

1. 諸言

平板に沿う境界層は流体機械の摩擦抵抗や伝熱特性を支配するものであるため、工業上基本的ではあるが非常に重要な問題である。そのため古くから非常に詳しく研究されて来た。平板に一樣な吸込み又は吹出しが分布する場合については層流、乱流のいずれに対しても境界層内の速度分布、あるいは摩擦係数は解析的にも実験的にも明らかにされている⁽¹⁾、一方平板に沿う流れが時間と共に調和函数的に変動する場合には、Schlichting⁽¹⁾とVickerson⁽²⁾らの理論的および実験的研究があり境界層内の速度分布などの時間平均値は定常の場合とほとんど変わらないことが明らかにされている。しかしながら、吹出しまたは吸込みが時間と共に変動するような場合の境界層の挙動について研究したものはあまり見当らないようである。そこで本研究は平板に均質に分布する吹出しおよび吸込みの量が時間的にも場所的にも微小に変動する場合、但し、その時間的、場所的な平均値は、ほぼ0であるとする。そのような場合の平板層流境界層の応答を吹出しおよび吸込みが2次元적であり、その移動速度が一樣流速に等しくない場合についてはすでに近似的⁽³⁾な方法および、数值的⁽⁴⁾な方法を用いて調べ報告してある。本報告では、壁面に均質に存在する吹出しや吸込みは3次元적であり主流方向の移動速度は一樣流速とほとんど等しい場合について、平板上又は平行2平板間の流れについて調べる。

2. 基礎式

図1に示すように、平板上に均質に分布する吹出や吸込みの量が $e^{i(\omega t + Kz + \lambda x)}$ の実数部で示されるような、流れ方向及びそれと直角方向に波状に変動する場合を考える。変動は3次元적ではあるが、時間平均に対する成分は2次元적な流れであるとする。また流れは簡単のために非圧縮であり、層流とする。さうに図1に示すように平板の前縁から一樣流の流れ方向の距離を x とし、それと壁面に直角な方向の距離を y とする。さうに壁面に平行でかつ x, y

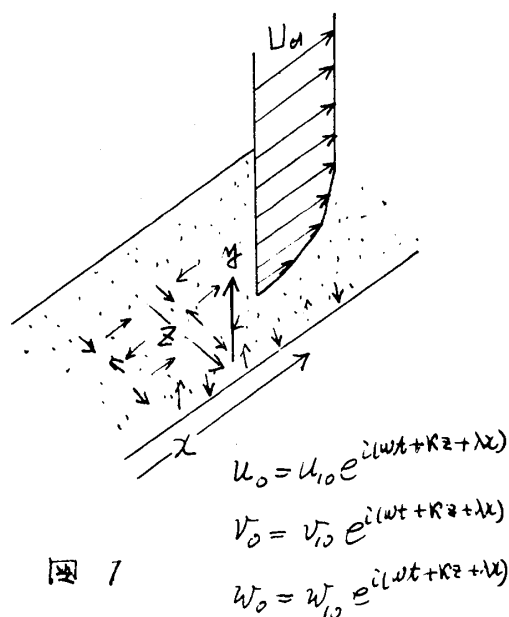


図 1

に直角に z を取る, また時間を t とする。速度の x, y, z 方向の成分を u, v, w とし, 一様流速度, または最高速度を U_0 , 動粘性係数を ν , 流体密度を ρ とする, そこで長さを ν/U_0 , 速度を U_0 , 圧力を ρU_0^2 で無次元化する。するとこのような境界層を表わす基礎方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = \nabla^2 \xi \quad (3)$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \zeta + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla^2 \zeta \quad (4)$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ここで吸込みや吹出しが時間と共に調和函数的に変動していることを考慮して速度や過度 $u = u_0 + u_{11} e^{ist}$, $v = v_0 + v_{11} e^{ist}$, $w = w_{11} e^{ist}$, $\xi = \xi_0 + \xi_{11} e^{ist}$, $\zeta = \zeta_{11} e^{ist}$ (5) と定常成分 u_0, v_0, ξ_0 と時間変動成分 $u_{11}, v_{11}, \xi_{11}, \dots$ 等との和の形で書表わされると考えられる。ここに $S = \nu w/U_0^2$ であり, 以下では S は後に述べる β, γ と共に実数の場合を取扱う。そこで(5)式を(2)式等の基礎式に代入して時間平均を行うと定常成分に対する方程式として,

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2} R (u_{11}^* \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial u_0}{\partial z}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = \frac{1}{2} R (u_{11}^* \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial v_0}{\partial z}), \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{1}{2} R (u_{11}^* \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial w_0}{\partial z})$$

$$\frac{1}{2} R \left\{ u_{11}^* \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial \xi_0}{\partial z} - \xi_{11}^* \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^* \frac{\partial w_0}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^* \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} = \nabla^2 \xi_0 = 0 \quad (7)$$

と得ることができる。ここで平板上の2次元的な流れであるため $u_0 \gg v_0, w_0 = 0$ とした。また $*$ は共役を表わし, R は実部を表わすものとする。また変動成分に対する方程式として(5)式を(3), (4)式に代入したものに $(e^{ist} + 2\alpha e^{2ist})^*$ を掛けて時間平均を取れば

$$i\alpha \xi_{11} + u_0 \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \xi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial z} \xi_{11} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} = \nabla^2 \xi_{11}$$

$$- \alpha \left\{ u_{11} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x} + v_{11} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial y} + w_{11} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial z} - \xi_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_{11}}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right\} \quad (8)$$

$$i\alpha \zeta_{11} + u_0 \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x} + u_{11} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + v_{11} \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \zeta_0 = \nabla^2 \zeta_{11}$$

$$- \alpha \left\{ u_{11} \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x} + v_{11} \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial y} + w_{11} \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial z} - \zeta_{11} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial v_{11}}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial u_{11}}{\partial z} \right\} \quad (9)$$

と変動成分に対する式が得られる。ここに(8), (9)式は α のいかなる値に対して

も成立すべきものであるが、ここには $\alpha = O(1)$ の大きさの値であるとして話を進める。さらに吹出しや吸込みは場所的にも調和函数的に変化していることを考慮して $u_{11} = u_1 e^{i(\beta z + \delta x)}$, $v_{11} = v_1 e^{i(\beta z + \delta x)}$, $\zeta_{11} = \zeta_1 e^{i(\beta z + \delta x)}$, ... 等と書改める。ここに $\beta = \kappa V / U_\infty$, $\delta = \lambda V / U_\infty$ である。さらに、 X 方向の変動波数 δ に比して Z 方向の波数の方がずっと大きく、しかも X 方向の変動の移動速度は一樣流速に等しい $S = -\delta$ の場合について以下の考察を行う。次に境界条件として壁面に於て、速度が、それぞれ $u = u_{00} + u_{10} e^{i(\omega t + \beta z + \delta x)}$, $v = v_{00} + v_{10} e^{i(\omega t + \beta z + \delta x)}$, $w = w_{10} e^{i(\omega t + \beta z + \delta x)}$ となるようにする。ここで u_{00} , v_{00} は、吹出しや吸込みのために、壁面に於てスリップをしていることを示すもので、後に u_{10} , v_{10} 等を用いることにより決定できる。また壁面は計算の都合上 $Y = 0$ よりわずかに上方にあるとする。また壁面から充分離れた所で、または平板間の中心で速度の定常成分が一樣流速 U_∞ に近づくとする。

3. 結果

そこで $\beta \gg \delta$ を考慮して u_0 , v_0 , u_1 , v_1 , ... 等に対する流函数を

$$u_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad v_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \quad w_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (10)$$

と定義する。ここで u_1 , v_1 , w_1 は一樣流速に比べて十分に小さいとする。さらにここが定められた ψ_0 , ψ_1 を新たに

$$\eta = y/\delta(x), \quad \psi_0 = \delta(x)f(\eta), \quad \psi_1 = \delta(x)g(\eta), \quad \zeta = \beta S \quad (11)$$

なる f , g , δ を用いて書換る。ここで δ は境界層の厚さ、または平行平板間の距離に対応するもので、前縁より充分後方に着目しているため以下では $\delta/\delta < \delta < \beta$ という条件で考察を行う。以上述べた条件の場合には (10) 式は (11) 式等を用いて

$$\delta \zeta (iS + i\delta(u_0 + \alpha u_1))(g'' - \zeta^2 g) + i\alpha \delta S^2 (g'g'' - f g''') = g''' - 2\zeta^2 g'' + \zeta^4 g \quad (12)$$

と書くことができる。 $-S \approx \delta < \beta$ であることを考えると壁面からわずかに離れた所より上方の部分では $\beta < \zeta^2 w_1$ の場合 (12) 式は

$$g'g'' - g g''' = 0 \quad (13), \quad g = p e^{\alpha \eta} \quad (\eta' < \alpha e) \quad (14)$$

(13) 式となりこれは一般に (14) 式のように解くことができる。ここで αe はほとんど定数であり、後に明らかになるように $1/R(\alpha e) < \eta(\alpha e)$ となるべき値である。

(7) 式は上に述べた条件を考慮すると

$$1/R\{\beta(g^* \zeta_1' + g'^* \zeta_1)\} = \zeta^2 \zeta_1 = 0 \quad (15) \quad p^* p = \zeta \eta \quad (16), (15) 式$$

のようになり、これを $p \gg |e^{\alpha \eta}|$ と考えて解くと (16) 式が得られる。この際計算の爲に $\eta = 0$ で $p^* p = 0$ なる境界条件を用いた。また $\eta \rightarrow 1$ に対する境界層外での

変動の大きさは $1R(\alpha_e)$ の値により、計算の条件内で任意に変えることができる。一方

(9) 式は上述の条件内では

$$\{is + i\delta(u_0 + \alpha u_1)\} \zeta_1 + \frac{\partial \zeta_0 \zeta_1}{\partial y} = \sigma^2 \zeta_1 \quad (17), \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} \zeta_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (18)$$

(17) 式となり、 $\eta \approx 0$ 以外の場所では (18) 式となる。これは (14) 式を考慮すると

$$u_1 = h e^{\alpha_e \eta} \quad \text{と} \quad h = -\frac{i\beta\delta^2}{\alpha_e} f''p \quad (19)$$

と解くことができる。以上得られた変動成分に対する解を用いると定常成分に対する式が (6), (10) 式等を用いて

$$f''' + (\delta\delta')ff'' = \delta^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\delta^2}{2} R i \beta \{ p^* (\alpha_e h + h') + h (\alpha_e^* p^* + p') \} \quad (20)$$

と書表わすことができる。ここで $C_2 = -2\alpha_e^2/\beta\delta^4$, $C_3 = \frac{2\alpha_e^3}{\beta\delta^4}(\delta\delta'f'' - \delta^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2})$

とする。特に C_3 は $\delta' = 0$ 即ち 2 平行平板間の流れの場合には $\partial p_0/\partial x = \text{一定}$ となって一定値、また平板上の境界層の場合も f, f'' は $\eta = 0 \sim 1$ の間ではほぼ一定値を取る。また

$\delta' = \text{一定}$ として $\delta = \delta_0 + \delta_1(X-X_0)$, $\delta_0 \gg \delta_1(X-X_0)$ ((20) 式右辺は X に対して一定) とすれば

平板の場合にも C_3 は定数として良い。これらを用い、定常成分に対する境界条件考慮し、 $C_1 \gg C_2$ とすると $f' = \frac{C_1}{C_2} [\ln(\frac{C_1}{C_2}\eta + 1) - \eta]$ 但し $\ln \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} + 1$ (21)

と解くことができる。ここで $C_1 > 0$, $f'' > 0$, $\partial p_0/\partial x < 0$ の場合には前述のように

α_e は虚数部分が大きくなる。さらに壁面に於る変動成分を $|u_{10}| = \epsilon u$, $|u_{10}| = \beta\delta\epsilon$, $|u_{10}| = \epsilon u$

とし壁面 $\eta = \eta_0$ を $\epsilon^2 = C_1\eta_0$ とし、 $P_x \equiv \frac{\epsilon}{2}\epsilon_4\beta$ とすれば C_1, C_2, C_3 等はそれぞれ

$\alpha_e = \epsilon u / \epsilon$, $C_2 = 2(\epsilon u / \epsilon)^2 / (\beta\delta)^2$, $C_3 = -\epsilon u^2 \epsilon u / (\epsilon\beta\delta^3)$, $C_1 \approx C_3 \ln(-\delta^2\epsilon)$

と得ることができる。一方平板間の流れに対しては $\mu(\partial^4/\partial y^4)_{y=0} = \int_0^\delta (\partial p_0/\partial x) dy$

$\approx \int_{y_0}^\delta (\partial p_0/\partial x) dy$ であることを考慮して、壁面の摩擦係数を

$C_f = \tau_0/\rho U_\infty^2 = \frac{1}{8} f''(0)$ (22), $C_f = -\delta P_x$ (23), (22) 式と定義すれば、(23)

式のように得ることができる。さらに $1/C_0 \equiv \sqrt{C_f} \ln C_f \delta$ と書けば (21) 式の速度分析は $v^+ \approx \sqrt{\tau_0/\rho}$ を用いて近似的に大略

$u/v^+ = C_0 \ln \left[\frac{1}{C_0} \frac{v^+(y+y_0)}{v^+} \right]$

と簡単に書直すこともできる。

4. 文献

(1) Schlichting H

"Boundary Layer Theory"

McGraw-Hill New York (1966')

(2) Nickerson P. S

W.A.D.C. Tech Rep 57-481 (1957)

(3) 徳田 仁

機械学会講演論文集 NO. 710-15,

61, (1971'-10)

(4) 徳田 仁

機械学会講演論文集 No. 720-15

291, (1972'-8)