

## シリーズ

# 衝突論ノート

## X. 衝突論クイズ

### ー じっくり考える入門編 ー

島村 勲

理化学研究所原子物理研究室

shimamura@ribf.riken.jp

平成 24 年 6 月 15 日 原稿受付

いままで衝突論や量子論の基礎事項の中から毎回何らかのテーマを選び、シニアな研究者でもうっかり見過ごしたり誤解するかも知れないと思われることも含め、私なりのタッチで解説してきました。今回は少し趣向を変え、衝突論入門編の知識と考察を再確認するために、雑多な小項目を集めてみました。

まず、いくつかの主張を述べます。その文章が完全に正しいか、部分的に誤りを含むか、含むなら何が悪いのか、じっくりとお考えください。正解ならびにそれに関連する補足を、以下の主張と共通番号の各節で解説いたします。

1. 中心力ポテンシャル  $V(r)$  による弾性散乱のエネルギーを下げていくと  $s$  波だけで断面積が殆ど決まるようになり、角分布は必ずほぼ球対称になる。例えば、 $s$  波の位相のずれが  $20^\circ$ 、 $p$  波は  $2^\circ$  で  $d$  波以上が無視できれば、事実上、 $s$  波だけで断面積が決まり、ほぼ等方散乱になる。

2. 静止ヘリウム原子にキセノンイオンをぶつけて実験室系微分断面積  $q(\theta_L)$  を決め、それから運動量移行断面積  $\int (1 - \cos \theta_L) q(\theta_L) d\omega_L$  を求めるとき  $\theta_L \simeq 180^\circ$  の  $q(\theta_L)$  に最も重みがかかる。

3. 静止水素原子  $H(1s)$  に運動エネルギー  $15\text{eV}$  の  $\alpha$  粒子をぶつければある確率で電離できる。

4. 原子-2原子分子反応  $A+BC$  で、3原子が一直線上を進む共線衝突  $A \longrightarrow B-C$  と、原子  $A$  が分子軸に直角に  $BC$  の中央めがけて入射する T 字型衝突の断面積を比較すると反応の起こり易さへの立体効果を研究できる。

5. どんなシュレーディンガー方程式の解も、波動関数は滑らかであるという物理的要請のもとに解かなければならない。

6. ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  による質量  $m$  の粒子の散乱を表すシュレーディンガー方程式

$$[-(\hbar^2/2m)\Delta + V(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

の解で  $V(\mathbf{r})$  が無視できるくらい遠方で漸近形  $\psi \sim C[e^{ikz} + f(\theta)e^{ikr}/r]$  をもつものが表す系の粒子数は係数  $C$  で調節できる ( $k$  は波数)。

7. 入射平面波  $e^{ikz}$  も散乱球面波  $f(\theta)e^{ikr}/r$  もシュレーディンガー方程式(1)で  $V(\mathbf{r})$  をゼロとし、 $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  とした自由運動方程式の解である。

8. クーロンポテンシャルによる粒子の散乱では入射波はポテンシャルの影響を受けずに前方に進む波であるが、散乱球面波はいくら遠方でも長距離相互作用の影響を受けるため、その位相が  $kr$  だけ ( $e^{ikr}$ ) では済まなくなる。

9. 散乱角ゼロでの弾性散乱微分断面積は、ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  があるときの角度ゼロ方向のビーム強度から  $V(\mathbf{r})$  がないときの強度を差し引けば、思考実験として原理的には決められる。

10. ある衝突実験で標的のほぼ縮退している準位  $A_1, A_2$  (等量分布しているとする) からほぼ縮退している準位  $B_1, B_2, B_3$  に近縮退準位を区別できずに励起して断面積  $\sigma(A \rightarrow B)$  を測ったとする。その結果を理論断面積  $\sigma(A_i \rightarrow B_j)$  と比べるには、後者を  $i=1, 2, j=1, 2, 3$  につき加え合わせる必要がある。

## 1 弱い散乱は無視してよいのか？

確かに多くの場合、低いエネルギー  $E$  では  $s$  波以外の散乱は弱くなり、殆ど球対称な角分布を示します。ただ、「必ず」球対称と言われれば、ブー、×です。重要な例外を忘れては困ります。大きな  $r$  で  $V(r)$  がクーロン型 ( $\propto r^{-1}$ ) や双極子型 ( $\propto r^{-2}$ ) ならいくら低エネルギーでも微分断面積は前方発散し [1]、決して球対称になりません。

古典論の衝突パラメータ (impact parameter, 衝突径数)  $b$  と量子論の角運動量子数  $l$  は波数  $k$  を通じ、 $l+1/2 \simeq kb$  と対応します (文献 [1] 付録 A)。  $V(r)$  の半径が  $a$  ならば  $b < a$  のときにだけ古典散乱が起こるので、量子論で散乱が起こる部分波は  $l+1/2 \simeq ka$  までと推測されます。

量子論では古典転回点 (最近接距離)  $r_0$  が  $a$  より大きな部分波はポテンシャル領域に殆ど入れず、散乱されません。  $r > a$  には遠心力ポテンシャル  $V_c(r) \simeq (\hbar^2/2m)(l+1/2)^2/r^2$  しか無く、最近接条件は  $V_c(r_0) = E = (\hbar^2/2m)k^2$ 、つまり  $l+1/2 \simeq kr_0$  です。散乱条件  $r_0 < a$  によれば散乱部分波は推測通り  $l+1/2 \simeq ka$  までで (遠心力のない  $s$  波は当然ポテンシャル領域に入れます)、低エネルギーでは低い部分波しか散乱されないと分かります。

しかし、この議論にはポテンシャルが何らかの有効半径  $a$  をもつという前提条件が必須です。あまりに長距離型のポテンシャルでは有効な  $a$  の値が決められず、低エネルギーでも遠方衝突、高い部分波の散乱が無視できません。

なお、ある種の同種粒子同士の衝突では対称性から  $s$  波衝突・等方散乱が禁止されます [2]。

実は、ふつうのポテンシャル散乱でも要注意です。  $s$  波の位相のずれが  $\delta_0 = 20^\circ$ 、  $p$  波がわずか  $\delta_1 = 2^\circ$ 、  $d$  波以上は無視できる問題の例を扱います。積分断面積  $\sigma$  は  $s$  波成分と  $p$  波成分の和で、 $\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1 = 0.117 + 0.0037$  に比例します。  $p$  波による第2項は全体の3%にしか過ぎません。確かに  $s$  波だけ考えれば十分です。

微分断面積はどうでしょう。  $s$  波散乱振幅  $f_0$  は定数、  $p$  波散乱振幅  $f_1(\theta)$  は  $\cos \theta$  に比例し、

$$\begin{aligned} d\sigma/d\omega &= |f_0 + f_1(\theta)|^2 \\ &\propto \sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) \cos \theta \\ &\quad + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2)$$

と書けます。定数の第1項は  $s$  波散乱、 $\cos^2 \theta$  に

比例する第3項は  $p$  波散乱によるもの、 $\cos \theta$  に比例する第2項が  $s$  波と  $p$  波の干渉項です。

図1に  $s$  波の項を1とした相対微分断面積として  $s$  波成分 もちろんどの角度でも1)、  $p$  波成分、そして干渉項も含めた全体を示してあります。  $p$  波成分は相対的に確かにだいぶ小さいですが、干渉効果の何と大きいことか！ほんのわずかな  $p$  波散乱が  $s$  波の等方分布をこんなにも変えてしまうのです。マイノリティ、侮るべからずです。

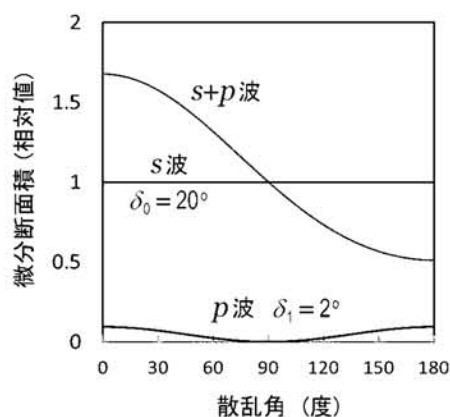


図1.  $s$  波の位相のずれが  $\delta_0 = 20^\circ$ 、  $p$  波が  $\delta_1 = 2^\circ$ 、  $d$  波以上がゼロのときの微分断面積の球対称  $s$  波微分断面積に対する相対値。  $s$  波のみ、  $p$  波のみ、両方入れたときの3種を示す。

強い共鳴散乱が起こるとき、それが  $s$  波共鳴ならほぼ等方的角分布を示します。  $p$  波共鳴なら  $\cos^2 \theta$  に比例して  $\sim 90^\circ$  方向にディップをもつ左右対称に近い角分布、  $d$  波共鳴なら  $(3 \cos^2 \theta - 1)^2$  に比例して  $\sim (90 \pm 35)^\circ$  方向に2つのディップをもつ左右対称に近い角分布になります。これを利用して、測定された共鳴微分断面積の形からしばしば共鳴の対称性を推論します。しかし、非共鳴成分との干渉で角分布の形がかなり変わるかも知れず、十分注意を払う必要があります。

## 2 あり得ない散乱角

主張2も、ブー、です。イオン衝突の研究室の人なら問題ないでしょうが、電子衝突の研究室ではピンポンピンポンと叫ぶ学生さんもあるかも知れません。これは実験室系の散乱角  $\theta_L$  と重心系の散乱角  $\theta$  の関係、弾性散乱なら [3-5]

$$\tan \theta_L = \sin \theta / (\gamma^{-1} + \cos \theta), \quad \gamma = m_T / m_P \quad (3)$$

の問題です。ここで入射粒子、標的の質量を  $m_P$ 、 $m_T$  としました。  $m_P > m_T$  なら重心系の  $\theta$  がゼ

口から  $\cos^{-1}(-\gamma)$  まで増えると実験室系では  $\theta_L$  がゼロから  $\theta_L^{\max} = \sin^{-1}\gamma$  まで増えますが、 $\theta$  がさらに  $180^\circ$  まで増えると  $\theta_L$  は逆に  $\theta_L^{\max}$  からゼロまで減っていきます。この最大散乱角  $\theta_L^{\max}$  では重心系微分断面積から実験室系に変換する係数が発散し、実験室系微分断面積が無限大になります。ヘリウムとキセノンの質量から、主張2の問題では  $\theta_L^{\max}$  は  $4/131$  ラジアン  $\simeq 1.7^\circ$  で、実験室系ではそれ以上の角度で散乱されることはありませんから、主張2はもちろん×です。

実は、移動管法で測られる電場方向のイオン移動度は重心系での運動量移行断面積で決まります[6]。では、重心系でなら  $180^\circ$  近辺で最も重みが付くのでしょうか。ちょっと待ってください。重みは  $(1 - \cos\theta)d\omega = (1 - \cos\theta)\sin\theta d\theta d\phi$  です。これが極大値を取るのは  $\cos\theta = -1/2$ 、つまり ( $180^\circ$  でなく)  $\theta = 120^\circ$  で最も重みが付きます。

電子衝突なら実験室系と重心系は殆ど同じで、実験室系の運動量移行断面積でも散乱角  $120^\circ$  付近での微分断面積に最も重みがかかります。

### 3 水素原子は何eVで電離できる？

主張3も、電子衝突系の学生さんだとうっかりするかも知れませんが、正解は×ですね。相対運動エネルギーは入射粒子や標的の内部状態へ移せますが、孤立衝突系の重心運動エネルギーは不変です。静止している質量  $m_T$  の標的に質量  $m_P$  の粒子が運動エネルギー  $E_L$  で入射するとき、相対運動のエネルギー  $E$  は  $E_L m_T / (m_P + m_T)$  となります[4]。これが水素原子  $H(1s)$  の電離エネルギー  $13.6\text{eV}$  を上回るような  $E_L$  が必要です。 $\alpha$  粒子と水素原子なら  $m_T/m_P$  は  $1/4$  ですから、 $5 \times 13.6\text{eV} = 68\text{eV}$  以上の  $\alpha$  粒子だけが静止水素原子  $H(1s)$  を電離できるのです。

$6.8\text{eV}$  の束縛エネルギーをもつ静止ポジトロニウム(電子-陽電子系)を壊すには、 $^{238}\text{U}$  イオンなら  $\sim 1.5\text{MeV}$  ものエネルギーを要します。

### 4 共線衝突に現実的意味があるか？

主張4を○と答えてしまった人はいませんか？共線衝突もT字型衝突も、衝突パラメータ  $b$  がゼロのときにしか起こりませんよ。一つの  $b$  でしか起こらない過程に断面積は定義できません。

反応確率  $P(b=0)$  なら定義できます。では共線衝突とT字型衝突の  $P(b=0)$  を比べれば反応速度への立体効果が分かるでしょうか。これらは単純で頻繁に議論され、まるで現実性のある衝突モデルのような錯覚を与えがちです。でも、まず注意すべきは、連続変数の特定の一つの値  $b=0$  が実現される確率はゼロということです。

さらに、分子ABが軸対称なら共線からずれた衝突  $b>0$  にも反応確率  $P(b)$  が考えられます。このとき、幅  $b \sim b + \delta b$  の間の衝突は断面積  $\sigma$  のうち  $\delta\sigma = 2\pi b P(b) \delta b$  だけを生みます[1]。この式から、 $b$  が小さな、共線に近い衝突は現実の現象の断面積には殆ど無関係と分かります。現実の現象を支配しているのは共線衝突の反応確率  $P(b=0)$  ではなく、共線からずれていくときに  $bP(b)$  がゼロからだんだん増えていく有様なのです。

一方、垂直衝突は軸対称ではないので議論が少し変わりますが、ここではこれ以上述べません。

### 5 波動関数は必ず滑らかか？

主張5は散乱理論というより量子力学入門で、答は「ブー」です。自然は滑らかで、それを常に物理的に要請すべきだという信仰を確かによく耳にします。でも、波動関数が滑らかである、つまり値も勾配もあらゆる場所で連続なのは本当はどこから来るのか、振り返ってみましょう。

波動関数が滑らかでない一つの例が剛体球散乱です。 $r < a$  で  $\infty$ 、 $r > a$  でゼロというポテンシャルで、例えば  $s$  波の波動関数は  $r < a$  でベタッとゼロ、 $r > a$  では  $\sin k(r-a)$  に比例します。 $r=a$  で連続ではありますが、カクンと曲がります。

剛体壁に囲まれた領域  $-a < x < a$  に束縛された波動関数  $\psi(x)$  は  $x < -a$ 、 $a < x$  でゼロで、 $x = \pm a$  での  $\psi(x)$  の連続性から  $\psi(\pm a) = 0$  が導けます。そこで全領域  $-\infty < x < \infty$  での問題が  $\psi(\pm a) = 0$  を境界条件とする有限領域  $-a \leq x \leq a$  での境界値問題に帰着します[7]。全領域の  $\psi(x)$  は  $x = \pm a$  で滑らかではなくカクンと曲がります。これをまず有限壁の問題として  $-\infty < x < \infty$  で解いてから壁を無限に高くしても同じことです。

理論屋がときに使うデルタ関数ポテンシャル  $V(r) = C\delta(r-r_0)$  のもとでは、 $r=r_0$  で  $\psi'(r)$  が突然ジャンプし、 $\psi(r)$  は滑らかではありません。

簡単な1次元シュレーディンガー方程式  $-(\hbar^2/2m)\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$  を例に取ります。仮に連続な  $\psi(x)$  に滑らかでない点  $x$  があれば、そこで1階微分  $\psi'(x)$  が跳び、2階微分  $\psi''(x)$  は有限な定数値に決まらず、 $V(x)$  が有限 ( $|V(x)| < \infty$ ) ならシュレーディンガー方程式は満たされません。逆に、 $V(x)$  がどこでも有限ならある点  $x_0$  で  $\psi(x_0)$  と  $\psi'(x_0)$  から出発してシュレーディンガー方程式を全  $x$  領域に亘り連続的に積分できます。 $\psi(x)$  の滑らかさは物理的要請ではなく、 $V(x)$  の有限性を条件にシュレーディンガー方程式が保証する数学的帰結なのです。

しかし、上に挙げた具体的な反例ではいずれもどこかでポテンシャルが無限大になり、数学的帰結は滑らかでない波動関数です。そんな変なポテンシャル、自然界にはないですよ、自然は滑らかです、と言われるかも知れません。しかし、物理にはモデルという人間の創造物が付きものです。それにより自然の理解が進みます。そのモデルが例え滑らかでなくても、それを理論的に矛盾なく取り扱いさえすれば問題ありません。

入門書[7]では、§6.3で剛体壁に囲まれた波動関数を求めるときは壁で連続との条件だけを使っています。ところが、§7.2で井戸型ポテンシャルを扱うときには理由も述べずに「解が領域の境界で滑らかにつながるようにする」と宣言しています。うーん、ちょっと説明不足なような…。

## 6 何粒子系を表すか？

「水素原子にはいくつ電子があるんですか？」

ある私大での原子物理の講義で1電子系の章のもとに話していたとき、こう聞かれました。

「だって、水素の波動関数は電子があつちにもこっちにもいることを表しているんですよ？」

私は嬉しくなりました。言われたことを盲目的に鵜呑みにせず、自分なりに頭の中で考え、生じた疑問を直ちにぶつけてきてくれたからです。

「電子はあつちにもある確率で見出し得るし、こっちにもある確率で見出し得て、その確率を全部寄せ集めると電子1個分になるんですよ。」

「では水素原子の波動関数に大きな係数をかければ、たくさん電子がある水素原子になりますか？」とさらに聞かれればもっと嬉しかったのですが…。多粒子系の勉強前になら、係数で系

の電子数を調節できると思うかも知れません。実際には、例えば2電子系は両電子の座標  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  (とスピン座標) により表す必要がありますね。

もう、主張6が「ブー」なのは明白ですね。3次元座標1個しか含まないシュレーディンガー方程式(1)は1粒子系しか表せませんし、1粒子波動関数の係数を変えようが、やはり1粒子波動関数です。係数  $C$  によってこの波動関数が表すフラックスは変えられます。でも、ある定常流全体の粒子数などという概念はありませんね。

## 7 自由運動と散乱球面波

$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  ですから、シュレーディンガー方程式(1)で  $V(\mathbf{r})$  をゼロとし、 $E = \hbar^2 k^2/2m$  とした自由粒子の波動方程式を平面波  $e^{ikz}$  が満たすことは簡単な計算で示せます。

極座標表示によれば、 $\Delta = r^{-2}\partial(r^2\partial/\partial r)/\partial r - \hat{L}^2/(\hbar^2 r^2)$  と書けます。角運動量演算子  $\hat{L}$  を含む第2項は遠心力ポテンシャルを生む角運動エネルギー演算子です。 $r$  が大きい遠方ではこの項が無視でき、自由粒子の動径運動は  $s$  波自由運動と同じく確かに独立解  $e^{\pm ikr}/r$  をもちます。しかし、小さな  $r$  ではこの項が無視できず、球面波  $f(\theta)e^{ikr}/r$  は自由運動方程式を満たしません。主張7は半分間違いです。

## 8 全空間を覆うクーロン相互作用

主張8は、後半は○ですが、前半が×です。クーロン散乱は得体の知れない変わり者です。

いま、宇宙にたった一人、正電荷の陽子さんがいるとします。そこから何億光年も先から突然、彼女めがけて自由電子の平行ビームが飛び出します。でも、飛び出た瞬間、彼女の色香に惑い、自由を失います。いかに離れようとも、この世に陽子さんがいる限り、電荷をもつ何者のビームも平面波でいようなど所詮かなわぬ夢なのです。

クーロン散乱の説明にはいつも難しい特殊関数が使われ、うんざりするでしょう。ここでは、事情を初等的に説明するため、簡単な関数

$$u(r) = \sin f(r) = \sin[kr - (\alpha/2k)\log kr + \eta] \quad (4)$$

を考えます。 $\alpha, \eta$  は定数です。易しい微分演算で  $u''(r) = f'' \cos f - (f')^2 \sin f$ 、また、大きな  $r$  ではこの右辺が  $-[k^2 - \alpha/r + \text{高次項}]u(r)$  と書け

ることが示せます。つまり、 $u(r)$ は大きな  $r$ では

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\alpha}{r} + \text{高次項} \right] u(r) = 0 \quad (5)$$

を満たします。これは大きな  $r$ でポテンシャル  $V(r)$ がクーロン型  $\sim (\hbar^2/2m)\alpha/r$  を取るときの動径シュレーディンガー方程式を表します。

2階微分方程式ですから、もう一つ独立解があります。 $\eta$ は自由に選べますから、例えば位相を  $\pi/2$ だけずらし、 $\cos f(r)$ を独立解として採用できます。ですから、いずれにせよ、式(5)の解は大きな  $r$ では必ず式(4)の形に書けます。

式(4)、(5)が意味することは、 $\alpha$ が完全にゼロでない限り、つまりポテンシャルの漸近形がクーロン型のとき動径波動関数の漸近形の位相に  $\alpha$ に比例する  $r$ の対数項が含まれること、いかに遠くへ行こうとも波動関数の位相にクーロン場の影響が必ず残ってしまうことです。入射波も散乱波も、部分波分解すれば動径関数へのこの影響が宇宙の彼方まで消えないと分かります。

厳密な理論によればクーロン散乱波動関数は

$$\exp[ikz + i(\alpha/2k) \log\{2kr \sin^2(\theta/2)\}] + f_c(\theta) \exp[ikr - i(\alpha/2k) \log 2kr]/r \quad (6)$$

という漸近形を取ります[4, 8]。上の部分波の議論で分かったとおり、事実、入射波(第1項)でも散乱球面波(第2項)でもその位相にいかにも遠方でも消えないクーロン場  $\alpha$ の影響が明白です。しかも、入射波の進行方向が  $z$ 方向だけでなく、クーロン場により曲げられた波も含んでいます。

ふつうの散乱理論では、自由運動を表す入射波に比べて新たにポテンシャルにより作られた漸近波動関数が散乱球面波です。ところがクーロン散乱では、ポテンシャル効果の一部が入射波の位相にも押し込められています。空間内どこでも消えることのない効果なので、入射波といえども免れ得ません。ただ、漸近形(6)の2項とも、位相に現れる対数項がフラックスに及ぼす影響は  $r$ に反比例して遠方で弱まり、そのため、 $|f_c(\theta)|^2$ を微分断面積と考えて構わないのです。

## 9 測れないゼロ度弾性散乱断面積

主張9が誤りであることはすでに本シリーズで解説しましたが[1, 9]、ここで再確認しておきます。弾性散乱微分断面積は散乱振幅  $f(\theta)$ によ

り  $|f(\theta)|^2$ と表せ、漸近領域にある大きな球面から出ていく散乱球面波の全フラックス  $F_{sc}$ の成分から決まります。 $F_{sc}$ を前方(ゼロ度近辺)散乱フラックス  $F_{sc}^{(0)}$ とそれ以外の総フラックス  $F_{sc}^{(>0)}$ に別けます： $F_{sc} = F_{sc}^{(0)} + F_{sc}^{(>0)}$ 。前方には入射平面波と前方散乱球面波が出てきます。その重ね合わせが表すフラックスは  $F^{(0)} = F_{inc} + F_{sc}^{(0)} + F_{int}$ と3成分から成ります。第1項は入射波だけ、第2項は散乱波だけによるフラックス、最後の項が二つの波の干渉によるフラックスです。

主張9は前方散乱断面積を決めるフラックス  $F_{sc}^{(0)}$ が  $F^{(0)} - F_{inc}$ に等しい、つまり  $F_{int} = 0$ という主張です。しかし、大きな球面から出ていくフラックスの保存則により、平面波フラックス  $F_{inc}$ を除くすべてのフラックスの和はゼロで、 $0 = F^{(0)} + F_{sc}^{(>0)} - F_{inc} = F_{sc} + F_{int}$ です。干渉項  $F_{int}$ は積分断面積を決める散乱総フラックス  $F_{sc}$ に負号を付けたものであり、散乱が起こる限り必ず負で、ゼロにはならず、主張9は誤りです。

上記フラックス保存則の最初の等号  $0 = \dots$ は  $F^{(0)} = F_{inc} - F_{sc}^{(>0)}$ を意味し、これは前方以外に散乱されて入射フラックスから削り取られた残りが前方に出ること、入射フラックスに前方散乱フラックスが加わって前方に出るのではないとのごく当り前の事実を表します。フラックス保存則が全散乱を前方散乱だけから決めてしまうことは、積分断面積がゼロ度散乱振幅の虚部に比例するという光学定理にも現れています[10]。

本稿では弾性散乱だけ起こるポテンシャル散乱を考えました。また、本当は大きな角度方向にも干渉フラックスは出ますが、その効果は事実上ゼロと見なせるので無視しました[1]。これが無視できない小角範囲のことを上で「ゼロ度近辺」と表現し、そこへ出てくる散乱波を前方散乱波として別扱いしたわけです。

以上のように、前方散乱フラックス  $F_{sc}^{(0)}$ は、したがってゼロ度微分断面積は、思考実験ですら決して直接測定できない空想の産物です。干渉が無視できる条件で定義された断面積を、干渉のある領域へむりやり数学的に外挿しただけの代物です。干渉領域の角度範囲は  $\theta < \Delta\theta \sim (kr)^{-1/2}$ と遠方で狭まりますが[1]、どんな大きな  $r$ に対しても  $\theta = 0$ は必ず干渉領域に入っており、ゼロ度微分断面積は宇宙の果てでも測れません。

## 10 縮退状態を識別しない断面積

終状態  $B_1, B_2, B_3$  を区別せずに全部捕えたときの断面積はもちろん個々の断面積  $\sigma(A_i \rightarrow B_j)$  の  $j=1, 2, 3$  についての和になります。しかし、始状態については主張10は「ブー」です。

簡単な例をお話ししましょう。いま、標的がすべて同じ始状態  $A$  にあるとします。そのうち半分が占める状態に  $A_1$ 、残りの半分が占める状態に  $A_2$  という名前を付けます。名前は違っても同じ状態です。すると、それぞれの半分についての断面積間に等式  $\sigma(A_1 \rightarrow B_j) = \sigma(A_2 \rightarrow B_j) = \sigma(A \rightarrow B_j)$  が成り立ちます。したがって、始状態  $A_1, A_2$  について断面積を加え合わせれば本来の断面積の2倍になってしまいます。3分割して加え合わせれば3倍になってしまいます。明らかに、始状態について加え合わせるはいけません。状態  $A_1, A_2$  の標的が半分ずつ用意されているのなら、断面積の平均を取るべきです。

始状態  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) に  $P_i$  ずつ分布しているならばその重みをつけて平均すべきです：  
 $\sigma(A \rightarrow B) = \sum_{ij} (P_i/P) \sigma(A_i \rightarrow B_j)$  ( $P = \sum P_i$ ).  
 両辺に衝突速度をかけて速度分布に亘り平均すれば、反応速度定数  $\kappa$  につき  $\kappa(A \rightarrow B) = \sum_{ij} (P_i/P) \kappa(A_i \rightarrow B_j)$  が導けます[11].

## 11 終わりに

いかがでしたか？ 一見、○のようで、正解は全部×。ただ、○×自体より各節の考察の方が重要です。低い点数を恥じることはありません。何を隠そう、皆さんのボス級の方々と議論していて、あるいは学会討論などを聞いて、ン？と思って仕込んだネタも入っています。基礎知識では、皆さんとボスとはきっと五十歩百歩です。

ひっかけ問題と思われそうなものもあります。でも、例外的なケースにまで機械的に「常識」をあてはめるなど、いいかげんな投稿論文を読むにつけ、綿密な思考、例外に敏感な注意深さをふだんから訓練しておく必要性を痛感します。何かを学んだとき、少しひねくれ者になって、それが当てはまらない例を考えてみるのも一案です。

10回に亘ってああだこうだ書いてきました。拾い読み、伝え聞きで眼や耳から入る断片的な知識を、そういうものなんだと無批判に頭に入

れずに、議論の前提条件や論理の筋道に気を配りながら自分の頭でその妥当性をじっくり考えることの重要性はお伝えできたかと思います。

シリーズ「衝突論ノート」もそろそろ年貢の納め時です。10回分の再編集版を近いうちに皆さんにお届けします。全体を一貫した読み物とし、前後を参照し合い、重複を必要最小限に止め、誤解を招く可能性に気付いたところは書き直し、参考文献もより使い易く工夫するつもりです。

質問、コメント、批判などをいただくことは大歓迎です、初歩的なこと、些細なことでも、疑問はぜひ議論によって解決させてください。比較的注意深い方だと自身、認ずる私も神ならぬ身、10回も書けば書き間違い、うっかりミスなどいくつかはあろうかと危惧しています。ちなみに、ここで神なら間違いを犯さないとも、そもそも神の存否すら断言していないことにご注意を。物理を志す人ならば、論理的に、論理的に…。

- [1] 島村 勲, しょうとつ, 第7巻第6号 (2010).
- [2] 島村 勲, しょうとつ, 第8巻第2号 (2011).
- [3] 島村 勲, しょうとつ, 第8巻第3号 (2011).
- [4] 高柳和夫, 電子・原子・分子の衝突 (培風館, 1972; 改訂版 1996).
- [5] 砂川重信, 散乱の量子論 (岩波書店, 1977).
- [6] E. A. Mason and E. W. McDaniel, Transport Properties of Ions in Gases (Wiley, New York, 1988).
- [7] 江沢 洋, 量子力学I (裳華房, 2002).
- [8] B. H. Bransden and C. J. Joachain, Physics of Atoms and Molecules (Pearson Education, Harlow, 1983, 2nd ed. 2003) (ペーパーバック: Longman, Prentice Hall).
- [9] 島村 勲, しょうとつ, 第8巻第1号 (2011).
- [10] 島村 勲, しょうとつ, 第7巻第5号 (2010).
- [11] R. D. Levine and R. B. Bernstein, 分子衝突と化学反応 [井上鋒朋 訳] (東大出版会, 1976).

## おまけ

過剰サービス エッチ バー  
 ネコの歯科医は 歯見るとニャン  
 Mott-Massey 持ってまっせー  
 うん、同僚の事情でね ( $p^2$ )  
 半径の比は 5: 9 (hard sphere)