

シリーズ

衝突論ノート

VI. 複素散乱振幅の位相が断面積を変える

— 似た者同士の衝突はややこしい —

島村 勲

理化学研究所原子物理研究室

shimamura@ribf.riken.jp

平成 23 年 2 月 7 日 原稿受付

1 クーロン散乱に量子論は必要か

素電荷 e の z 倍と Z 倍の点電荷二つが相対運動エネルギー E で衝突するとき、クーロン散乱振幅 $f_C(\theta)$ (付録参照) により重心系微分断面積は

$$\frac{d\sigma_R(\theta)}{d\omega} = |f_C(\theta)|^2 = \left(\frac{C}{4E}\right)^2 \sin^{-4}\Theta \quad \left(\Theta = \frac{\theta}{2}\right) \quad (1)$$

と表せます。ここで $C = zZe^2$ で、相互作用ポテンシャルは $V(r) = C/r$ です。これはエネルギーの次元をもつので、それに r/E を掛けた C/E は長さの次元、式 (1) は面積の次元をもちます。

式 (1) は複素散乱振幅 $f_C(\theta)$ の位相因子 $e^{i\Phi}$ に無関係で、位相(偏角)が間違っているでも絶対値は正しいボルン近似 $f_C^B(\theta)$ (付録) を使っても全く同じです。一般に、散乱振幅の位相なんて所詮、理論屋のお遊び、現実の物理現象を表す断面積にとり何の意味も無いと思いませんか？ ところがどうして、この位相がクーロン散乱の角分布を全く変えてしまうことがあるのです(第3節)。

式 (1) は量子力学の確立以前、1910 年代初頭にはすでに金属箔内の何らかの点電荷(実は原子核)によるアルファ線の散乱を説明するため、ラザフォードが古典力学により導き、弟子ガイガーとマルスデンがさらに実験的に確認し、ラザフォード公式として知られています [1]。歴史的業績ですが、ラザフォードには運も味方してくれました。それは、古典論でも量子論でも同じ角分布 (1) が導ける特殊性のため、彼の解析には量子論の知識が表面上不要だったことです。

実はもう一つ、物理学史上恐らく語られない幸運がありました。もしも当時、アルファ粒子ビーム同士の交差実験ができたなら、その結果

に彼は頭を抱えたことでしょう。金属原子核による散乱とは異なり、アルファ-アルファ衝突の散乱角分布は式 (1) に合わず、振動するはずだからです(第3節)。陽子ビーム同士の衝突でも同じです。そんな高度な実験技術が無くてラザフォードは幸せだったと言えるかも知れません。

アルファ粒子同士、陽子同士と言っても、各粒子の電荷分布や強い相互作用が関わるような高エネルギー衝突のことではありません。私が話すのですから、粒子を点電荷と見なせるような単純な原子衝突の世界を想定しています。

陽子(アルファ粒子)がもう一つの陽子(アルファ粒子)からかなり遠くを通り過ぎるのなら、あいつも荷電粒子か、と少しだけ脇へそれ、遠方衝突(小角散乱)は単純なラザフォード公式で表せます。しかし、近づいて相手も自分と同じ顔と知ると複雑な思いが起き、ふつうの衝突では済まなくなります。点電荷同士のぶつかり合いぐらい昔ながらの論法で解決できると思えば大間違い、量子論にそそのかされ、ややこしい粒子関係? を反映して近接衝突(大角散乱)は異様になり、式 (1) より もっと面倒なモット公式

$$\frac{d\sigma_M(\theta)}{d\omega} = \left(\frac{C}{4E}\right)^2 [\sin^{-4}\Theta + \cos^{-4}\Theta + 2\gamma \sin^{-2}\Theta \cos^{-2}\Theta \cos\{(C/E)k \log(\tan \Theta)\}] \quad (2)$$

に従うようになります(第3節) [2-4]。もちろん、相互作用は C/r だけとしての話です。アルファ粒子同士の衝突では γ は 1、陽子同士なら $-1/2$ 、また k は相対運動の波数です。遠方衝突なら θ が小さく、大括弧内で第1項だけが他よりはるかに大きく、モットはラザフォードに近づきます。

金属核による散乱と何が違うのでしょうか。衝突相手が同じ顔ならどうだと言うのでしょうか。実は、そこにこそ、式(1)は再現できる古典論やボルン近似が説明できない量子論の物理が隠されているのです。その物理が今回のテーマです。

2 散乱振幅と断面積の関係を正す

束縛状態でも散乱状態でも、量子論では同種粒子は見分けられません。同種荷電粒子間の純粋クーロン散乱に限らず、内部構造をもつ同種イオン同士、同種中性粒子同士の衝突 $A + A$ でも、入射粒子と標的粒子の識別不能性を考慮した同種粒子衝突論が必要です。ただ、同じ原子同士でも量子状態が違えば区別でき、異種粒子と見なせます。衝突異種粒子同士が同種構成粒子を含めばまた別の配慮が必要です(第5節)。

同種2粒子(1, 2)の重心上で眺めると、両者が反対方向から対称に近づき、衝突後は反対方向に対称に離れて行きます。空間座標の波動関数 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ とスピン波動関数 $\chi^S(1, 2)$ の積である全衝突波動関数は、同種ボーズ粒子同士なら互いの交換に対称、不変です。同種フェルミ粒子同士なら反対称で、全体の符号だけ変えます。

二つの粒子を交換すれば相対距離ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (x, y, z) = (r, \theta, \phi)$ は逆向きになり、 $-\mathbf{r} = (-x, -y, -z) = (r, \pi - \theta, \phi + \pi)$ となりますから、 $\chi^S(1, 2)$ の対称性に応じ、 $\psi(\mathbf{r})$ は反転 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ に対称か反対称かどちらかです。ところが、常識的な弾性衝突波動関数の漸近形

$$\varphi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + f(\theta, \phi) e^{ikr/r} \quad (3)$$

は対称でも反対称でもありません。こんな漸近形では同種粒子間衝突など表せません。「常識」の前提条件を吟味する必要性の再登場です。

同種粒子を交換してもハミルトニアン $H(\mathbf{r})$ は変わらず、 $H(-\mathbf{r}) = H(\mathbf{r})$ です。 $\varphi(\mathbf{r})$ がすべての $\mathbf{r}$ で $H(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \mathcal{E}\varphi(\mathbf{r})$ を満たすなら $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ としても満たしますから $H(-\mathbf{r})\varphi(-\mathbf{r}) = \mathcal{E}\varphi(-\mathbf{r})$ です。左辺が $H(\mathbf{r})\varphi(-\mathbf{r})$ に等しいので $\varphi(\mathbf{r})$ と $\varphi(-\mathbf{r})$ は共通のシュレーディンガー方程式を満たし、

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(\mathbf{r}) &= \varphi(\mathbf{r}) \pm \varphi(-\mathbf{r}) \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} \pm e^{-ikz} \\ &\quad + [f(\theta, \phi) \pm f(\pi - \theta, \phi + \pi)] e^{ikr/r} \end{aligned} \quad (4)$$

も同じシュレーディンガー方程式を満たします。また粒子の交換 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ に対し $\psi_+(\mathbf{r})$ は対称、 $\psi_-(\mathbf{r})$ は反対称で我々の望み通りです [2-7]。

式(4)の意味は、重心系で z 軸の正負方向から等しい振幅で同種粒子の二つの平面波が入射し(対称または反対称な定在波 $\cos kz$, $\sin kz$ とも言えます)、互いに相互作用し合うと、散乱球面波が2成分の重ね合わせの振幅をもって出て行くということです。第1の振幅を直接項、第2の振幅を反跳項と便宜上呼びましょう。それぞれの物理的な意味は図1のように示すことができます。以下、いちいち ϕ を書くのは煩わしいので、 ϕ 依存性がない場合を扱います。

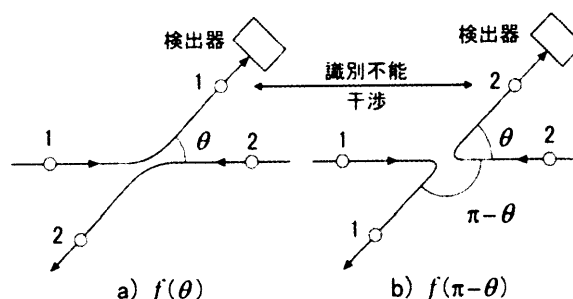


図1. 重心系での同種粒子衝突. a) 直接項. b) 反跳項. 古典同種粒子なら両方の微分断面積の和が検出器に捕えられる。原理的に区別できない量子論粒子なら、両散乱振幅の干渉が起こる。

仮に、古典論のように入射粒子1と標的粒子2の運動を別々に追うことが原理的に可能だとします。これを識別可能(distinguishable)と言います。すると、直接項(図1a)は入射粒子の角度 θ の散乱を表し、その方向に置いた検出器に捕えられます。反跳項(図1b)は入射粒子の角度 $\pi - \theta$ の散乱を表しますが、これは両粒子の重心系運動量ベクトルが逆向きなことから、跳ね返された(反跳を受けた)標的粒子が先ほどと同じ検出器に入ることを意味します。つまり、ある方向に出てくる散乱粒子と反跳標的粒子を共通の検出器で一緒に捕えることになり、断面積

$$\frac{d\sigma_{\text{dis}}(\theta)}{d\omega} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \quad (5)$$

が測定されるはずですが。

一方、式(4)によれば、原理的に両粒子を識別できない(indistinguishable)量子論では散乱振幅の段階で直接項と反跳項が重ね合わされる

ので2項の間に干渉が起こり、微分断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\pm}(\theta)}{d\omega} &= |f(\theta) \pm f(\pi-\theta)|^2 \\ &= \frac{d\sigma_{\text{dis}}(\theta)}{d\omega} \pm \frac{d\sigma_{\text{ind}}(\theta)}{d\omega},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{ind}}(\theta)}{d\omega} = f(\theta)f^*(\pi-\theta) + f^*(\theta)f(\pi-\theta) \quad (7)$$

と書けます。正にこの干渉断面積(7)が、通常の異種粒子衝突と違い、本稿の表題通り散乱振幅 $f(\theta)$ の位相に依存するのです。干渉効果には位相の重要な役割が付きものです。長距離力のために小角散乱の断面積が急に立ち上がる時、そこでは $|f(\theta)| \gg |f(\pi-\theta)|$ ですから、干渉項(7)は $|f(\theta)|^2$ に比べて小さいことが分かります。遠方衝突では識別不能効果が弱いということです。

式(5)~(7)には θ と $\pi-\theta$ が対等に入っています。 $\xi = \theta - \pi/2$ と置くと、すべての微分断面積表式に $\theta = \pi/2 + \xi$ と $\pi-\theta = \pi/2 - \xi$ が対等に入っているので ξ の偶関数で、角分布は重心系の $\theta = \pi/2$ の左右で対称です。ただ、これは識別不能性によるわけではありません。衝突粒子同士が「原理的に」識別できるとした $d\sigma_{\text{dis}}(\theta)/d\omega$ も $\theta = \pi/2$ の左右で対称です。単に「検出器」が両粒子を一緒に捕まえているだけの効果です。

同種粒子衝突の境界条件(4)には入射波が二つあります。衝突の数え方も異種粒子衝突と違い散乱粒子と反跳粒子の両方を数えるので、衝突回数に対し積分断面積は通常の倍になります。そこで、積分断面積からレート定数を求め、衝突頻度を出す際、最後に半減する必要があります。平均自由行程は2倍する必要があります[5]。これを避けるため、積分断面積を $0 \leq \theta \leq \pi/2$ だけの積分で定義する流儀もありますが[2, 8]、本稿では教科書[3-5]に従い、 $0 \leq \theta \leq \pi$ を採用します。

3 スピン0同士, 1/2 同士

干渉項(7)は現実の断面積にどう効くのでしょうか。以下、簡単のため、相互作用は球対称でスピンの依らないとします。まず、ヘリウム原子 $^4\text{He}(1s^2)$ やアルファ粒子などのようなスピン0の同種ボーズ粒子同士の弾性衝突を扱います。スピン0ならスピン波動関数 $\chi^S(1, 2)$ を考える必要もなく、またボーズ粒子なので2粒子の交換に対し $\psi(\mathbf{r})$ は対称ですから、式(6)で+符号を採用すべきで、 $d\sigma/d\omega = d\sigma_+/d\omega$ です。

スピン0の核同士の散乱なら[9]、付録のクーロン散乱振幅 $f_C(\theta)$ を式(6)に代入して+符号を採れば $\gamma=1$ としたモット公式(2)が得られます[2-4]。式(2)の大括弧内第1, 2項は「識別可能」微分断面積(5)の直接項, 反跳項に相当し、第3項が式(7)の「識別不能」項に相当します。

2粒子がスピン s をもてばその合成スピン S の波動関数 $\chi^S(1, 2)$ が関わります。まず、電子、陽子、ヘリウム原子同位体 $^3\text{He}(1s^2)$ やその原子核のような $s=1/2$ のフェルミ粒子系を扱います。

ヘリウム原子の電子スピン状態の例を思い出しましょう。2電子とも上向きスピンの波動関数 $\chi^S(1, 2) = \uparrow\uparrow$, 両方とも下向きスピンの $\downarrow\downarrow$, 逆向きスピンの $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$ は2電子の交換に対し対称な3重項 ($S=1$, オルソヘリウム) を成し、 $\chi^S(1, 2) = \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$ は反対称な1重項 ($S=0$, パラヘリウム) を成します。他のどんな $s=1/2$ の粒子2個でも合成スピン状態は同じです。

フェルミ粒子なので $\psi(\mathbf{r})\chi^S(1, 2)$ は互いの交換に対し反対称で、 $\chi^S(1, 2)$ とは逆に $\psi(\mathbf{r})$ は1重項では対称, 3重項では反対称です。1重項なら式(4)で ψ_+ , 式(6)で $d\sigma_+/d\omega$, 3重項なら ψ_- , $d\sigma_-/d\omega$ を採用すべきです[9] (次節表1参照)。

100%偏極した気体中では3重項散乱しか起きず、 $d\sigma/d\omega = d\sigma_-/d\omega$ です。スピン偏極がなければ1重項と3重項の実現確率(統計重率)はスピン多重度 $2S+1$ の比1:3なので、重み付き平均

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\sigma}(\theta)}{d\omega} &= \frac{1}{4} \frac{d\sigma_+(\theta)}{d\omega} + \frac{3}{4} \frac{d\sigma_-(\theta)}{d\omega} \\ &= \frac{d\sigma_{\text{dis}}(\theta)}{d\omega} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{\text{ind}}(\theta)}{d\omega}\end{aligned}\quad (8)$$

が得られます。第二の等号の右边を式(6)から出すとき、1重項と3重項の散乱振幅 $f(\theta)$ が等しいとしました。これは一般には正しくありませんが、第3節冒頭の仮定のもとに成り立ちます。

式(8)は $s=0$ のときに比べ、干渉項の係数に $-1/2$ が掛かります。クーロン散乱なら $\gamma = -1/2$ としたモット断面積(2)になります。

$s=0$ のボーズ粒子と $s=1/2$ のフェルミ粒子につき、式(2)での識別不能効果 $\gamma d\sigma_{\text{ind}}(\theta)/d\omega$ と識別可能断面積 $d\sigma_{\text{dis}}(\theta)/d\omega$ の比を図2に示します。式(2)の $(C/E)k$ が干渉効果による顕著な振動の周期を決めますが、図では ^{12}C 原子核 ($s=0$) 同士の5 MeVでの衝突を想定した $(C/E)k$ を使っ

ています。質量が ^{12}C の c 倍、電荷 ze の粒子なら $E = 5c(z/6)^4 \text{ MeV}$ で同じ曲線になります。

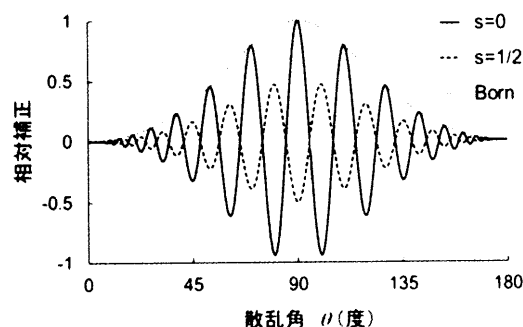


図2. クーロン散乱での同種粒子効果. モット断面(2)中の識別可能断面に対する相対的識別不能補正 $\gamma[d\sigma_{\text{ind}}(\theta)/d\omega]/[d\sigma_{\text{dis}}(\theta)/d\omega]$. 用いたパラメータは $^{12}\text{C}(s=0)$ 核同士の5 MeVでの衝突に相当. $s=0$ につきこの効果をボルン近似のクーロン散乱振幅で計算したものも示す.

正しいクーロン散乱振幅の替りにボルン近似(付録)を式(6)で使っても、その絶対値は正しいので $d\sigma_{\text{dis}}(\theta)/d\omega$ は再現されます。しかし、本来 θ に依存する位相が無いため、式(2)の干渉項で $\cos\{(C/E)k \log(\tan \Theta)\}$ が1に置き変わり、図2でも明らかですが、角分布は振動の無い滑らかな曲線になってしまいます。これが第1節で触れたクーロン散乱振幅の位相の重要性です。

4 一般のスピン s

スピン s の値に拘わらず、完全な偏極気体中の2体衝突ではスピン波動関数 $\chi^S(1,2)$ は必ず対称ですから、ボーズ気体なら $d\sigma/d\omega = d\sigma_+/d\omega$ 、フェルミ気体なら $d\sigma/d\omega = d\sigma_-/d\omega$ です(表1)。

スピン偏極がなければ $2s+1$ 個の合成スピン状態 $S=0,1,\dots,2s$ を対称状態と反対称状態に分け、それぞれの統計重率を使えば平均断面

$$\frac{d\bar{\sigma}(\theta)}{d\omega} = \frac{s+1}{2s+1} \frac{d\sigma_{\pm}(\theta)}{d\omega} + \frac{s}{2s+1} \frac{d\sigma_{\mp}(\theta)}{d\omega} \quad (9)$$

を得ます。複号は上がボーズ粒子用で、対称(反対称)な $\chi^S(1,2)$ に対称(反対称)な $\psi(\mathbf{r})$ を対応させたもの、下がフェルミ粒子用でその逆に対応させたものです(表1)。式(6)を使い、 $2s$ が偶数ならボーズ粒子、奇数ならフェルミ粒子であることと第3節冒頭の仮定によりまとめれば

$$\frac{d\bar{\sigma}(\theta)}{d\omega} = \frac{d\sigma_{\text{dis}}(\theta)}{d\omega} + \gamma \frac{d\sigma_{\text{ind}}(\theta)}{d\omega}, \quad (10)$$

$$\gamma = (-1)^{2s}/(2s+1) \quad (11)$$

となります。クーロン散乱振幅を式(5),(7)に代入して式(10)に使うとモット公式(2)が出ます。

式(9)の係数の計算は等核2原子分子の核スピン状態を数えるのと同じです。この場合も核同士の交換で核間距離ベクトル $\mathbf{r}$ は反転します。分子の回転角運動量子数 j が偶数の状態はこの反転に対し対称、奇数なら反対称なので、ボーズ粒子核では合成核スピン波動関数が対称(オルソ)なら j は偶数、反対称(パラ)なら j は奇数、フェルミ粒子核ならその逆です(表1)。オルソ-パラ統計重率比は核スピン I で $I+1:I$ と書け、式(9)の係数比 $s+1:s$ と同じです。

偶数(奇数)角運動量状態が対称(反対称)なので、対称な $f(\theta)+f(\pi-\theta)$ は偶数部分波 l だけ、反対称な $f(\theta)-f(\pi-\theta)$ は奇数部分波 l だけで展開されます(表1)。低エネルギー衝突では s 波、つまり対称な $\psi_+(\mathbf{r})$ だけ散乱が起こり、 $d\sigma_-/d\omega \simeq 0$ なので、同種ボーズ粒子なら対称スピン関数 $\chi^S(1,2)$ 、同種フェルミ粒子なら反対称スピンの衝突だけ起こります。例えば、陽子同士のスピン依存3重項相互作用は低エネルギー衝突では断面が小さく、調べられません[4]。

小さい s ほど式(11)の γ が大きく、干渉効果は強いですが $f(\theta)$ と $f(\pi-\theta)$ の関係にも依ります。角分布の対称中心 $\pi/2$ では $f(\theta)=f(\pi-\theta)$ で

$$\frac{d\sigma_{\text{ind}}(\pi/2)}{d\omega} = \frac{d\sigma_{\text{dis}}(\pi/2)}{d\omega} = 2|f(\pi/2)|^2 \quad (12)$$

となります。識別可能断面 $d\sigma_{\text{dis}}(\pi/2)/d\omega$ は散乱粒子、反跳粒子を一緒に測るので通常の断面の2倍で、 $s=0$ ならさらに識別不能効果による干渉項がこれを倍増、 $s=1/2$ の $d\bar{\sigma}/d\omega$ なら半減させて $|f(\pi/2)|^2$ に戻します。小さな s では重心系の直角方向の干渉効果は強いと言えます。

表1. 同種ボーズ粒子, 同種フェルミ粒子の性質

	ボーズ粒子		フェルミ粒子	
$2s$	偶数		奇数	
$\chi^S(1,2)$	対称	反対称	対称	反対称
統計重率	$s+1 : s$		$s+1 : s$	
$\psi(\mathbf{r})$	対称	反対称	反対称	対称
l, j	偶数	奇数	奇数	偶数
$d\sigma/d\omega$	$d\sigma_+/d\omega$	$d\sigma_-/d\omega$	$d\sigma_-/d\omega$	$d\sigma_+/d\omega$

低エネルギーでは s 波だけが効く等方散乱になり、 $\pi/2$ でのこの関係がどの θ でも、また積分断面積 σ でも成立します。干渉項も等方的です。 $E \rightarrow 0$ では $|f(\theta)|^2$ の全立体角に亘る積分は散乱長 A で $4\pi A^2$ と表せるので、 $\sigma_+ = 16\pi A^2$ (σ の定義が半分なら $8\pi A^2$; 第2節最後)、 $\sigma_- = 0$ です。

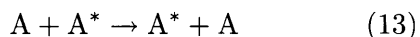
標的が始め静止している実験室系では同種粒子弾性散乱の散乱角 θ_0 は重心系の θ の $1/2$ なので、 $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ です。単位立体角当りの実験室系微分断面積 $d\sigma(\theta_0)/d\omega_0$ は一般式から重心系の $d\sigma(\theta)/d\omega$ の $4 \cos \theta_0$ 倍と計算され、 $\theta_0 = \pi/4$ の左右に非対称です。しかし、単位散乱角当りの微分断面積 $d\sigma(\theta_0)/d\theta_0 = 2\pi \sin \theta_0 [d\sigma(\theta_0)/d\omega_0] = 4\pi \sin(2\theta_0) [d\sigma(\theta)/d\omega]$ なら明らかに対称です。

$\text{He}(1s^2)$ 同士の弾性散乱で同位体を $^4\text{He} + ^4\text{He}$, $^3\text{He} + ^3\text{He}$ と選べばボーズ粒子同士、フェルミ粒子同士で符号が逆の干渉効果が角分布に見え、また $^4\text{He} + ^3\text{He}$ とすれば異種粒子衝突で干渉が消えるはずですが、ただ、他の効果に埋もれずにこれがはっきり見える条件を整えて現実に測るのは難しいようです。積分断面積のエネルギー依存性には干渉効果が確認されています [10]。

5 同種粒子：古くて新しい話

1930年代に確立されたこの同種粒子衝突論は、原子衝突よりもむしろ原子核衝突分野で多用されました [4]。ところが最近、ボーズ-アインシュタイン凝縮に関連して同種原子衝突の話題が増えてきました [11]。そこで興味があるのは低温衝突なので等方散乱で、角分布に干渉振動が現れるわけではなく、その意味ではそう楽しくもありません。しかし、同種粒子3体衝突や、同種フェルミ粒子の2量体であるボーズ粒子二つの衝突など、より複雑な系が現実の問題となります。

基底状態の原子 A と励起 A^* 原子の衝突で



と励起エネルギーがそっくり衝突相手に移り、同じ励起状態ができる過程を共鳴(または対称)励起移動過程と言います。同様に



を共鳴または対称電荷移行(移動)過程と呼びます。同種粒子衝突 $A+A$ では一つの過程の終チャンネルで散乱粒子と反跳粒子が識別不能でしたが、異種粒子衝突過程 (13), (14) では反応した

か弾性散乱かを区別できません。これらの過程でも同種核を二つ含み、その交換に対する核スピン波動関数の対称性と、核間距離ベクトルの反転に対する核間相対運動と電子運動の波動関数の対称性を扱う必要があります。また、電子-原子衝突では入射電子と原子内電子との識別不能性を衝突系全体の電子スピン状態に応じて適切に考慮しなければなりません。これらにつき、詳しくは教科書 [4, 12] 等をご覧ください。

付録：クーロン散乱振幅

クーロン散乱振幅 f_C とそのボルン近似 f_C^B は

$$f_C(\theta) = f_C^B(\theta) \exp\{i\Phi(\theta)\}, \quad (\text{A.1})$$

$$f_C^B(\theta) = -(C/4E) \sin^{-2} \Theta, \quad (\text{A.2})$$

$$\Phi(\theta) = -k(C/E) \log(\sin \Theta) + \eta \quad (\text{A.3})$$

と書けます [3-7]。 $\Theta = \theta/2$, k は波数, η は C/v (v は初期相対速度) により決まるある定数です。

- [1] 市川行和, しょうとつ, 第3巻第1号 (2006). ミスプリ: 式 (1) の括弧付き係数は2乗すべき。
- [2] 砂川重信, 散乱の量子論 (岩波書店, 1977).
- [3] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, 2nd ed. (Pearson Education, Harlow, 2003).
- [4] N. F. Mott and H. S. W. Massey, *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford Univ. Press, 1965) [高柳和夫, 市川行和, 島村 勲 訳「衝突の理論」上 II (吉岡書店, 1975)].
- [5] 高柳和夫, 電子・原子・分子の衝突 (培風館, 1972, 改訂版 1996).
- [6] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. (McGraw-Hill, N.Y., 1968) [井上 健 訳「量子力学」(吉岡書店, 1970)].
- [7] 小谷正雄, 梅沢博臣 編, 大学演習 量子力学 (裳華房, 1959), 第8章 (江沢洋).
- [8] ただ, [2] では入射流束まで他の文献の半分にしてある。そうしない理由は [4, 6, 7] 等に詳しい。
- [9] 荷電粒子同士の衝突では入射波は平面波でなく、少し変形されたいわゆるクーロン波になる。
- [10] R. Feltgen et al., *J. Chem. Phys.* **76**, 2360 (1982).
- [11] 例えば, E. Braaten and H.-W. Hammer, *Phys. Rep.* **428**, 259 (2006).
- [12] 高柳和夫, 原子衝突 (朝倉書店, 2007).