少しふれたごとくクロスバイスペクトラム (Cross Bispectrum) 赤池⁶⁾によつて提案された混合バイスペクトラム (Mixed Bispectrum) など種々なものがある。しかしこれらのスペクトラムの推定にも、ほぼ同じ考え方ができると思われるので、ここでは、先ず純粋な1つの過程 $x(t)$ のいわば、オートバイスペクトラム

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.1)$$

$$M(\tau_1, \tau_2) = E[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2) dt \quad (3.2)$$

について検討することとする。一般に (3.1) 式によつて示されるバイスペクトラムは複素数であるから、実数部と虚数部、又は絶対値 (Modulus) と位相 (Argument) の組合わせによつて示される。絶対値は2乗の形で示されることもある。また、バイスペクトラムを過程の分散により正準化して表現しても良いかも知れない。このような種々な表わし方があるのでバイスペクトラムを見る場合には注意する必要がある。バイスペクトラムは2で示したように周波数領域で $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ という関係で結ばれた周波数間の関連性を示す二次元スペクトラムである。

バイスペクトラムには次のような対称性があつて計算の簡略化にも役立つ。

$$B(\omega_1, \omega_2) = B(-\omega_1, -\omega_2)^* \quad [*は共役を示す] \quad (3.3)$$

$$B(\omega_1, \omega_2) = B(\omega_2, \omega_1) = B(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) = B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) \quad (3.4)$$

これは時系列の定常性から、時間領域で

$$M(\tau_1, \tau_2) = M(\tau_2, \tau_1) = M(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) = M(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) = M(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) = M(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) \quad (3.5)$$

であることによつて生ずる関係である。

これ等の関係によると、まず (3.4) によつて ω_1, ω_2 および $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$ の3つの周波数から2つずつ取り出すあらゆる順列によつて得られる6個の組み合わせに対してバイスペクトラムがすべて等しいことを示している。また (3.3) によれば、互いに共役関係にある二つのバイスペクトラムは、実数部と虚数部のそれぞれの絶対値が等しく虚数部の符号だけが反対になる関係のあるもの、云いかえればバイスペクトラムの絶対値 (Modulus) は等しく位相 (Argument) が正負逆になるようなものである。したがつてさらに6個のバイスペクトラムの性質が直ちに導かれることになり、実数部、虚数部の絶対値あるいは振幅の絶対値を考える限り合計12個のバイスペクトラムがすべて等しいことになる。以後お互いに共役関係のある二つのバイスペクトラムを上の意味で等しいものとみなして議論を進める。これ等の関係を示したのが、Fig. 4 である。Fig. 4 によると、全平面は先に述べた12個の象限に分けられ、それらの中で、②⑤⑥⑨⑩象限内の○印の点は、これ等の点でのバイスペクトラムが①象限の点 $P(\omega_1, \omega_2)$ のバイスペクトラムと等しいことを示し、③④⑦⑧⑪⑫象限内の×印の点6個は、これ等の点のバイスペクトラムが①象限の点 $P(\omega_1, \omega_2)$ のバイスペクトラムと共役関係にあることを示している。また図には、①象限における折線 ABCD 上のバイスペクトラムが各象限のどのような折線上のバイスペクトラムと対応するかを、各折線の各辺に十、十、十等の短い縦線を入れることによつて示してある。各折線において同じマークのついた辺同士が対応している。このように見るとたとえば①の点 $P(\omega_1, \omega_2)$ のバイスペクトラムは上に述べた意味で、 $P(\omega_1, \omega_2)$ 自身のみならず他の11個の対応する点のとりバイスペクトラムを代表していると考えられるので計算の結果は、全平面の代りに $1/8$ 象限に当る $\infty > \omega_1 \geq 0, \omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$ の範囲すなわち①の平面の直角に二等辺三角形の領域で示せば十分であることがわかる。したがつて以後①象限でのみ、バイスペクトラムをとり扱うことにする。しかしこの①の象限のみで、3つの周波数の関連を判断するためには、計算され

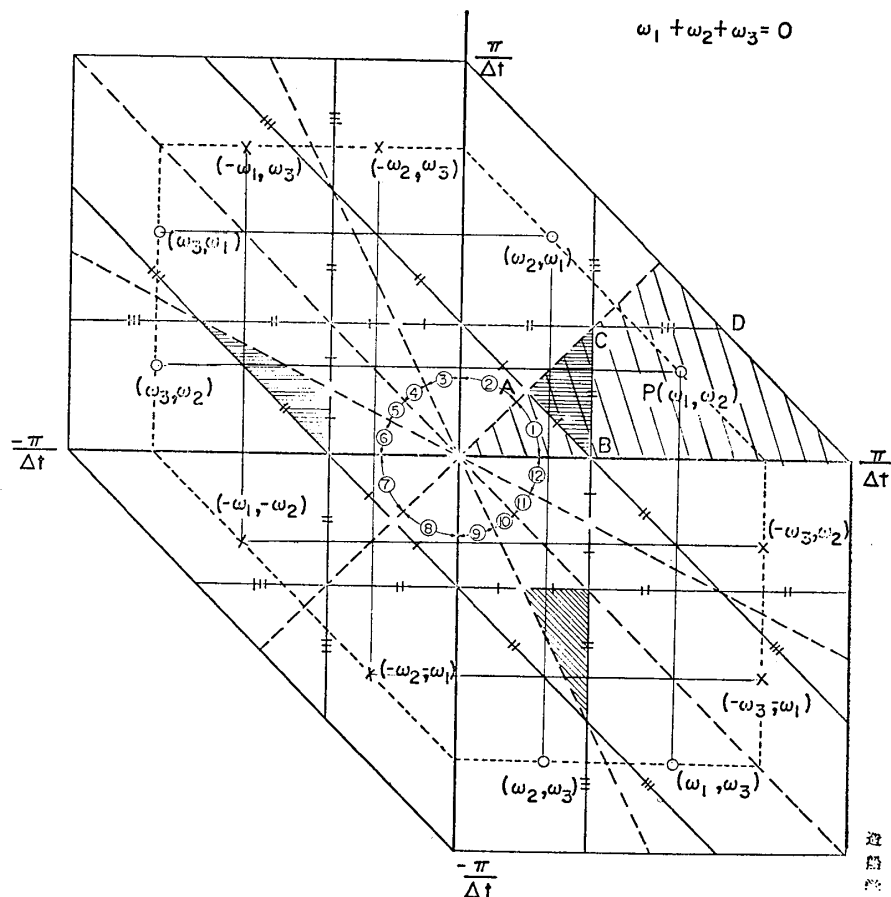


Fig. 4 Symmetric Character of Bispectrum

たバイスペクトラムを次のように見なければならぬ。まずこの平面は一見 ω_1 と ω_2 の関係のみを示しているようではあるが、実は必ず第三の周波数 $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$ との関係も見ていることに注意する必要がある。この第三の周波数 ω_3 をも考えに入れると、 $\omega_1 \geq 0$, $\omega_2 \geq 0$, $\omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$, $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$ であるから、この平面①は、

$$|\omega_3| \geq \omega_1 \geq \omega_2 \geq 0 \quad (3.6)$$

の関係にあるものが陽に示されている。したがってバイスペクトラムをこの平面で見るときは、(3.6) の関係が成り立つような見方をしなければならない。後に示す Fig. 5-1 のように ω_1 に沿って下向きにパワースペクトラムをとって考えるとき、Fig. 4 の点Bの周波数 ω_0 を固定して考えるとすると、(1) ω_0 が最も高く他の2つの周波数がそれより低い組み合わせの三つの周波数の絡み合いを(3.6)において ω_3 を ω_0 と考え他のそれより低い2つの周波数を ω_1 , ω_2 とし、 ω_0 が固定であるから ω_1 と ω_2 の和が一定となる線上すなわち図のBA上で見なければならぬ。(2) また ω_0 とそれより低い周波数およびそれより高い周波数との絡み合いをみたいときは、 ω_1 を ω_0 にとり低い方の周波数を ω_2 とし、高い方の周波数を ω_3 と考えてBC上で見なければならぬ。(3) また ω_0 よりも大きな周波数との絡み合いをみたいときは ω_2 を ω_0 にとり、高周波側を ω_1 , ω_3 にしてBCの延長上すなわちこの場合②象限に入るのでそれと対応する①象限の辺CDで見なければならぬ。このようにしてバイスペクトラムは独特の見方をしなければならないことがわかる。なお図の一番外側の六角形は $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ の場合に長さ T の時系列から Δt ごとに読み取った値を使い計算によつて得られるバイスペクトラムの範囲を示している。

次にバイスペクトラムの計算法について簡単に述べておく。バイスペクトラムを求めるに際しても先に Tukey¹⁶⁾ 赤池、および著者の一人¹⁷⁾等によつてなされたような厳密な統計学的考察が必要であり、この立場に立つたウィンドウの設計等がなされねばならない。しかるに現在までのところ、高次元高次スペクトラムの推定法は進展しておらず、バイスペクトラムの計算法も確立されていない。バイスペクトラムの計算は、(2.5), (2.4) に基づいて、時間領域で時系列の平均値まわりの三次モーメントを計算し、それをフーリエ変換し平均化すれば求まるのであるが、このような計算法は、かなりの計算量となり実行を困難にする。

そこで著者等は最近パワースペクトラムの計算に当つてもその高速性が注目されてきた F.F.T. 法 (Fast Fourier Transform) によつて先ず直接に時系列をフーリエ変換しそれを平均化する方法を用いた。このようにしてよい根拠, 用いたウィンドウなどの詳細は, F.F.T. の説明と共に付録に述べてある。

3.2 実船の横揺れのバイスペクトラム

次にこのようなバイスペクトラムを船体応答の中で比較的非線型要素の性質がはつきりしており, 簡単な非線型微分方程式によつて運動方程式の近似化が可能な横揺れについて, 実船実験の結果から計算してみた。ここに示した例は船舶技術研究所によつて行なわれた運輸省航海訓練所々属練習船青雲丸による実船実験の結果からとられたものである。Fig. 5-1 がバイスペクトラムの絶対値, Fig. 5-2 がその位相である。Fig. 5-1 の数値の単位は $\text{Deg}^3/(\text{cps})^2$ で単位微小周波数平方 $\delta\omega_1\delta\omega_2(\text{cps})^2$ に対する横揺れ角度の三次モーメント Deg^3 を示している。図には計算した点すべてを示さず大きな柁目毎に 1 つずつ約 1/2 の点の値を示すにとどめた。また, Fig. 5-2 には, バイスペクトラムの位相が rad を単位にして示されている, この場合のパワースペクトラムが Fig. 5-1 の軸 ω_1 に沿つて下向きに書かれている。このとき本船は 10.5 kt の速力でウネリを左舷正横, 風浪, 風を同じ方向より受けて航走中でウネリ階級 5, 風浪階級 4, 風力 4 である。

今まで述べてきたことにより, これらの両図から次のようなことが云える。先ず歪度は 0.22, 尖度は 3 より

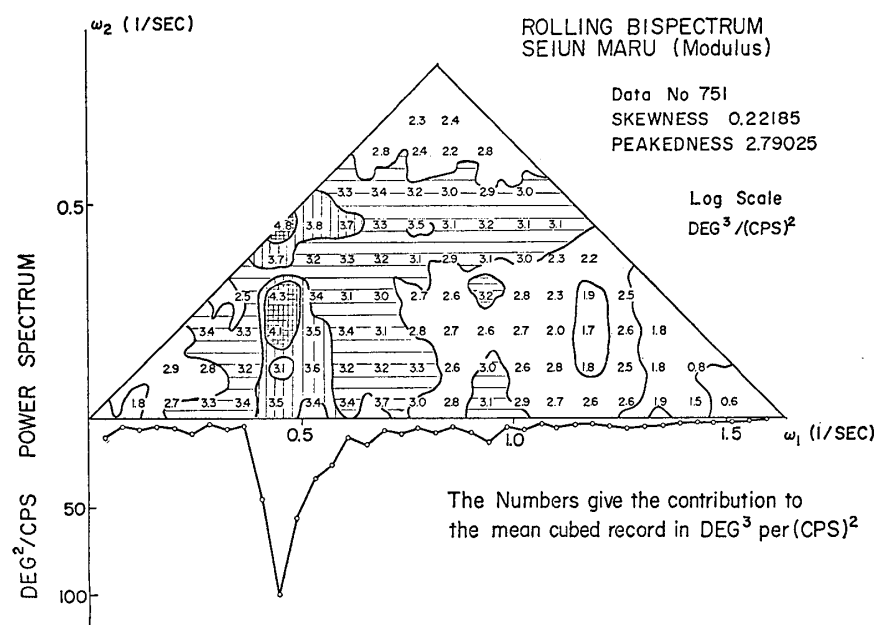


Fig. 5-1 Rolling Bispectrum SEIUN MARU (modulus)

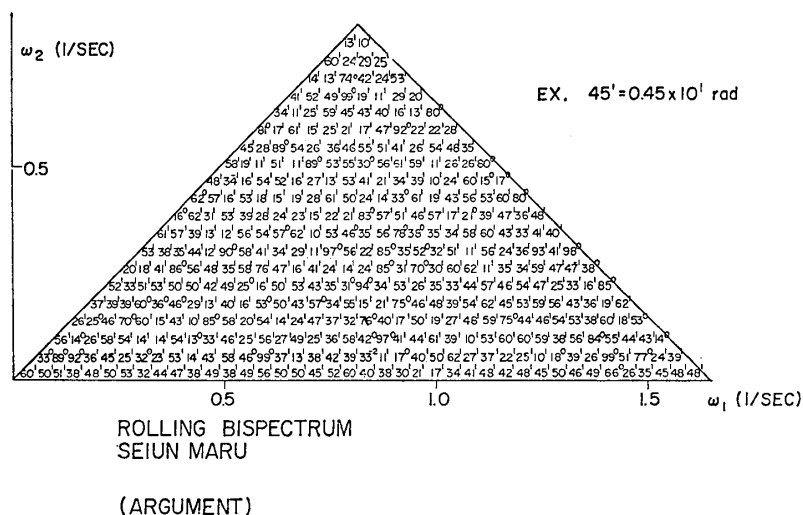


Fig. 5-2 Rolling Bispectrum SEIUN MARU (Argument)

低く 2.79 であるからやや弱い非ガウス過程である。(但し横揺れ角は右舷に揺れた場合を正にとつた。) そこでこの程度非ガウス性がバイスペクトラムにどの程度現われるか検討する。

(1) 横揺れの特徴であるパワースペクトラムの強いピークは、 $\omega_0=0.46$ 付近に出ている。そこでもまず ω_0 と他の周波数値との関連を見るためこの ω_0 を先に述べた関係 (3.6) で3つの周波数のうち最も高い場合すなわち $\omega_3=\omega_0$ とみて、バイスペクトラム上で第三の周波数が 0.46 の一定値をとる $\omega_1+\omega_2=0.46$ の線上をバイスペクトラムの絶対値と位相角についてみるとやや低い幅広いリッジ (Ridge) はあるが余り他と比べて高い絶対値を示していないし、位相も必ずしも歪度の符号と一致するようには出ていない。このことは、 ω_0 という主ピークはそれより低いその和が ω_0 となるような2つの周波数とはそう大きくは絡みついてないと云うことができる。したがってこの意味では低い周波数には、主ピークの影響は小さいと考えられる。

(2) 次に ω_0 を (3.6) で3つの周波数のうち二番目に高いと見たとき、すなわち $\omega_1=\omega_0$ と見たとき、バイスペクトラムの絶対値は $\omega_1=\omega_0$ の線上で、所々やや高いリッジが現われ位相角もこの線上で実部を正にするように現われる。このことは、主ピークとそれより低い周波数および高い周波数であるそれらの和の周波数と絡んでいることがわかりパワースペクトラムの主ピークに近いある高周波数範囲の成分にはこの意味では独立でないものが含まれていると考えられる。

(3) 主ピークの周波数 ω_0 が自分自身の周波数 ω_0 およびその和 $2\omega_0$ のところと絡むような場合を示す点すなわち ($\omega_1=0.46$, $\omega_2=0.46$) という点のバイスペクトラムは非常に高く位相角もその点でバイスペクトラムの実部を正側に出るような値をとっている。したがってこのような絡み方が最も多いことを示しており、 $\omega_0=0.92$ のところのパワースペクトラムの副次的なピークは独立でない部分が大きいと想像される。

(4) (0.46, 0.46) より 90° 右に伸びる線上のバイスペクトラムの絶対値は比較的 low, 主ピークが他の自分よりも高い2つの周波数と絡んでいる可能性が薄いことを示している。

その他の特徴としては余り目立つた特徴はないようである。したがって横揺れのバイスペクトラムの特徴は、絡み合いがあれば必ずパワースペクトラムの主ピークの周波数に関与し、その中でもピークの極めて近くの周波数 ω_0 と ω_1 および $2\omega_0$ との絡み合いが最も高いと云えそうであり、このことは他の横揺れのバイスペクトラムを見てもおおむね常に現われている。

4 非線型横揺れ過程とシミュレーション

4.1 横揺れの非線型性と歪度および尖度

3において示した実船実験における横揺れのバイスペクトラムや歪度、尖度からもわかるように、船体応答の一つである横揺れについては明らかに弱い非線型性が認められる。またこのことは、規則波中での横揺れの模型試験からも明らかにされてきた。ここでは横揺れを他の運動との連成を考えない最も簡単な方程式で近似したとき、その非線型運動方程式から類推される統計的性質が、実際の船の不規則な海洋波中の応答にどのように現われ、またどのような統計量をとつてみるのが最も有効であるかを、実船実験によつて得られた資料から検討することとする。

他の運動との連成を考えない最も簡単化された横揺れの非線型方程式は良く知られたように、

$$\ddot{\phi} + 2\alpha\dot{\phi} + \beta\phi|\dot{\phi}| + \omega_0^2\phi + k_3\phi^3 = n(t) \quad (4.1)$$

のように近似される。ここで ϕ は横揺れ角で、右舷に揺れた場合を正とする。 2α および β は、減衰係数で、線型減衰項 2α は主として造波抵抗を、非線型減衰項 β は主として摩擦抵抗、造渦抵抗を表わす。減衰項の符号はいずれも横揺れの角速度の符号と同じで動揺の方向とは常に逆に抵抗が働くことはもちろんである。また、 ω_0^2 および k_3 は横揺れ角の一乗、および三乗に比例する復原項の係数で、 ω_0 は云々同調周波数、 k_3 は復原力曲線の直線からの外れによる非線型復原項を示すものである。 $n(t)$ は外力の項である。次にこのような式 (4.1) で応答の特性が近似されるとき、不規則波中の横揺れの確率過程について、歪度、尖度等がどのような傾向に出るかを考えてみる。

先ず歪度は、2および3章において述べたように三次モーメントの平均値として定義される統計量である。ところが平均値が0の時系列において、三次モーメントの平均値が0以外の値をもつためには時系列は統計的に云つて正負非対称に現われる必要がある。外力がガウス過程であると考えたと決定論的に定まる応答特性が正負すなわち右舷と左舷とで非対称に現われねばならない。しかし横揺れについては、線型な応答特性はもちろん左右

舷対称であり、今考えている非線型減衰項も ϕ^2 を含むが、 $\beta\phi|\phi|$ の形で表わされるように ϕ の符号と同じ符号を持ち常に運動を邪魔するように働き、復原項も ϕ と同じ符号であるから非線型応答特性も左右舷全く対称に現われる。すなわちもし外力がガウス過程で、横揺れ特性が (4.1) で表わされるようなものならば、横揺れには、歪度の現われる要因はないことになる。従つて先に 3 で示した横揺れの例において歪度が 0 でなくある値をもつのは、波浪よりくる外力そのものの項に何か原因があつたか、あるいはウネリと共存した風の影響などのため外力が非対称で船が片舷にある角度傾いた所を中心として左右舷に揺れていたためか、あるいは船首揺れ、左右揺れ

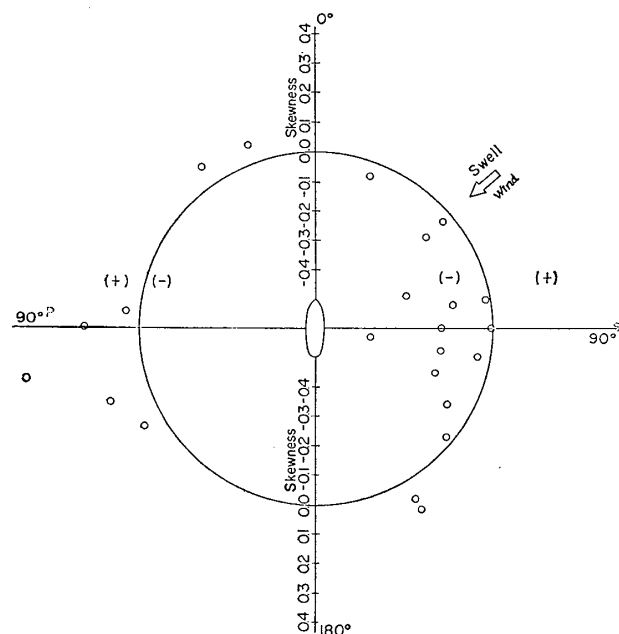


Fig. 6 Swell Direction and Skewness

などとの連成によつて生じたためではないかと考えられる。このようなことから例えば、外力を与える波や風の方角と関連があると思われる。Fig. 6 はウネリの方角と歪度の関係を示した。外力としてウネリを取り上げたのは、この船では主として横揺れを起こす外力は、ウネリと考えたのであるからである。風はウネリとほぼ同じ方向であつた。Fig. 5 から明らかのように、ウネリの来る方向と歪度は確かに一致しており、正横からウネリも受けるほど歪度の絶対値は高くなつていて上記の推論が間違っていないことを裏付けている。但しここで、歪度はバースペクトラムの体積を示すという形でバースペクトラムと結びついてはいるが、歪度はバースペクトラムを積分して得られる値であつて、バースペクトラムには遙かに多くの他の情報が含まれていることには注意する必要がある。例えば積分してしまった値が 0

であるということは、バースペクトラムに何のパターンも現われないということとは別である。したがつて上に述べたところから、応答特性が左右対称なら横揺れについてバースペクトラムを求めることの意味がないということにはならない。また尖度は四次モーメントの平均から求まるものであるから、 $\phi, \dot{\phi}$ の符号を共に変化する項からの影響が考えられ、 k_3 とか β の入った項の効いてくる可能性がある。この k_3 や β による非線型性による影響は、船の前進速度が小さくなるにしたがつて強くなつてくることは理論的にも、実験的に明らかになつていた。したがつても k_3 や β による変化が現われるとすれば、尖度の前進速度による変化を調べることによつて明らかになるであろう。Fig. 7 は前進速度による尖度の変化を調べたものである。低速になるほどガウス分布の値である 3 より小さくなり、横揺れ過程の時間領域での分布を最頻値のまわりで多様化する、すなわち尖り方がガウス分布よりも鈍くなる傾向であることがわかる。このことは低速になるほど、非線型が増加するためである

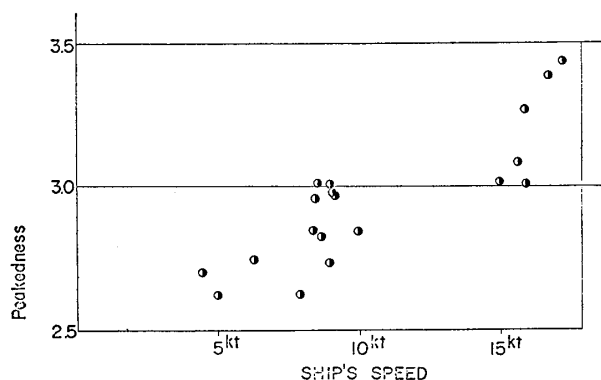


Fig. 7 Relation between Ship's Speed and Peakedness

と考えれば説明できるし、3 より以下すなわち尖度がガウス過程についての値より小さくなることは、非線型性によつて大きな振幅は出にくくなることから十分に想像される。また本船の Full speed である 16 kt 付近では 3 より大きくなることもあるが、非線型性がある速度以上で再び増加してくる傾向があることはわかつて¹⁸⁾いるがそれだけでは、十分な説明にはならない。

なお両図とも 3 と同じく青雲丸の一連の実船実験の結果の解析から得られた。

4.2 非線型横揺れのシミュレーションとその結果の解析

前項によつて実際の海洋波中の応答の一つである横揺れについても、弱い非線型性のあることが明らかになり、理論的なモデルのほぼ妥当であることもある程度推論された。そこでさらにこれを確認するためアナログ計

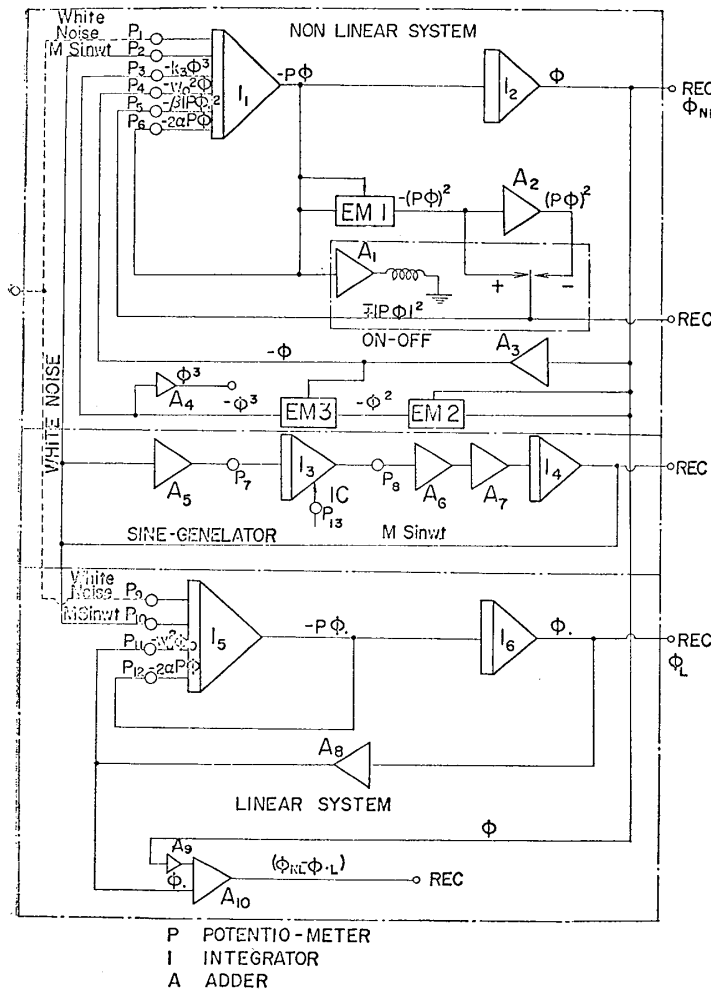


Fig. 8 Analogue Simulation Block Diagram

ておく。このようにすれば線型横揺と非線型横揺とが、毎回同時に求められ計算比較に便利である。これらの系に波浪による外力として雑音発生器 (Noise Generator) によつて発生した 0 cps~30 cps 間で白色な雑音を加

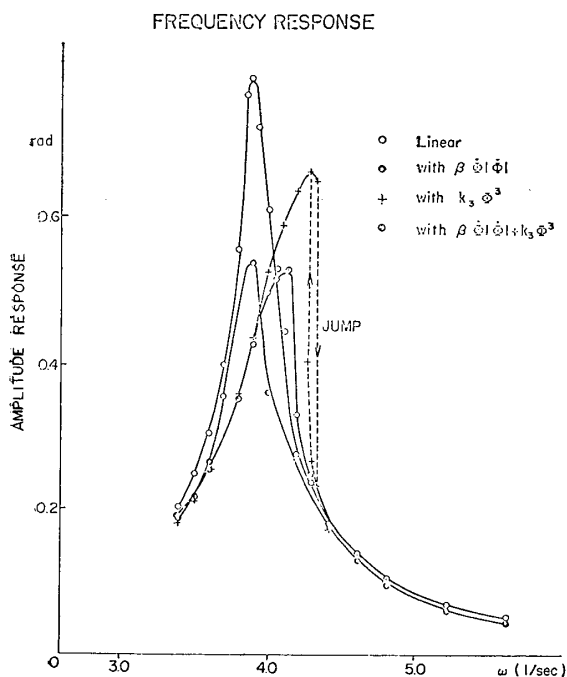


Fig. 10 Frequency Response

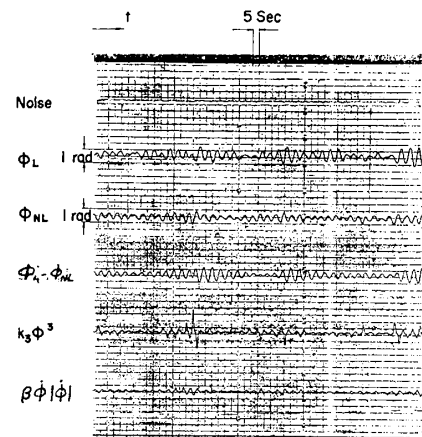


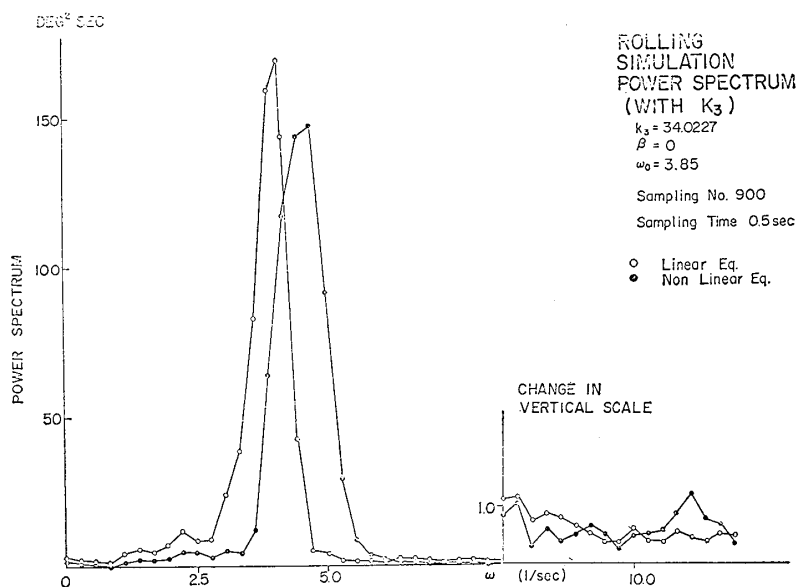
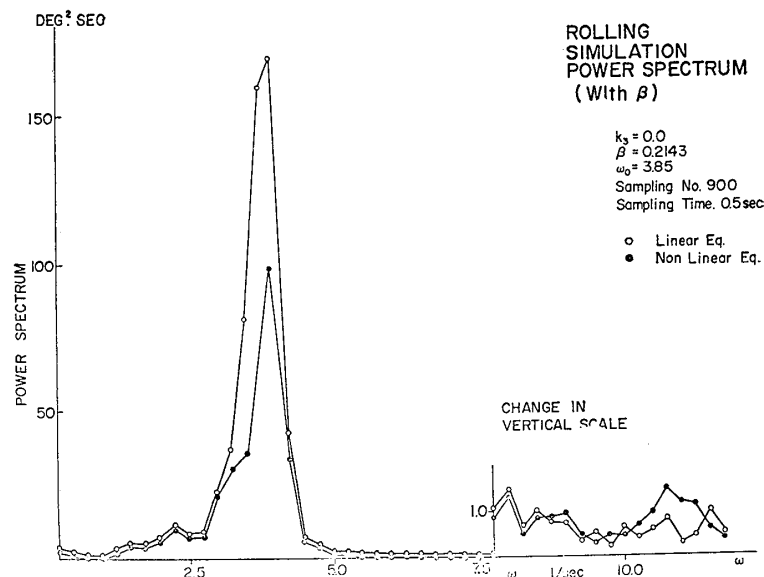
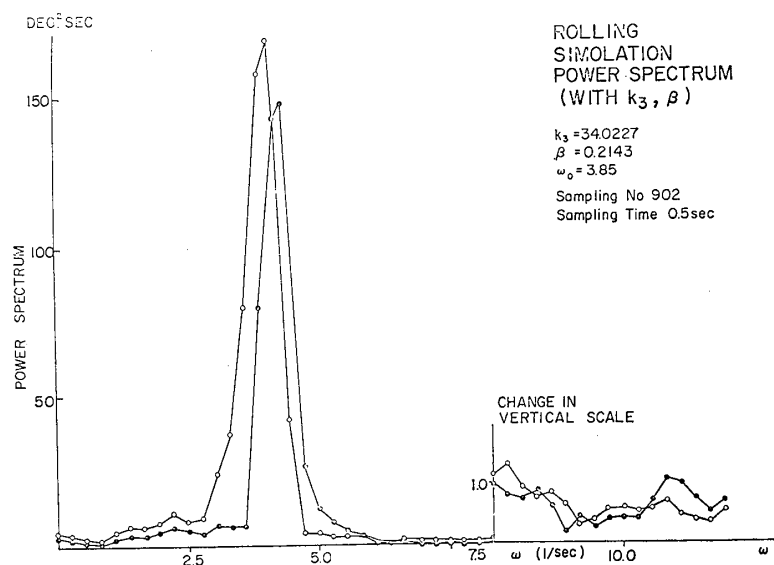
Fig. 9 Simulation Record

算機によつて (4.1) の右辺に不規則波浪の外力を加わる場合の横揺れをシミュレートし、それから得られる横揺れの記録についてパワースペクトラム、バイスペクトラム等を計算して現実の場合と比較してみた。

Fig. 8 はアナログシミュレーションのブロック図である。非線型項の与え方等には先に著者の一人が行なつた¹⁸⁾のと同じ回路を用いている。Fig. 8 に示したように、(4.1) 非線型方程式を作る回路と、非線型項を 0 にした線型方程式を作る回路とをパッチボード上に並列に作つ

ておく。このようにすれば線型横揺と非線型横揺とが、毎回同時に求められ計算比較に便利である。これらの系に波浪による外力として雑音発生器 (Noise Generator) によつて発生した 0 cps~30 cps 間で白色な雑音を加え応答を調べた。なお毎回同じ入力であることが望ましいので白色雑音はデータレコーダに入れて同じものをくり返し使用した。応答出力としては、線型応答 ϕ_L 非線型応答 ϕ_{NL} 、それ等の差、入力雑音、 $k_3\phi^3$ 、 $\beta\phi|\phi|$ 項等を取つた。Fig. 9 に出力の例を示す。このシミュレーションに用いられた例は先に著者の一人が応答の統計的解析の研究に用いた模型船で¹⁸⁾、Todd Series 60 の Mariner 型船型、 $C_0=0.60$ の 1/100 模型である。この模型船の横揺れ運動方程式の各項の係数は実験によると、 $\omega_0=3.85$ 、 $\alpha=0.12905$ 、 $\beta=0.1243$ 、 $k_3=34.0227$ であつた。なおここで注意すべきことは、入力として用いた白色雑音は波浪による外力として用いていて波高そのものではないことである。前者のスペクトラムから後者のスペクトラムを求めるには、 g^2/ω^4 の係数をかければよい。

実験の手順としてまず正弦波に対する線型、非線型横揺れの周波数応答を調べた。Fig. 10 は波傾斜角を 0.1 rad と一定に保つたときの横揺れ角である。 $k_3=34.0227$,

Fig. 11-1 Rolling Simulation Power Spectrum (with k_3)Fig. 11-2 Rolling Simulation Power Spectrum (with β)Fig. 11-3 Rolling Simulation Power Spectrum (with k_3, β)

$\beta=0$ としたときの良く知られたピークの歪みとこれに伴う Jump 現象が見られる。

次に波浪の外力として白色雑音を入れ、得られた横揺れ過程を解析した。各計算においては、できるだけ同じ計算状態が得られるよう努めた。始めにパワースペクトラムを計算した。(Fig. 11-1, Fig. 11-2, Fig. 11-3) 入力が白色雑音であるから応答の特性が線型の場合には、このスペクトラムには周波数応答特性の形(2乗の形)そのものが表われる筈である。但し非線型の場合には変形されてくる。Fig. 10 にくらべると低周波側での線型と非線型の差のやや大きいこと、及び k_3 によるピークの高周波側への移動がやや大きく現われていることに気がつく。その他のことは、Fig. 10 とよく似ている。著者の一人はかつて^{1,3)}、船の横揺れ過程を(4.1)のような弱い非線型過程によつて近似したとき、パワースペクトラムに現われる線型過程からの変化について理論的に推定した。 k_3 が存在する場合も、 β の存在する場合にも、いずれも主ピークの3倍の周波数の所に副次的に弱いピークが現われることも予想した。この予測の確認のためこの周波数付近では慎重な計算を行つた結果 Fig. 11 の別図に示すような非常に弱いピークの現われるのが認められた。

次にバイスペクトラムを計算した。まず入力として用いた白色雑音のバイスペクトラムの絶対値を求めたものが Fig. 12 である。パワースペクトラムも ω_1 軸上に合わせて下向きに表現した。この場合パワースペクトラム

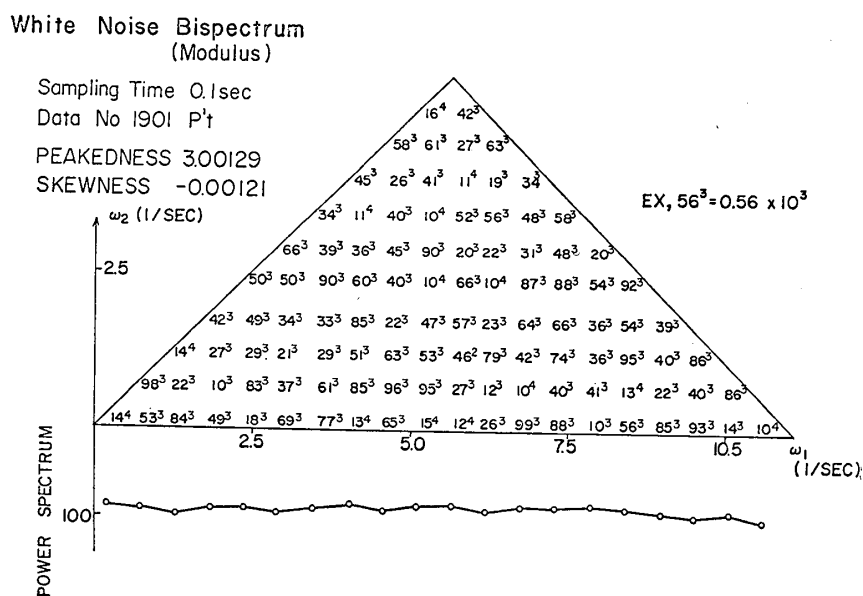


Fig. 12 White Noise Bispectrum (Modulus)

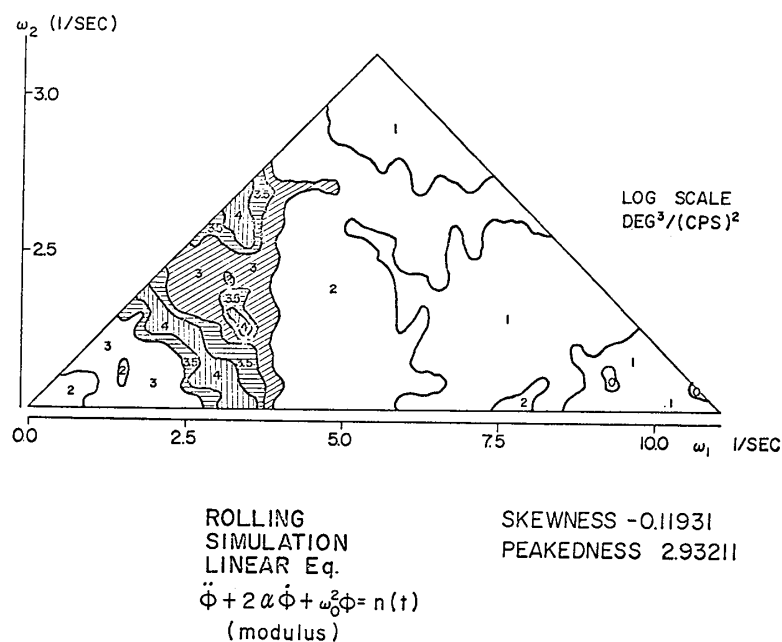


Fig. 13 Rolling Simulation Linear Eq.

には小さな変動はあるが、かなり白色になつているといつてよい。同時に計算された歪度は 0.00、尖度は 3.00 とまさにガウス過程の値をはつきりと示している。パイスpektrラムの絶対値は、 (ω_1, ω_2) の全領域にわたつて極めて一様に小さな値が現われており、リッジやピークは全く認められない。ここに現われている見掛けの数値は大きい、これはキヤリブレーション係数を適当に選んでいるからでこれを一様に小さい数と考えてよいし、ここには示していないが、位相の現われが全くランダムであることから云つてパイスpektrラムは現われなかつたと云つてよい。すなわち極めて良いガウス過程であることが、これから明らかである。あるいは、ガウス過程にはパイスpektrラムが現われないことが実証されていると云つてよい。

次にこの白色雑音に対する線型横揺れ応答のパイスpektrラムを求めた。これが Fig. 13 に示されてある。線型ガウス入力に対する線型応答は、当然線型ガウス過程である筈であつて、絶対値によるパイスpektrラムには白く出ることを期待した。ところが計算された歪度は、0.12 と小さい値ではあるがやや値をもち、パイスpektrラムにもスペクトラムのピークを示す周波数 ω_0 から左へ斜め 45° に上がる $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ の線上に明らかなリッジ、また $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \omega_0$ の付近および $\omega_1 = \omega_0$ の線上一ヶ所に、いずれもそれほど高い値ではないが、やや明らかな孤立ピークが現われた。これは明らかに線型のシミュレーションが何等かの原因でやや歪んで現われた結果である。その原因をこのパイスpektrラムから推定してみる。 $\omega_1 = \omega_0$ の点から左上へ 45° の方向の $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ の線上のリッジは、 ω_0 より低い周波数 (ω_1, ω_2) と ω_0 とにおけるフーリエ係数の積の平均値を示している。したがつてこのシミュレーターが ω_0 より低い周波数で他の周波数および ω_0 と関連し合う現象があつたことを示している。このことは、白色入力過程が、0 cps~30 cps の間に一様なエネルギーを持ち、極めて低周波域にも等しいエネルギーをシミュレーターに加えたため、用いた線型横揺シミュレーターの超低周波特性との関連において歪んだものではないかとも考えられる。このことは、パワースpektrラムを示す Fig. 11 と周波数応答を示す Fig. 10 とを比較したとき、すでに指摘したように白色入力に対する応答のパワースpektrラムでピークよりも低い周波数領域において線型横揺れが、非線型横揺れよりもやや高く出てその差は周波数応答における両者の差よりもやや大き過ぎることになつてもこのような現象があつたという推定が裏付けられる。アナログ計算機によるシミュレーションの場合、コンピュータタイムスケールを模型船のスケールにすることによつて作動時間の短縮を図つたが、これでも不十分であつたのかもしれない。良い低周波フィルターの作成は、比較的困難ではあるが、もしこれが得られれば、不必要な低周波部分をカットして必要周波数範囲のみ白色な入力として用いる等の工夫を加えることによつてこの点はさらに確認されるかも知れない。 $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \omega_0$ のところのピークは ω_0 と $K\omega_0$ に極めて近い周波数および $2\omega_0$ の 3つの周波数におけるフーリエ係数の関連がある程度あることを示している。このことはパワースpektrラムからもうかがわれる。

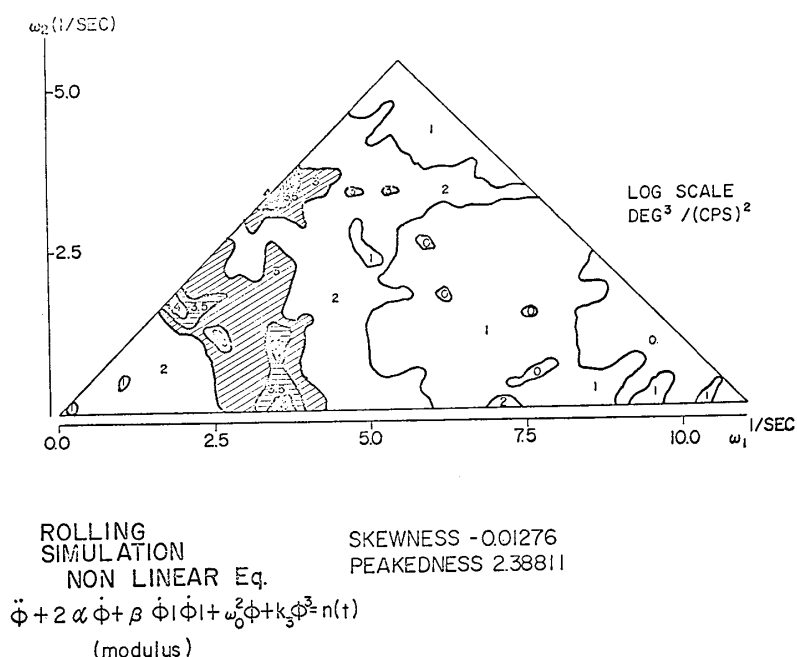


Fig. 14-1 Rolling Simulation of Non Linear Eq. (Modulus)

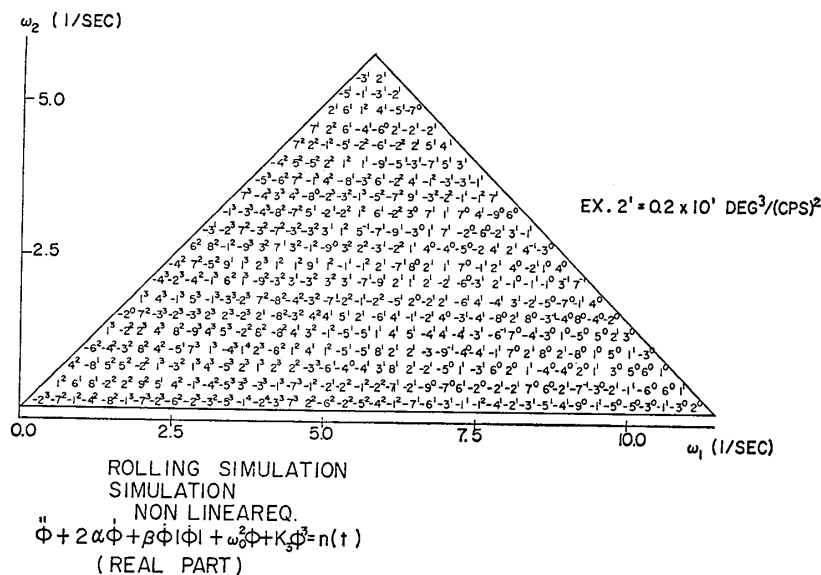


Fig. 14-2 Rolling Simulation of Linear Eq. (Real Part)

次に非線型項 k_3 , β の項のある非線型横揺れの白色入力に対する応答の記録を解析した。バイスペクトラム、の絶対値歪度、尖度はいずれも Fig. 14-1 に示してある。尖度は 2.39 とガウス過程からかなり離れていることを表わしているが、歪度は 0.01 と先に示したように何等かの理由で歪んだ線型の場合よりもむしろ小さく横揺れの対称性によつて非線型になつても歪度は小さく現われることを実証している。然しそれにも拘わらず、バイ

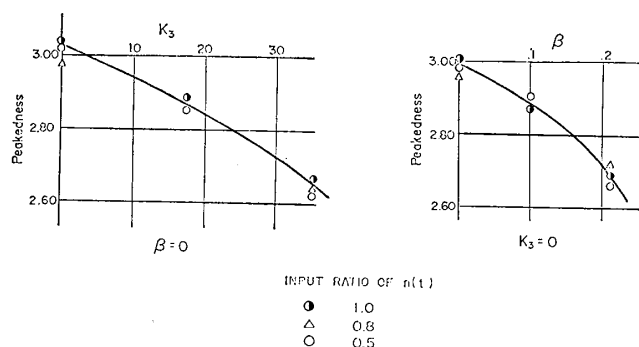


Fig. 15 Peakedness and Non linear Coefficient

スベクトラムにはリッジやピークが現われていてガウス過程からはかなり外れていることを示し、バイスペクトラムの効用を示している。但しこの場合、実数部のみで示した Fig. 14-2 を見ると前図において表われたリッジの範囲でも符号が正負かなり入り乱れて現われ、積分演算によつて打ち消し合つて歪度は小さく出ることが想像される。

次に非線型応答のシミュレートにおいて、この k_3 , β の値を種々に変化させてバイスペクトラム等への影響を調べた。ここには尖度に対する影響のみを Fig. 15 に示す。 k_3 , β とともに大き

4.3 非対称動揺のシミュレーション

最後に前項で述べた非線型性と歪度、尖度、バイスペクトラム等の関連をさらに確かめるため実際の横揺れとは異なつた応答特性を非対称とするような仮想の非線型動揺のシミュレーションを行なつてその結果を解析してみた。すなわち ϕ^2 の含まれる項の符号を ϕ の符号に拘らず常に $+\beta\phi^2$ として次式をシミュレートした。

$$\ddot{\phi} + 2\alpha\dot{\phi} + \beta\phi^2 + \omega_0^2\phi + k_3\phi^3 = n(t) \quad (4.2)$$

係数はすべて前の (4.1) 式のシミュレーションに用いたのと同じ値とした。Fig. 16 が絶対値で示したそのバイスペクトラムである。歪度が -0.35 とかなり大きくなつて応答が正負非対称になつたことの効果を明らかに示し、尖度も 4.13 と 3 から大きく離れている。これと共にバイスペクトラムには、極めて明確なリッジが現われ、

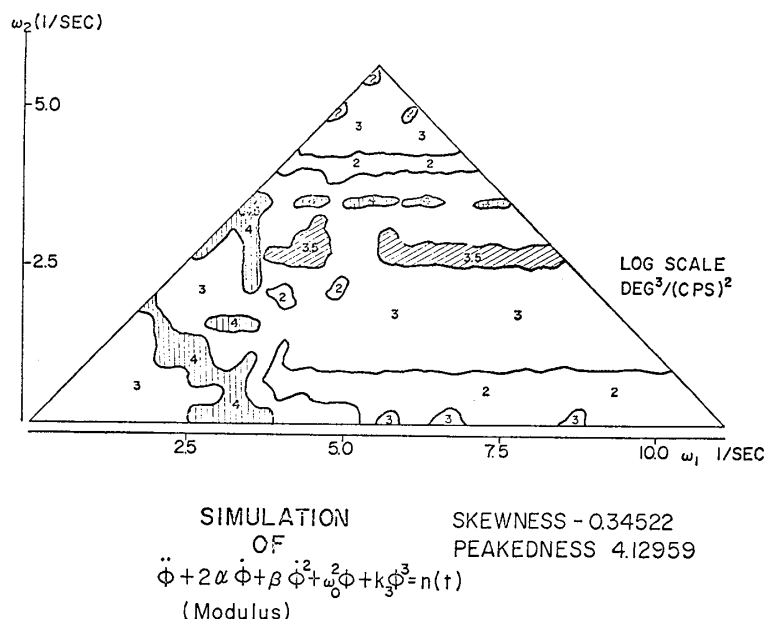


Fig. 16 Simulation of $\ddot{\phi} + 2\alpha\dot{\phi} + \beta\dot{\phi}^2 + \omega_0^2\phi + k_3\phi^3 = n(t)$

ここには示していないがパイスpektramuの位相にも実部を負にする角度がひんぱんに現われていることが確められる。

以上のように、スペクトラム、パイスpektramu、歪度、尖度等を十分に活用することによつて、過程の非線型性の度合と、その性質をかなりよく推定することができよう。もちろん先に2において簡単に示したように、クロスパイスpektramuの導入により更に詳しい非線型応答特性が明らかになる。この点については稿を改めて論ずることとする。

5 あ と が き

以上述べてきたように、著者らは大洋波中の船の応答の解析に対する確率過程論的な手法の応用の一環として非線型な応答の解析への発展を試み次のような成果を得た。

(1) 先ず確率過程の高次元高次モーメントスペクトラムの一般的性質、時系列の性質を示す分散、高次モーメント、歪度、尖度等の他の統計量との関連が明らかとなり、船の波浪中における非線型応答の解析にもこのようなものが有効であることが明らかとなった。

(2) 特に2次元スペクトラムであるパイスpektramuについてその対称性、それに基づく特殊な表現法、従つてその解釈に当つての問題点を明らかにし、一方その推定に必要なプログラムを開発した。

(3) 船の非線型応答の例として横揺れをとり、実船の横揺れのパイスpektramuを初めて計算し、歪度、尖度等を算出して波の方向、船の速度等によるそれ等の変化のありさまを調べた。

(4) 横揺れを単純な弱い非線型運動方程式によつて近似し、上記の各種統計量がこの応答特性の性質を裏付けていることを確かめた。

(5) 横揺れを表わす非線型運動方程式を用いてアナログコンピュータに非線型横揺れのシミュレーターを組み、これに白色雑音を外力として加え、応答を求め不規則波中の横揺れを現出させた。この応答のパイスpektramuを計算し、仮定した応答特性が、どのようにパイスpektramu、歪度、尖度等に表われるかを調べた。ただし比較の基礎として必要なシミュレーターによる線型横揺れに問題点があり、非線型性が現われてしまったが、パイスpektramuによつて、その原因究明の手がかりを得ることができた。シミュレートの失敗ではあつたが、パイスpektramuの効用を示すには役立った。

(6) 人工の非対称非線型動揺をシミュレートし、非線型であつても対称な動揺の場合には生じなかつた歪度への影響が、非対称動揺では明らかに表われることを確認すると共に、このような非線型特性によつてパイスpektramuに生ずるパターンを示した。

(7) モーメントのフーリエ変換では龐大な計算量となつて、実行困難な高次スペクトラムの計算は、高速フ

ーリエ変換法 F. F. T. 法によつて実行が可能になることを示し、その具体的な計算プログラムを開発した。

以上のようなが、これらにはなお多くの問題点がある。すなわち先ず極めて良質な白色入力と得ながら、アナログコンピュータによる線型横揺れのシミュレート失敗によつて、非線型特性のバースペクトラムへの効果を純粹に取出し得なかつたこと、従つて実船の横揺れの非線型の原因を更に確実に突止め得なかつたこと等が挙げられる。またバースペクトラムの物理的な意味にもう一つ明確でない点があると云わざるを得ない。しかしながらこれらのことは一つにはバースペクトラムに関する知識の不十分さにも原因がある。バースペクトラムをよりよく判断し理解する為には、多くの自然現象や工学現象、あるいは模型的な非線型現象や船の種々の応答等について多くのバースペクトラムを求めてみて、そのパターンと他の統計量、既知の物理的性質との関連等について十分の知識を蓄積する必要がある。著者らの得た不十分な経験を敢えて報告する理由の 1 つもここにある。なお、さらにクロスバースペクトラムの解析等に進まなければならないことも明らかであるが、ここに示したことが、これら今後の発展に役立てば幸である。

終りにこの研究を行うに当り、F. F. T. の計算等について助言を頂いた統計数理研究所赤池研究室長、雑音発生器の使用についてご好意を頂いた航空宇宙技術研究所計測部堀川研究室長、実船実験、シミュレーション、解析等の全般にわたつて大きな協力を頂いた船舶技術研究所運動性能部高石研究室長、猿田、幕内両氏をはじめ多くの方々に感謝の意を表わすものである。

なおこの報告の中に示したすべての数値計算は船舶技術研究所共同電子計算機 FACOM 270-20 によつたことを附記する。

附 録

A F. F. T. のプログラミングについて

F. F. T. (高速フーリエ変換, Fast Fouries Transform) は 1965 年 Cooley と Tukey¹²⁾によりその Algorithm が発表されて以来電子計算機により非常に高速にフーリエ変換が処理できることからセンセーショナルな反響を呼んだ。高次元スペクトラムの計算のみならず、フーリエ変換の必要な分野は多いので著者等の行つたプログラミングの方法について述べておくことにした。

F. F. T. は実験計画法で有名な Yate の算法の拡張である。 N 個のデータ $X(k)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) による複素型有限フーリエ変換 $A(m)$ は

$$A(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{mK} \quad m=0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

である。ここで $W = \exp(-2\pi j/N)$ である。 j は虚数単位。

この計算をそのとおり実行すれば N^2 回の手数がかかる。F. F. T. によれば、 $2N \log_2 N$ の手数で済む。この算法を示すため、先ず $N=r_1 \times r_2$ と整数分解されるとする。 m と k を

$$\left. \begin{aligned} m &= m_1 r_1 + m_0 & m_0 &= 0, 1, \dots, r_1-1, \quad m_1 = 0, 1, \dots, r_2-1 \\ k &= k_1 r_2 + k_0 & k_0 &= 0, 1, \dots, r_2-1, \quad k_1 = 0, 1, \dots, r_1-1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表わすと

$$W^{m k_1 r_2} = W^{m_0 k_1 r_2} \quad (3)$$

であることを使つて

$$A(m_1 r_1 + m_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} X(k_1 r_2 + k_0) W^{m_0 k_1 r_2} W^{m_0 k_0} \quad (4)$$

と書くことができる。そこで新しい配列 XX を作りその中に先ず内側の k_1 についての演算の結果を入れる。すなわち

$$XX(m_0, k_0) = \sum_{k_1} X(k_1 r_2 + k_0) W^{m_0 k_1 r_2} \quad (5)$$

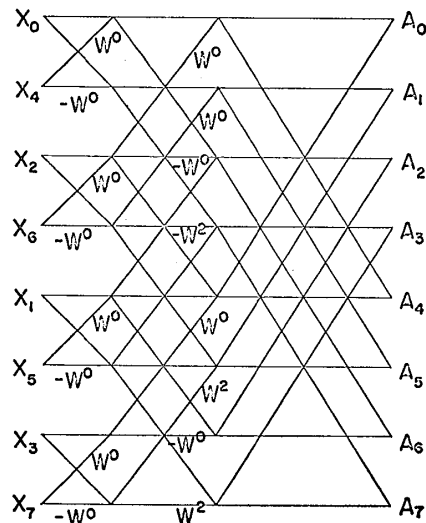
とし、次に外側の k_0 について演算を行なつて

$$A(m_1 r_1 + m_0) = \sum_{k_0} XX(m_0, k_0) W^{(m_1 r_1 + m_0) k_0} \quad (6)$$

とすれば、 $m_1 r_1 + m_0$ のところのフーリエ係数が得られる。

(5), (6) による算法の手数 T は、(2) によれば、

$$T = N(r_1 + r_2) \quad (7)$$

Fig. A-1 Algorithm of F.F.T. Method (in the case of $k=2^3$)

になる。一般に

$$N = r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n \quad (8)$$

と整数分解すれば、手数 T は、

$$T = N(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) \quad (9)$$

となる。ところで積が一定に抑えられていて和を最小にするには $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$ ととればよい。このとき

$$N = r^n \quad (10)$$

であるから $n = \log_r N$ ゆえに演算回数は、

$$T = N \log_r N \quad (11)$$

回で済む。これを直接法と比較するため T/N^2 比をとると

$$\frac{T}{N^2} = \frac{r}{\log_2 r} \frac{\log_2 N}{N} \quad (12)$$

となる。 N は与えられるから、 r の変化によるこの $r/\log_2 r$ の変化について調べると、 $r=2, 3, 4$ 付近で最小になる。3 の場合プログラミングが少し複雑なので $r=2$ の場合をとりあつかう。Fig. A-1 は Cooley-Tukey の算法の 2^3 の場合の図解である。左側よりのデータ右側の係数を求める。一回の演算は第一段の最初の 2 つの配列について見れば、集合 $\{X_k, k=0, 1, \dots, 7\}$ より、 X_0, X_4 をとりだし

$$\begin{aligned} X_0 + W^0 X_4 \\ X_0 - W^0 X_4 \end{aligned} \quad (13)$$

の演算を行なつて結果を XX_0, XX_4 にそれぞれ格納することを示している。その後この第一段の演算がすべて終了後配列 $\{X\}$ に移してやる。そうすれば、第二段以降は $\{X\}$ からまた同じペア (X_0, X_4 等) でとり出して演算をすればよい。なお取り出す手順のための数列 $\{0, 4\} \{2, 6\} \dots$ 等は図を見るとわかるように最初の段と最終段がいわゆるビット変換になつていて使用して作る。

ところで Fig. A-1 を見れば一回の演算終了後取り出した古い配列 $X(0), X(4)$ は不用となるから、仮の格納場所を 2 つだけ作つておいて一回の演算終了後 $X(0), X(4)$ に入ればよい。但しでき上がった配列 $\{X(r), r=0, 1, \dots, 7\}$ からビット変換された $\{r=0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7\}$ の順で取り出さねばならない。

さらに実際のデータは実数の場合が多い。Bergland¹³⁾ は実数の場合、複素フーリエ係数のエルミット対称性を使用して、メモリーが今までのような N 個の複素配列ではなく、 N 個の実数配列で済み、さらに高速化されることを示した。著者等の作成したプログラムもこの方法によつてゐる。(Fig. A-2)

```

C F.F.T. ANALYSIS (REAL CASE)
SUBROUTINE FFTK
COMMON X(1030),XX(1030),N,M,NM
DIMENSION W(256)
COMPLEX A1,A2,WW,@@,AA1,AA2,CW

INTEGER DIF1,DIF2
PA1=3.141592653
MM=M-1
NM=N/2
N4=N/4

C MAKING EXPONENTIAL CONSTANTS
DO 10 I=1,N4
  @=2.*PA1*FLOAT(I)/FLOAT(N)
  10 W(I)=SIN(@)

C CALCULATION
DO 50 I1=1,MM
  JP1=0
  DIF1=2**((I1-1)/N4)
  DIF2=2**I1
  L=0
  K1=2**((MM-I1)/N4)
  DO 30 I2=1,NM,DIF2
    IP1=I2
    IS1=I2+DIF1
    IP2=IP1+NM
    IS2=IS1+NM
    JP1=JP1+1
    JP2=JP1+N4
    JS1=JP1+NM
    JS2=JP2+NM
    XX(IP1)=X(JP1)+X(JS1)
    XX(IP2)=X(JP2)+X(JS2)
    XX(IS1)=X(JP1)-X(JS1)
    XX(IS2)=X(JP2)-X(JS2)
    IF (I1.EQ.1) GO TO 30
    K=0
    L=L+DIF2
    KL=L+2
    DO 20 I3=2,DIF1
      K=K+1
      IP1=I2+I3-1
      IS1=KL-I3
      IP2=IP1+NM
      IS2=IS1+NM
      JP1=JP1+1
      JP2=JP1+N4
      JS1=JP1+NM
      JS2=JP2+NM
      KK=N4-K
      WW=CMPLX(W(KK),-W(K))
      A1=CMPLX(X(JP1),-X(JS1))
      A2=CMPLX(X(JP2),-X(JS2))
      AA1=CONJG(A1)
      AA2=CONJG(A2)
      CW=CONJG(WW)
      XX(IP1)=REAL(A1+WW*AA2)
      XX(IP2)=-AIMAG(A1+WW*AA2)
      XX(IS1)=REAL(AA1-CW*AA2)
      XX(IS2)=-AIMAG(AA1-CW*AA2)
    20 CONTINUE
  30 CONTINUE
  DO 40 KK=1,N
    X(KK)=XX(KK)
  40 CONTINUE
  50 CONTINUE
  X1=X(1)
  NS=NM+1
  X2=X(NS)
  X(1)=X1+X2
  X(NS)=X1-X2
  RETURN
END

```

Fig. A-2 F.F.T. Method Program

B F.F.T. によるスペクトラムの推定

F.F.T. の高速性を利用してスペクトラムを F.F.T. で求める方法が Tukey¹⁷⁾ 等によつて研究されている。定常時系列 $X(t)$ のフーリエ変換 $d^{(T)}(\omega)$ を,

$$d^{(T)}(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} X(t) \exp\{-j\omega t\} \quad (1)$$

としたとき, $\sum_{i=0}^k \omega_i = 0$ を満たす k 個の周波数に対する $d^{(T)}(\omega_i)$ から積

$$I_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = (2\pi)^{-k+1} T^{-1} \prod_{i=1}^k d_i^{(T)}(\omega_i) \quad (2)$$

を作つたとき, I_k を k 次ピリオドグラム (k -th order periodogram) と云う。このピリオドグラムの平均値は

$$E[I_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1})] = B_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}) + O(T^{-1}) \quad (3)$$

となる^{4,5)}。ここで B_k は $k-1$ 次元 k 次スペクトラムである。F.F.T. によるスペクトラムの推定はこの直接に時系列をフーリエ変換する方法が用いられ、従来の相関函数を作つてそれをフーリエ変換する方法とこの点異つてゐる。相関函数は、これより逆フーリエ変換を使つて求めることになる。

F.F.T. によるパワースペクトラムのためのウインドウは Tukey 等が¹⁷⁾ 研究しているが、その中で

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{t}{0.1T} \right) & 0 \leq t \leq 0.1T \\ & 1 & 0.1T \leq t \leq 0.9T \\ & \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{T-t}{0.1T} \right) & 0.9T \leq t \leq T \end{aligned}$$

という Data Window を提案している。

なお通常の推定法において、Lag のとり方はデータ数の約 5~10 倍とされているが、この事に対応してデータの両端に合計してデータ数の 0.1 倍程度の 0 を等分に付け加えねばならない。しかし、まだ、普通のパワースペクトラムによる推定との関連等についての詳しい研究はなされていないようである。

バイスペクトラムの計算においても (1), (2), (3) によつて計算を行なう。その際適当な段階で二次元の Window をかけて平均化せねばならないが、この Window の研究も皆無である。著者等の用いた方法は、欲する周波数のペアを中心にしてそれを 1 とし、その周辺で 7×7 点にわたつて中心からの距離の逆数で係数を決め、最後にその全和が 1 になるように適当な係数をかけた値を各点に対するウインドウの値としてプログラム内で作り、この係数を使つて最終段階でピリオドグラムを 7×7 にわたつて荷重平均することによつてバイスペクトラムを推定した。このウインドウは、一例に過ぎず、さらに良いウインドウを作る工夫がぜひ必要である。

参 考 文 献

- 1) 山内保文：“波浪中船の応答特性の統計的解析に関する二、三の考察—インパルス応答の推定と非線型要素のスペクトラム計算への影響—” 造船協会論文集第 117 号, 昭 40.6
- 2) 山内保文：“多入力スペクトラム解析法の船の応答研究への応用と非線型応答の取扱いについて” 造船学会論文集 第 125 号, 昭 44.6
- 3) 山内保文：“船体動揺の非線型性” 統計数理研究所シンポジウム記事 3, 昭 46 年
- 4) Brillinger, D. R., Rosenblatt, M.: “Computation and Interpretation of K-th order spectra”, Spectral Analysis of Time Series, John Wiley (1966)
- 5) Brillinger, D. R., Rosenblatt, M.: “Asymptotic Theory of Estimates of K-th order spectra”, Spectral Analysis of Time Series, John Wiley (1966)
- 6) Akaike, H.: “Note on Higher Order Spectra”, Annals of the Inst. Stat. Math. Vol.18, No.1 (1966)
- 7) Hasselmann, K., Munk, W., Macdonald, G.: “Bispectra of Ocean waves”, Proc. of the Symposium on Time Series Analysis, John Wiley (1963)
- 8) Iwata, N.: “On the measurement of surface waves at the marine observation tower and the calculations of spectra”, presented to U.S. Japan joint seminar on applied stochastics, May, 7~14 Tokyo.
- 9) 永田豊：“スパイクアレイ型時系列のバイスペクトル” 統計数理研究所シンポジウム記事 3 (昭 36 年)
- 10) Nagata, Y.: “Lag Joint Probability, Higher order Covariance function and Higher order Spectrum”. La Mer, 日仏海洋学会誌 (8 (2))
- 11) Hasselmann, K.: “On Nonlinear Ship Motion in Irregular Waves”, Journal of Ship Research,

March 1966

- 12) Cooley, J. W., Tukey, J. W. : "An Algorithm for machine calculation of Complex Fourier series", Mathematics of Computation, 19-90 (1965)
- 13) Bergland, G. D. : "A fast Fourier transform algorithm for real valued series", Communication of ACM 11-10
- 14) "Special Issue on fast Fourier transform and its application to digital filtering and spectral analysis", I.E.E.E. Trans. on AU-15, No.2 (1967)
- 15) Cramér, H. : Mathematical methods of statistics", Princeton Univ. Press, (1945)
- 16) Blackmann, R. B., Tukey, J. W. : The measurement of power spectra from the point of view of Communication Engineering", Dover (1959)
- 17) Akaike, H., Yamanouchi, Y. : "On the statistical estimation of frequency response function", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol.14 (1962)
- 18) 山内保文 : "船の波浪中応答の解析法について" (その1) 造船協会論文集第109号, 昭 36.6