

2-3

(昭和 48 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

柱体の動揺初期における造波現象の 理論について

正員 大 松 重 雄*

On a Wave Making Theory of Cylinders at the Early Stage of Oscillation

by Shigeo Ohmatsu, *Member*

Summary

When a cylinder floating on the free surface starts an arbitrary oscillation, the flow field around the body should change in complicated manner. This paper deals with a wave making theory of the cylinder at the early stage of the oscillation.

An integral equation with two variables, depending on time and location on the section was introduced for obtaining the source density distributions over the immersed surface of the cylinder by using the time dependent Green's function.

The kernel function of the integral equation is not suitable to integrate itself numerically in direct, when the time variables become large. In order to elude the difficulty of the integration for that case, the function was expanded to an appropriate asymptotic series.

Then, the numerical solution of the integral equation was obtained. However, it becomes clear that a reasonable solution is hardly obtained, as the integral equation involves an eigen function. Only an approximate solution was obtained in this paper. Further investigation is necessary to introduce an integral equation without eigen function.

1 緒 言

自由表面上に軸をもつ二次元柱状体が周期的運動をする場合の定常状態の流れ場を求める方法については、すでに多くの研究がなされ、計算例も種々公表されている。そしてその手法はストリップ法に 응용され、波浪中にある船体に働く変動圧あるいは船体運動という形で成果が得られている。

一方、柱体が任意運動をする場合、あるいは定常調和振動の流れ場になるまでの過渡的現象の理論的な取り扱いについては、時間項を含むグリーン函数 (time-dependent Green's function) を使用する方法が花岡¹⁾、Finkelstein²⁾、Stoker³⁾ などにより発表されている。各瞬間の流れ場を物体表面上に分布させた吹出しで表わすことにすると、問題は時間に関しては Volterra 型、場所に関しては Fredholm 型の 2 変数の積分方程式を解くことに帰着する。この積分方程式を数値的に解くことは、電子計算機の発達した現在ではさほど困難ではないと思われる。

上記の現象が解明されるならば、最近、大型専用船の海難事故で問題になっている一発大波が来たときの船体の挙動や変動水圧の推定が可能になるであろう。

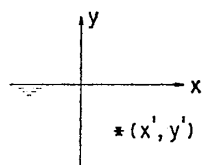
本論文では花岡¹⁾の方法に従って問題を定式化し、計算例として円柱が上下動をする場合を取りあげる。他の柱体が、他のモードの運動をする場合も取り扱いは同じである。流れ場を表わす函数としては、主として流れ函数を使用する。その理由は、積分方程式の核函数が速度ポテンシャルを使う場合よりいくらか簡単に計算できるからである。本論文で任意運動という言葉を使用しているが、これは周期的運動以外の運動でもよいという意味であって、もちろん運動の大きさは流れ場の境界条件が線型で表わせる程度に充分小さいとする。

* 船舶技術研究所

2 任意運動の場合の積分方程式

2.1 任意攪乱の場合のグリーン函数

Fig.1 の様に座標系を定める。水面下のある点 (x', y') に、ある時刻 $t=0$ から持続的に単位強さの吹出しが与えられたときのグリーン函数は



$$G(x, y; x', y') E(t) = -\frac{1}{2} \ln \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{(x-x')^2 + (y+y')^2} \cdot E(t) + 2 E(t) \int_0^\infty \frac{e^{k(y+y')} \cos k(x-x') \{1 - \cos \sqrt{gk} t\}}{k} dk \quad (2.1)$$

Fig.1 Coordinate System

である^{1,2,3)}。ここで $E(t)$ は Heaviside の単位函数を意味する。単位攪乱 $E(t)$ があったときの応答が $w(t)$ であるとする、任意攪乱 $f(t)$ に対する応答 $x(t)$ は Duhamel の定理より

$$x(t) = w(+0) f(t) + \int_0^t f(\xi) w^{(1)}(t-\xi) d\xi \quad (2.2)$$

で与えられる。

吹出しの強さが時間的に任意に変化するときのグリーン函数は (2.1) を (2.2) に適用することにより

$$G(x, y; x', y') f(t) = -\frac{1}{2} \ln \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{(x-x')^2 + (y+y')^2} \cdot f(t) + 2\sqrt{g} \int_0^t f(\xi) \sin \sqrt{gk} (t-\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{e^{k(y+y')} \cos k(x-x')}{\sqrt{k}} dk \quad (2.3)$$

と表わせる¹⁾。このグリーン函数を物体が任意運動をするときの問題に利用する。

2.2 積分方程式

物体が中正位置の周辺で任意運動をするときの二次元流れ場の速度ポテンシャルは (2.3) を用いて

$$\Phi(x, y; t) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \sigma(x', y'; t) (\ln r_1 - \ln r_2) ds + \frac{\sqrt{g}}{\pi} \int_c \sigma(x', y'; \xi) ds \int_0^t \sin \sqrt{gk} (t-\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{e^{k(y+y')} \cos k(x-x')}{\sqrt{k}} dk \quad (2.4)$$

と表わせる。ただし

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

である。(2.4) に対応する流れ函数は

$$\Psi(x, y; t) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \sigma(x', y'; t) \left\{ \tan^{-1} \frac{y-y'}{x-x'} - \tan^{-1} \frac{y+y'}{x-x'} \right\} ds - \frac{\sqrt{g}}{\pi} \int_c \sigma(x', y'; \xi) ds \int_0^t \sin \sqrt{gk} (t-\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{e^{k(y+y')} \sin k(x-x')}{\sqrt{k}} dk \quad (2.5)$$

となる。(2.4), (2.5) の線積分は中正位置にあるときの物体の浸水面に沿って行かうもので、強さ σ の吹出しはこの面上に分布させることにする。

次に、物体表面上の境界条件は、上下動の速度（下向きを正）を $h(t)$ 、物体表面上の点の座標を $(\tilde{x}, \tilde{y})$ とすると、流れ函数を使う場合

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{y}; t) = h(t) \tilde{x} \quad (2.6)$$

である。(2.5) を (2.6) に適用すると

$$h(t) \tilde{x} = -\frac{1}{2\pi} \int_c \sigma(x', y'; t) \left\{ \tan^{-1} \frac{\tilde{y}-y'}{\tilde{x}-x'} - \tan^{-1} \frac{\tilde{y}+y'}{\tilde{x}-x'} \right\} ds - \frac{\sqrt{g}}{\pi} \int_c \sigma(x', y'; \xi) ds \int_0^t \sin \sqrt{gk} (t-\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{e^{k(\tilde{y}+y')} \sin k(\tilde{x}-x')}{\sqrt{k}} dk \quad (2.7)$$

これが、任意運動 $h(t)$ に応ずる $\sigma(\tilde{x}, \tilde{y}; t)$ を求めるための積分方程式である。

ここで、運動が調和振動の場合、(2.7) が $t \rightarrow \infty$ で定常調和振動の場合の積分方程式になることを示しておく。(2.7) において $h(t) = R_e\{\bar{h}e^{i\nu t}\}$, $\sigma(x', y'; \xi) = R_e\{f(x', y')e^{i\nu \xi}\}$ として ξ に関する積分を行うと

$$(2.7) \text{ 右辺第2項} = -\frac{1}{\pi} \int_c R_e \left[f(x', y') \left\{ e^{i\nu t} \oint_0^\infty \frac{e^{k(\tilde{y}+y')} \sin k(\tilde{x}-x')}{k-K} dk \right\} \right]$$

$$-\oint_0^\infty \frac{e^{k(\tilde{y}+y')} \sin k(\tilde{x}-x')}{\sqrt{k}(k-K)} (\sqrt{k} \cos \sqrt{gk}t + i\sqrt{K} \sin \sqrt{gk}t) dk \Big] ds \quad (2.8)$$

ただし, ν は振動率, $K=\nu^2/g$ である。

ここで $t \rightarrow \infty$ とすると Riemann-Lebesgue の補助定理を利用して

$$(2.7) \text{ 右辺第 2 項 } \Big|_{t \rightarrow \infty} = -\frac{1}{\pi} \int_c R_e \left[f(x', y') \left\{ e^{i\nu t} \oint_0^\infty \frac{e^{k(\tilde{y}+y')} \sin k(\tilde{x}-x')}{k-K} dk \right. \right. \\ \left. \left. - i\pi e^{i\nu t} e^{K(y+y')} \sin K(\tilde{x}-x') \right\} \right] ds \quad (2.9)$$

(2.9) を (2.7) に代入すると

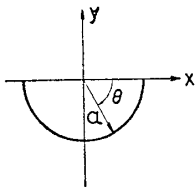
$$R_e \{ \bar{h} e^{i\nu t} \} \tilde{x} = -\frac{1}{2\pi} \int_c R_e \{ f(x', y') e^{i\nu t} \} \left\{ \tan^{-1} \frac{\tilde{y}-y'}{\tilde{x}-x'} - \tan^{-1} \frac{\tilde{y}+y'}{\tilde{x}-x'} \right\} ds \\ - \frac{1}{\pi} \int_c R_e \{ f(x', y') e^{i\nu t} \} \oint_0^\infty \frac{e^{k(\tilde{y}+y')} \sin k(\tilde{x}-x')}{k-K} dk ds \\ + \frac{1}{\pi} \int_c R_e \{ f(x', y') e^{i\nu t} \} \pi e^{K(\tilde{y}+y')} \sin K(\tilde{x}-x') ds \quad (2.10)$$

これは定常調和振動の場合の式に等しい。

2.3 積分方程式の解き方

ここでは例として, 円柱がある時刻 $t=0$ より heaving を始めた場合を考えることにする。Fig.2 の様な極座標を採用することになると, 円柱の半径を a として

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= a \cos \theta, & x' &= a \cos \theta' \\ \tilde{y} &= -a \sin \theta, & y' &= -a \sin \theta' \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$



(2.7) を無次元形に書くために

$$h(t) = \bar{h} \nu \cos(\nu t - \varepsilon), \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\bar{h} \nu}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{a}} t, \quad \tau' = \sqrt{\frac{g}{a}} \xi, \quad \omega = \sqrt{\frac{a \nu^2}{g}}, \quad k' = a k$$

Fig. 2 Polar Coordinate System の無次元量を用いることにする。 σ の y 軸に関する対称性を考慮し, また σ', k' をあらためて σ, k とすると (2.7) は

$$\cos \theta \cdot \cos(\omega \tau - \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sigma(\theta', \tau) K_1(\theta, \theta') d\theta' \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^\tau \sigma(\theta', \tau') K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau') d\tau' \quad (2.12)$$

と書ける。ただし

$$K_1(\theta, \theta') = \tan^{-1} \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\cos \theta - \cos \theta'} - \tan^{-1} \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\cos \theta - \cos \theta'} + \tan^{-1} \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'} - \tan^{-1} \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'} \quad (2.13)$$

$$K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau') = \int_0^\infty \frac{e^{-k(\sin \theta + \sin \theta')}}{\sqrt{k}} \{ \sin k(\cos \theta - \cos \theta') + \sin k(\cos \theta + \cos \theta') \} \sin \sqrt{k}(\tau - \tau') dk \quad (2.14)$$

(2.12) は $\theta = \pi/2$ では両辺 0 になるので, そこでは両辺を θ で微分した式 (速度ポテンシャルを使うのと同価) を使うことにする。即ち

$$-\cos(\omega \tau - \varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^\tau \sigma(\theta', \tau') K'(\theta'; \tau, \tau') d\tau' \quad (2.15)$$

ただし

$$K'(\theta'; \tau, \tau') = -2 \int_0^\infty \sqrt{k} e^{-k(1+\sin \theta')} \cos k \cos \theta' \cdot \sin \sqrt{k}(\tau - \tau') dk \quad (2.16)$$

ここで, 定常調和振動の場合の吹出し σ_∞ を導入すると, (2.12), (2.15) は次の如く書ける。

$$\cos \theta \cdot \cos(\omega \tau - \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sigma(\theta', \tau) K_1(\theta, \theta') d\theta' \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^\tau \sigma_\infty(\theta', \tau') K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau') d\tau' \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^\tau \{ \sigma(\theta', \tau') - \sigma_\infty(\theta', \tau') \} K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau') d\tau' \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
-\cos(\omega\tau - \varepsilon) &= \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^\tau \sigma_\infty(\theta', \tau') K'(\theta'; \tau, \tau') d\tau' \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^\tau \{\sigma(\theta', \tau') - \sigma_\infty(\theta', \tau')\} K'(\theta'; \tau, \tau') d\tau'
\end{aligned} \quad (2.18)$$

σ_∞ は菅など⁴⁻⁷⁾によりすでに求められているものである。(2.12), (2.17) は θ に関しては Fredholm 型, τ に関しては Volterra 型の 2 変数の積分方程式である。この積分方程式を, θ と τ についてそれぞれ適当に標点を定め, 一挙に解くことは可能であるが, 計算の手数はかなり繁雑になると思われる。そこで τ については時間を逐次増やして, その都度 σ を求めていく方法をとることとする。

以下では次の記号を使う。

$$A(\theta, \theta'; \tau) = \int_0^\tau \sigma_\infty(\theta', \tau') K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau') d\tau' \quad (2.19)$$

$$A'(\theta'; \tau) = \int_0^\tau \sigma_\infty(\theta', \tau') K'(\theta'; \tau, \tau') d\tau' \quad (2.20)$$

$$\Delta\sigma(\theta', \tau') = \sigma(\theta', \tau') - \sigma_\infty(\theta', \tau') \quad (2.21)$$

3 数 値 計 算

ここでは次の様な記号を使う。

$$\begin{aligned}
Y &= \sin \theta + \sin \theta', & \left. \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} &= \cos \theta \mp \cos \theta' \\
y &= Y/\tau^2, & x &= X/\tau^2, & Z &= Y - iX, & z &= y - ix
\end{aligned}$$

3.1 核函数の計算法

$$(a) \quad K_1(\theta, \theta') = \begin{cases} -\pi & \theta < \theta' \\ 0 & \theta > \theta' \end{cases} \quad (3.1)$$

である。

(b) $K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau')$: これはそのままの形で数値積分すると, $\tau - \tau'$ が大きくなるにつれて精度が落ちることが予想される。 K_2 を精度よく計算するには

$$I_2(X, Y, \tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-kY + ikX} \sin \sqrt{k} \tau}{\sqrt{k}} dk \quad (3.2)$$

を容易に計算できる式を導く必要がある。

まず τ が小さいときには, $\sin \sqrt{k} \tau$ を冪級数に展開し, $\zeta = iY + X = ire^{-i\alpha}$ とおくと

$$I_2 = \int_0^\infty e^{ik\zeta} \left(\tau - \frac{k\tau^3}{3!} + \frac{k^2\tau^5}{5!} - \dots \right) dk = w_0(\zeta)\tau - \frac{w_1(\zeta)\tau^3}{3!} + \frac{w_2(\zeta)\tau^5}{5!} - \dots \quad (3.3)$$

ただし

$$w_n(\zeta) = \int_0^\infty k^n e^{ik\zeta} dk = \frac{n!}{\zeta^{n+1}} \{\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha\} \quad (3.4)$$

τ が大きいときには (3.2) で $\sqrt{k} \tau = \lambda$ とおいて

$$I_2 = \frac{2}{\tau} \int_0^\infty e^{-z\lambda^2} \sin \lambda d\lambda \equiv \frac{Q(z)}{\tau} \quad (3.5)$$

とする。 $Q(z)$ の満足すべき微分方程式を求めると

$$\frac{d^2 Q(z)}{dz^2} + \frac{10z-1}{4z^2} \frac{dQ(z)}{dz} + \frac{1}{2z^2} Q(z) = 0 \quad (3.6)$$

を得る。(3.6) は $z=0$ に不確定特異点を持っている。(3.6) の 1 つの解は

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.7)$$

とおいて (3.6) に代入することにより

$$Q(z) \sim C_1 \{1 + (2z) + 1 \cdot 3 (2z)^2 + 1 \cdot 3 \cdot 5 (2z)^3 + \dots\} \quad (3.8)$$

もう 1 つの解は

$$Q(z) = C_2 e^{-1/4z} / \sqrt{z} \quad (3.9)$$

ここで C_1, C_2 は任意定数である。 $R_e(z)=0$ の場合の Lamb⁸⁾ の表示式を参考にして定数の値を定めると (3.6) の解として次の表示式を得る。

$$Q(z) \sim \operatorname{sgn}(X) i \sqrt{\pi} e^{-1/4z} / \sqrt{z} + 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} z^n \right\} \quad (3.10)$$

(3.10) を (3.5) に代入すると

$$I_2 \sim \frac{1}{\tau} \left[\operatorname{sgn}(X) i \sqrt{\pi} e^{-1/4z} / \sqrt{z} + 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} z^n \right\} \right] \quad (3.11)$$

(3.3) から (3.11) への移行は $\sqrt{X^2 + Y^2} / \tau^2$ の値によって判別する。以上の I_2 を使って K_2 は

$$K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau') = I_m \{ I_2(X_1, Y, \tau - \tau') + I_2(X_2, Y, \tau - \tau') \} \quad (3.12)$$

と表わせる。特に $\theta = \theta' = 0$ の場合は次の様にしても計算できる。

$$\begin{aligned} K_2(0, 0; \tau, \tau') &= \int_0^{\infty} \frac{\sin 2k \sin \sqrt{k}(\tau - \tau')}{\sqrt{k}} dk \\ &= \sqrt{\pi} \left\{ \sin \frac{(\tau - \tau')^2}{8} S \left(\frac{\tau - \tau'}{2\sqrt{\pi}} \right) + \cos \frac{(\tau - \tau')^2}{8} C \left(\frac{\tau - \tau'}{2\sqrt{\pi}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで S, C は Fresnel の函数である。

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき } S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x} \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right), \quad C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x} \sin \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) \quad (3.14)$$

を考慮すると

$$\tau - \tau' \rightarrow \infty \text{ のとき } K_2(0, 0; \tau, \tau') \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \left\{ \frac{(\tau - \tau')^2}{8} + \frac{\pi}{4} \right\} \quad (3.15)$$

となり、 $\theta = \theta' = 0$ の場合は $\tau - \tau'$ が大きくなるにつれて振幅一定で激しく振動するようになる。 K_2 の計算結果の例を Fig. 3 に示す。

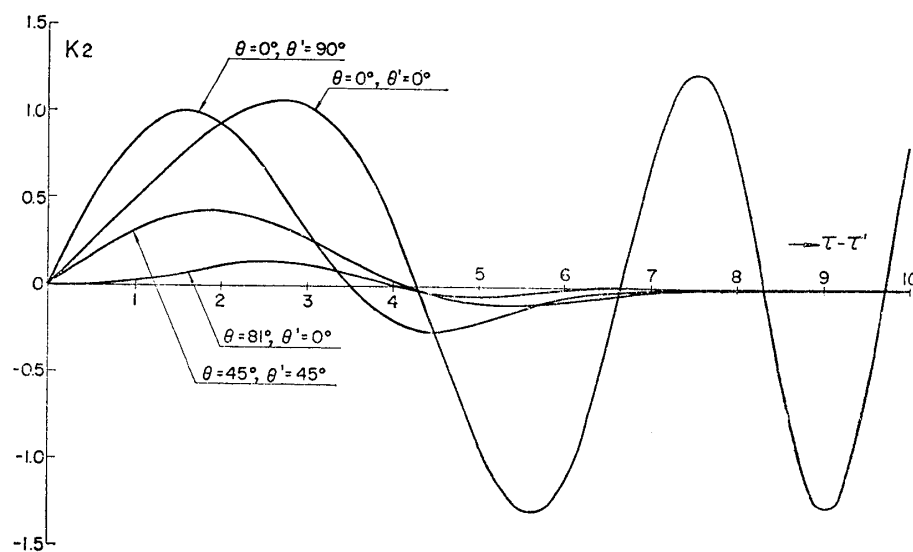


Fig. 3 $K_2(\theta, \theta'; \tau, \tau')$

(c) $K'(\theta'; \tau, \tau')$: これも K_2 と同様に計算できる。

$$I'(X, Y, \tau) = \int_0^{\infty} \sqrt{k} e^{-kY + ikX} \sin \sqrt{k} \tau dk \quad (3.16)$$

とおく。 τ が小さい場合には K_2 の場合と同様の記号を用いると

$$I' = w_1(\zeta) \tau - \frac{w_2(\zeta) \tau^3}{3!} + \frac{w_3(\zeta) \tau^5}{5!} - \dots \quad (3.17)$$

となる。 τ が大きい場合には

$$I' = \frac{2}{\tau^3} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2} \sin \lambda d\lambda = -\frac{1}{\tau^3} \frac{dQ(z)}{dz} \quad (3.18)$$

と書ける。(3.10) より $dQ(z)/dz$ を求め、(3.18) に代入すると

$$I' \sim -\frac{1}{\tau^3} \left[\operatorname{sgn}(X) i \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{2z} \right) e^{-1/4z} / \sqrt{z} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} z^{n-1} \right] \quad (3.19)$$

となる。(3.17) から (3.19) への移行も $\sqrt{X^2 + Y^2}/\tau^2$ の値によって判別する。以上の I' を使って K' は

$$K'(\theta'; \tau, \tau') = -2 \operatorname{Re} \{ I'(X_2, Y, \tau - \tau') \} \quad (3.20)$$

と表わせる。 K' の計算結果の例を Fig. 4 に示す。

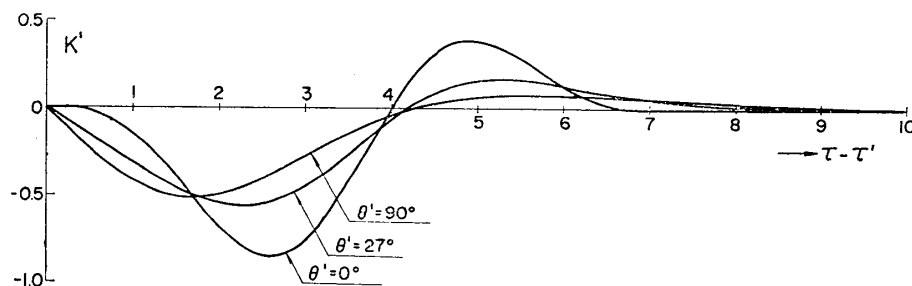


Fig. 4 $K'(\theta'; \tau, \tau')$

3.2 $A(\theta, \theta'; \tau)$ の計算法

$$\sigma_{\infty}(\theta', \tau') = \operatorname{Re} [\{ f_r(\theta') + i f_i(\theta') \} e^{i(\omega\tau' - \varepsilon)}] \quad (3.21)$$

とおくと

$$A(\theta, \theta'; \tau) = \int_0^{\tau} \operatorname{Re} [\{ f_r(\theta') + i f_i(\theta') \} e^{i(\omega\tau' - \varepsilon)}] \sin \sqrt{k}(\tau - \tau') d\tau' \\ \times \int_0^{\infty} \frac{e^{-kY} (\sin kX_1 + \sin kX_2)}{\sqrt{k}} dk \quad (3.22)$$

である。(3.22) の τ' に関する積分を行うと

$$\int_0^{\tau} e^{i\omega\tau'} \sin \sqrt{k}(\tau - \tau') d\tau' = \frac{\sqrt{k} e^{i\omega\tau}}{k - \omega^2} - \frac{\sqrt{k} \cos \sqrt{k}\tau + i\omega \sin \sqrt{k}\tau}{k - \omega^2} \quad (3.23)$$

となる。したがって、 A を求めるには

$$A_1(\theta, \theta') \equiv \oint_0^{\infty} \frac{e^{-kY} (\sin kX_1 + \sin kX_2)}{k - \omega^2} dk \quad (3.24)$$

$$A_2(\theta, \theta'; \tau) \equiv \oint_0^{\infty} \frac{e^{-kY} (\sin kX_1 + \sin kX_2) (\sqrt{k} \cos \sqrt{k}\tau + i\omega \sin \sqrt{k}\tau)}{\sqrt{k} (k - \omega^2)} dk \quad (3.25)$$

を計算する必要がある。 A_1 についてはすでに級数展開による表示式が求められている⁹⁾。 A_2 を求めるには

$$I_a(X, Y, \tau) \equiv \oint_0^{\infty} \frac{e^{-kY + i\tau kX} (\sqrt{k} \cos \sqrt{k}\tau + i\omega \sin \sqrt{k}\tau)}{\sqrt{k} (k - \omega^2)} dk \quad (3.26)$$

を容易に計算できる式を導く必要がある。 I_a は

$$I_a = \oint_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 z + i\lambda}}{\lambda - \omega\tau} d\lambda + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 z - i\lambda}}{\lambda + \omega\tau} d\lambda \quad (3.27)$$

と書ける。(3.27) を Cauchy の積分定理を利用して計算すると、 $Y \neq 0$ の場合

$$I_a = i\pi e^{-\omega^2(Y - iX) + i\omega\tau} + e^{-1/4z} \left[\int_{m/\tau}^{\infty} \frac{2\lambda e^{-\lambda^2(Y - iX)}}{\lambda^2 - (i/2z\tau - \omega)^2} d\lambda - \int_{-m/\tau}^{m/\tau} \frac{e^{-\lambda^2(Y - iX)}}{\lambda - i/2z\tau + \omega} d\lambda \right] + 2 \int_0^{n/\tau} \frac{e^{\lambda^2(Y - iX) - \lambda\tau}}{\lambda + i\omega} d\lambda \quad (3.28)$$

ここで $m = \operatorname{Re}(i/2z)$, $n = \operatorname{Im}(i/2z)$ である。

$Y=0$ の場合は X の正負により極の位置を考慮して

$X > 0$ のとき $I_a = i\pi e^{i\omega^2 X + i\omega\tau}$

$$+ e^{-1/4x} \left[-C_1 a \cos a - s_1 a \sin a - i \{ C_1 a \sin a - s_1 a \cos a \} - 2 \int_0^{1/2x} \frac{e^{i\lambda^2 x} d\lambda}{\lambda - 1/2x - \omega\tau} \right] \quad (3.29)$$

ここで $a = x(1/2x + \omega\tau)^2$, C_1 , s_1 はそれぞれ積分余弦函数, 積分正弦函数である。

$X < 0$ のときはさらに τ による極の移動を考慮して

$\tau < 4\omega$ では $I_a = -i\pi e^{i\omega^2 X + i\omega\tau}$

$$+e^{-i/4x}\left[-C_i(-a)\cos a+s_i(-a)\sin a-i\{C_i(-a)\sin a+s_i(-a)\cos a\}-2\int_0^{-1/2x}\frac{e^{i\lambda^2x}d\lambda}{\lambda+1/2x+\omega\tau}\right] \quad (3.30)$$

$\tau > 4\omega$ では

$$I_a = i\pi e^{i\omega^2 X + i\omega\tau} + e^{-i/4x}\left[-C_i(-a)\cos a+s_i(-a)\sin a-i\{C_i(-a)\sin a+s_i(-a)\cos a\} + 2\int_{1/2x}^0 \frac{e^{-i\lambda^2x}d\lambda}{\lambda-(1/2x+\omega\tau)i} - 2\int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{ie^{(i\cos 2\theta - \sin 2\theta)/4x}d\theta}{1-(1+2x\omega\tau)e^{-i\theta}}\right] \quad (3.31)$$

と書ける。以上の I_a を使って A_2 は

$$A_2(\theta, \theta'; \tau) \equiv A_{2r}(\theta, \theta'; \tau) + iA_i(\theta, \theta'; \tau) \\ = \frac{1}{2i}\{I_a(X_1, Y, \tau) - I_a(-X_1, Y, \tau) + I_a(X_2, Y, \tau) - I_a(-X_2, Y, \tau)\} \quad (3.32)$$

と表わせる。(3.28), (3.29), (3.31)の右辺第2項は τ が大きくなると0に減衰するものであるから, A_2 は(2.10)で示した定常調和振動の式の右辺第3項に相当するものになる。 A_2 の計算結果の例を Fig.5 に示す。

3.3 $A'(\theta'; \tau)$ の計算法

A の場合と同様に (3.21) を使うと

$$A'(\theta'; \tau) = -2\int_0^\tau R_e[\{f_r(\theta') + if_i(\theta')\}e^{i(\omega\tau' - \varepsilon)}] \sin \sqrt{k}(\tau - \tau') d\tau' \int_0^\infty \sqrt{k} e^{-kY} \cos kX_2 dk \quad (3.33)$$

である。 τ に関する積分 (3.23) を考慮すると A' を求めるには

$$A_1'(\theta') \equiv \oint_0^\infty \frac{k e^{-kY} \cos kX_2}{k - \omega^2} dk = \frac{1}{2} + \omega^2 \int_0^\infty \frac{e^{-kY} \cos kX_2}{k - \omega^2} dk \quad (3.34) \\ A_2'(\theta'; \tau) \equiv \oint_0^\infty \frac{\sqrt{k} e^{-kY} \cos kX_2 (\sqrt{k} \cos \sqrt{k}\tau + i\omega \sin \sqrt{k}\tau)}{k - \omega^2} dk \\ = \int_0^\infty \frac{e^{-kY} \cos kX_2 \cos \sqrt{k}\tau}{k - \omega^2} dk + i\omega \int_0^\infty \frac{e^{-kY} \cos kX_2 \sin \sqrt{k}\tau}{\sqrt{k}} dk \\ + \omega^2 \oint_0^\infty \frac{e^{-kY} \cos kX_2 (\sqrt{k} \cos \sqrt{k}\tau + i\omega \sin \sqrt{k}\tau)}{\sqrt{k}(k - \omega^2)} dk \\ \equiv D_r(\theta'; \tau) + i\omega D_i(\theta'; \tau) + \omega^2 B(\theta'; \tau) \quad (3.35)$$

を計算する必要がある。 A_1' は A_1 と同様に計算できる。 B は(3.28)によって計算できる。

D_r は τ が小さいときには, $\cos \sqrt{k}\tau$ を冪級数に展開して(3.4)を使って

$$D_r(\theta'; \tau) = R_e \left\{ w_0(\zeta) - \frac{w_1(\zeta)\tau^2}{2!} + \frac{w_2(\zeta)\tau^4}{4!} - \dots \right\} \quad (3.36)$$

τ が大きいときには

$$D_r(\theta'; \tau) = \frac{2}{\tau^2} R_e \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^2 \tau^2} \cos \lambda d\lambda \\ \equiv \frac{2}{\tau^2} R_e P(z) \quad (3.37)$$

とおいて, $P(z)$ の満足すべき微分方程式を求めると

$$\frac{d^2 P(z)}{dz^2} + \frac{14z-1}{4z^2} \frac{dP(z)}{dz} + \frac{3}{2z^2} P(z) = 0 \quad (3.38)$$

を得る。(3.38)はBirkhoffとKotik¹⁰⁾が導いたのと同じ式である。解もすでに求められている。

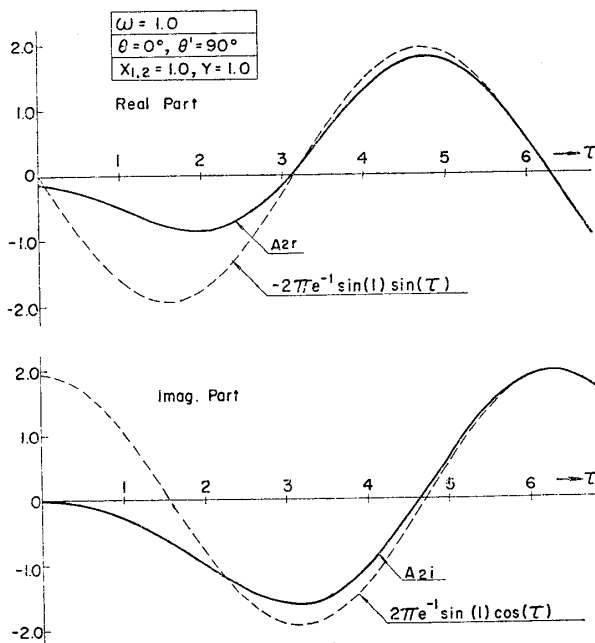


Fig. 5 $A_2(\theta, \theta'; \tau)$

(3.37) に代入すると

$$D_r(\theta'; \tau) \sim \frac{2}{\tau^2} R_e \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!} z^n \right\} \quad (3.39)$$

D_i は K_2 の場合と同様に (3.3), (3.11) によって計算できる。

4 計算結果および考察

4.1 計算結果

以上の様にして求めた核函数 K_1, K_2, K' , 函数 A, A' を使って積分方程式 (2.12), (2.17) を解くことにする。解き方は 2.3 で述べた様に, τ については適当にきざみ $\Delta\tau$ を定めて逐次変数を増やし, 各 τ 毎に σ を解いていく。物体表面上 $\theta=0\sim\pi/2$ を N 等分し, $N+1$ 個の点で境界条件を満足させることにすると, 各 τ 毎に $N+1$ 元連立方程式を解いて σ を求めることになる。 σ_∞ の値としては菅⁴⁾の値を使用した。

計算結果の例を Figs. 6, 7 に示す。(2.12), (2.17) いずれも同じ結果を与える。 $\Delta\sigma$ が τ とともに 0 に減衰することを期待したのであるが, ある一定の周期, 振幅で振動しながらいつまでも残っている。ここには $\varepsilon=\pi/2$, $\omega=1.0, 0.7746$ の場合のみ図示してあるが, 他の ε, ω のときも同様である。運動の周期がかわっても, 残っている $\Delta\sigma$ の周期は変化しない。さらに運動を途中で中止した場合の解を (2.12) を使って求めてみた。結果を Fig. 8 に示す。この場合も σ は同様に減衰しない。

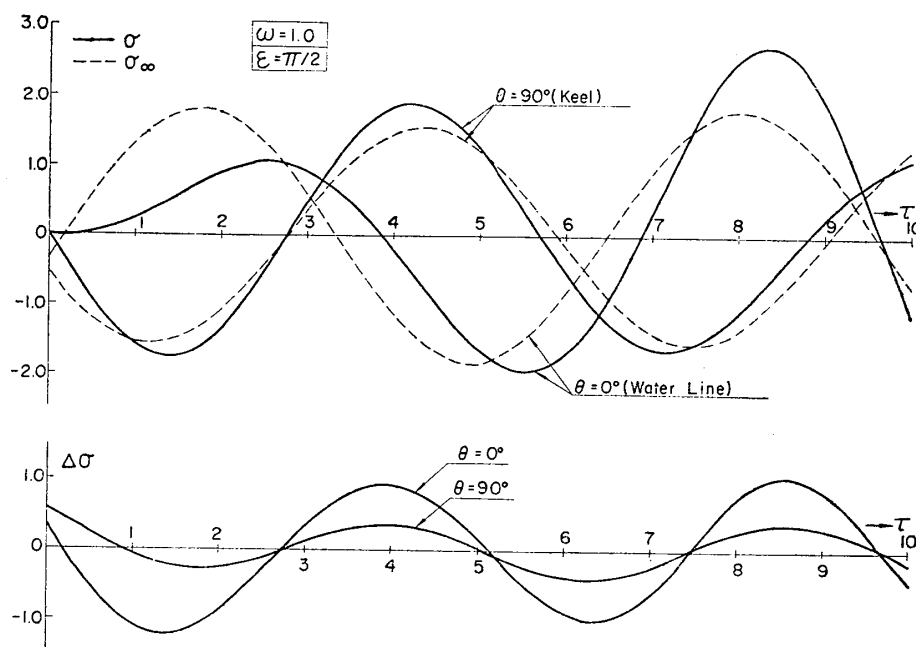


Fig. 6 $\sigma(\theta, \tau)$, $\Delta\sigma(\theta, \tau)$ $\omega=1.0$ ($K=1.0$)

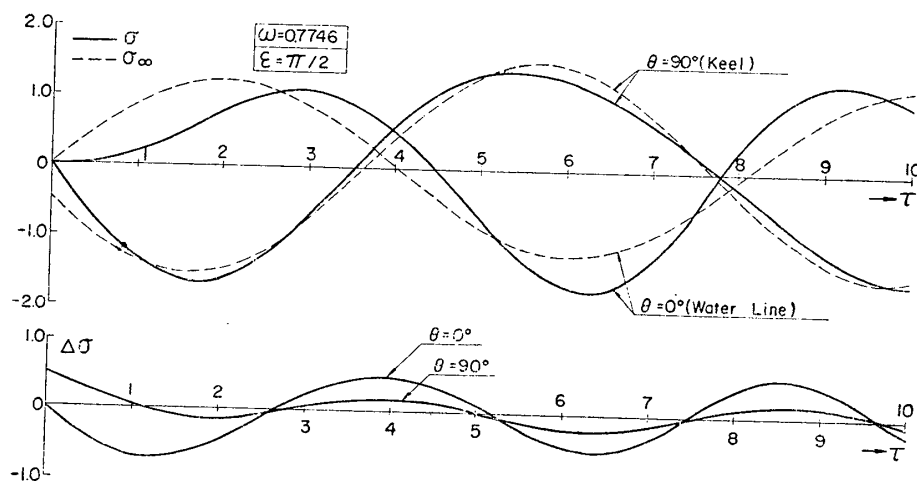
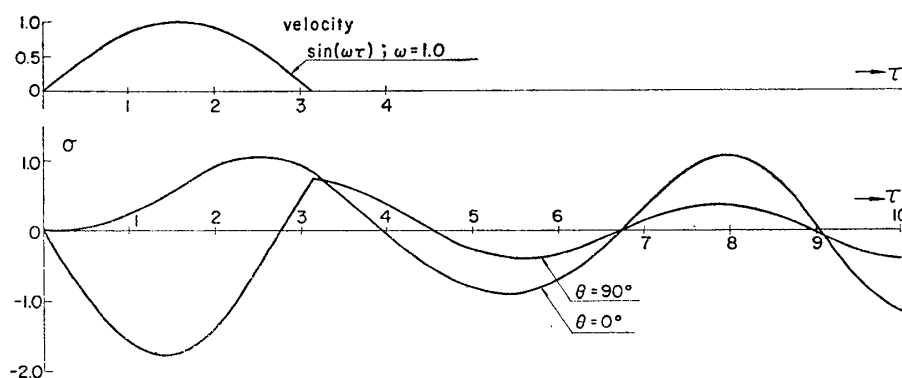


Fig. 7 $\sigma(\theta, \tau)$, $\Delta\sigma(\theta, \tau)$ $\omega=0.7746$ ($K=0.6$)

Fig. 8 $\sigma(\theta, \tau)$

4.2 考察

いつまでも残っている $\Delta\sigma$ の周期に注目してみると、いずれも $\omega \doteq 1.344$ に相当する値を示している。

運動が調和振動の場合、(2.7) は (2.10) に示す様に、 $\tau \rightarrow \infty$ とすると定常調和振動の場合の積分方程式になるのであるから、ここで、定常調和振動の場合の解を検討する。John¹¹⁾ は運動の振動率によって、積分方程式が解を与えない場合があり得ることを示し、その周波数を “irregular frequency” と呼んでいる。Frank⁶⁾ は rectangular cylinder の heaving の場合について連立方程式の係数の行列式の値を計算して、その値が 0 になる振動率を示し、John の “irregular frequency” の存在を明らかにしている。菅⁴⁾ は円柱の heaving の場合、 $K=1.818$ の近傍で吹出しが急激に大きくなると述べている。今の場合 $K=\omega^2$ であるから、これは $\omega \doteq 1.348$ に相当することになり、上に述べた $\Delta\sigma$ の ω とほぼ一致する。

ここでは “irregular frequency” に相当する振動数を「固有振動数」と呼ぶことにする。実際に、円柱が heaving する場合（定常状態）の行列式の値を (2.10) を使って求めた結果を Fig. 9 に示す。 $\omega=1.348$ ($K \doteq 1.818$) はこの場合の固有振動数であることがわかる。また Fig. 9 を見ると固有振動数は $\omega \doteq 1.348$ 以外にも存在するが、運動の振動数から遠くはなれたところの固有振動数の影響は小さい様である。

以上の考察と計算結果より、吹出しの表面分布を積分方程式によって求める方法をとるかぎり、何らかの攪乱があると長時間後には必ず固有振動数によって生ずるもの（積分方程式の固有函数）が残り、その振幅は攪乱の大きさによってかわることがわかる。この固有振動数は、定常調和振動の問題の場合、通常の船舶の動揺周期を考えるならば、ほとんど問題にならないが、任意運動の場合には大きな障害をもたらすことになる。

Figs. 6, 7 に示される $\Delta\sigma$ には固有函数が残っているわけで、その分を $\Delta\sigma$ から差し引く必要がある。この積分方程式の固有函数を解析的に導くことは不可能であろう。数値的には、 $\tau=0$ において瞬間的攪乱 (impulse) を与えて解を求め、求めた解の振幅を $\Delta\sigma$ の振幅と等しくなる様に拡大するという方法が考えられるが、得られた解と $\Delta\sigma$ との位相差の処理に難点がある。 $\tau=0$ からある時間間隔（定常状態に充分近いと思われるところまで）をとり、その間の解をフーリエ級数でおきかえて、 θ と τ について一挙に解く方法によっても解は前述の場合とかわらない。さらに、逐次近似的手法、即ち初め (2.12) の右辺第 2 項を省略して解を求め、求めた解を第 2 項に入れて新しい解を求めていくという様な手法によっても計算を進めていけば結果は Figs. 6, 7 と同じになる。

以上の様に、積分方程式に固有函数がある場合には解を求めることはなかなか困難である。したがって固有振動数の現われない積分方程式を導く必要があるが、それについては次の機会に述べるつもりである。

ここでは運動が調和振動の場合の一つの近似解として、(2.17) の右辺第 3 項を省略して計算した結果を Fig. 10 に示す。

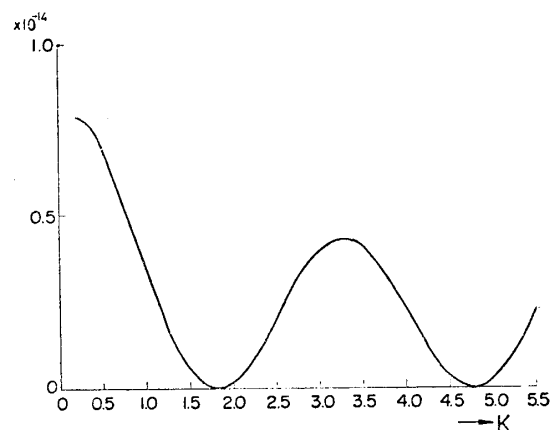
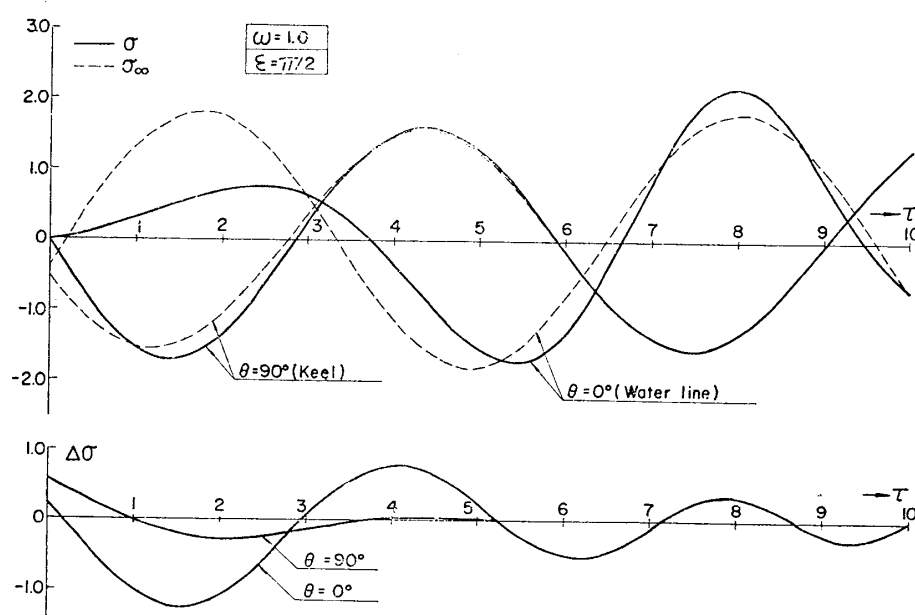


Fig. 9 Determinant of Matrix

Fig. 10 Approximate Solution $\omega=1.0$ ($K=1.0$)

5 結 言

いままで述べてきたことをまとめると次のようになる。

- (1) 柱体が任意運動をするときの流れ場を求めるための積分方程式を、吹出しの表面分布による方法で求め、その核函数および函数 A, A' の計算法を示した。
- (2) 上記の積分方程式を解いた結果、定常調和振動の場合の固有振動数によって生ずる固有函数が解の中に残ることがわかった。この固有函数を求めることはなかなか困難であり、固有振動数の現れない積分方程式を導く必要がある。
- (3) 運動が調和振動の場合の一つの近似解を示した。

おわりに、この研究は当所運動性能部花岡達郎部長により動機を与えられて始めたものであり、研究の当初から終始、懇切丁寧なご指導をいただいた。心から感謝いたします。菅井和夫室長、菅信主任研究官からは種々、貴重な討論ご意見をいただき、また細部にわたる点まで相談にのっていただいた。深く感謝の意を表します。

なお、本論文の数値計算には船舶技術研究所共用計算機 FACOM 270-20 を使用した。

参 考 文 献

- 1) 花岡達郎：造波現象の理論に関する Rayleigh の方法に就て，造船協会論文集第 92 号，(1952)
- 2) A. B. Finkelstein : The Initial Value Problem for Transient Water Waves, Comm. Pure Appl. Math., Vol.10, (1957)
- 3) J. J. Stoker : Water Waves, Interscience Publishers, New York, (1957) pp.149~196
- 4) 菅信：平水中で調和振動する二次柱状体に働く変動圧力の計算，第 20 回船研研究発表会講演概要，(1972)
- 5) 前田久明：任意船型におよぼす波の強制力について，日本造船学会論文集第 126 号，(1969)
- 6) W. Frank : Oscillation of Cylinders in or below the Free Surface of Deep Fluids, NSRDC, (1967)
- 7) W. D. Kim : On the harmonic oscillations of a rigid body on a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 21, Part 3, (1965)
- 8) H. Lamb : Hydrodynamics, sixth edition, Cambridge University Press., New York, (1932) pp.384~391
- 9) 花岡達郎：柱体の動揺造波に伴う変動水圧，未刊，(1972)
- 10) G. Birkhoff and J. Kotik : Some Transformations of Michell's Integral, National Technical University, Athens, Greece, (1954)
- 11) F. John : On the Motion of Floating Bodies II. Simple Harmonic Motions, Comm. Pure Appl. Math., Vol.3, (1950)