64. 三次元空間における剛体の並進・回転運動について

Three Dimensional Motions of Rigid Bodies

○清野　純史 (京都大・工学研究科・土木システム)
三浦　房紀 (山口大・工・知能情報システム)
小川　誠之 (NTT (株) ・中国支社・山口支店)

Junji KIYONO, Graduate School of Civil Engineering, Kyoto University, Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-01
e-mail: kiyono@quake.kuciv.kyoto-u.ac.jp
Fusanori MIURA, Department of Computer Science and Systems Engineering, Yamaguchi University, Tokiwadai, Ube 755
e-mail: miura@csse.yamaguchi-u.ac.jp
Masayuki OGAWA, Chugoku Branch, NTT Co. Ltd., Kumano-cho 4-5, Yamaguchi 753
e-mail: ogawam@yama.cgk.ntt.co.jp

We here investigated three dimensional motions of rigid bodies on a rigid floor under seismic excitations. Behavior of the rigid bodies is simple and familiar phenomena, but is very difficult and complicated problem from an analytical point of view. It is very important for earthquake disaster prevention to consider the behavior of such rigid bodies as equipments installed in the buildings and houses. Computer program that can calculate the behavior of the rigid bodies is developed to simulate the response under the seismic excitations. The motions of the rigid bodies are classified six types in a three dimensional space; rest, slide, rotation, slide rotation, translation jump and rotation jump. Transition of motion occurs among the six types. Equations of motion are constructed for six degree-of-freedom of translations and rotations.

Key Words: rigid body, overturning, earthquake excitation, breadth-height-ratio, nonlinear equation, impact

1. はじめに

1995 年の阪神大震災では死者の 89%が家屋の倒壊や家具類の転倒よる圧迫死や窒息死であったという報告がなされている[1)]。また、地震時の構造物内部にある付帯設備の移動（転倒・散乱、落下など）による被害の大きさを考えると、構造物の内部空間に対する問題は依然として残されている。災害軽減のための構造物の内部空間のあり方を追求し、その安全性を向上させるために、地震時の剛体運動に関する研究が過去多く行われてきた。剛体運動は、単純でよく知られている現象の一つであるが、非線形の連立微分方程式であり繰り返しの収束計算を必要とすること、衝突時に摩擦や跳ね返りの効果を考慮しなくてはならないこと地震時にはランダムな外力が作用すること等のため[2)]、解析が非常に複雑になる。この研究の歴史が約 100 年にもおよび、剛体が転倒する現象に関して様々な実験的・理論的な研究が行なわれている[例えば3~9)]のはこのためである。

しかし、それらの大半は対象となる問題空間を２次元平面として取り扱っている。本研究では問題空間を３次元へと拡張し、３次元非線形運動方程式を数値的に解くことによって剛体の 3 次元挙動解析を行った。

2. 3次元剛体運動のモデル化と定式化

本研究では、剛体運動を三次元へと拡張するが、既存の２次元の研究[3)]と同様に剛体の運動は重心 (x, y, z)の変位と x 軸、y 軸、z 軸まわりのそれぞれの回転角 ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) で表現することにする。

また、この剛体の運動も Ishiyama[3)] にならい、図-1 のように Rest (静止) 、Slide (滑っている状態) 、Rotation (回転) 、Slide Rotation (滑りながらの回転) 、Translation Jump (平行移動のジャンプ) 、Rotation Jump (回転しながらのジャンプ) の６つの運動モードに分類を行った。これら、剛体の６つのモードを推移させることによりすべての剛体の動きを表現することが可能となる。剛体の３次元運動方程式を解く際には、剛体を２次元平面に射影して運動を分析するとともに、剛体の回転運動に順番をつけて解くことにより問題を取り扱いやすくした。数値積分としては線形加速度法を用い、逐次重心の加速度・速度・変位および回転角を求め、さらに幾何学的な関係からエッジの座標を求めた。

例えば Rotation に対しては、x、y、z 軸まわりの運動方程式はそれぞれ次式のように表される。

$$\ddot{\theta}_x = \frac{1}{i_{gx}^2 + \left(y^2 + z^2\right)} \times \left[Y\sqrt{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\cos\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) - S'_z(Z + g) \times \sqrt{\left\{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)\right\}\sin^2\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + r_{yz}^2\sin^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\cos\left(\alpha_{xyz} - |\theta_z|\right) \right]$$

$$\ddot{\theta}_z = \frac{1}{i_{gz}^2 + \left(x^2 + y^2\right)} \times \left[X\sqrt{\left\{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)\right\}\sin^2\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + r_{yz}^2\sin^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)} \times \cos\left(\alpha_{xyz} - |\theta_z|\right) - Y\sqrt{\left\{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)\right\}\sin^2\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + r_{yz}^2\sin^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\sin\left(\alpha_{xyz} - |\theta_z|\right) \right]$$

$$\ddot{\theta}_y = \frac{1}{i_{gy}^2 + \left(x^2 + z^2\right)} \times \left[\ddot{X}\sqrt{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\cos\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) - S'_y\left(\ddot{Z} + g\right) \times \sqrt{\left\{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)\right\}\sin^2\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + r_{yz}^2\sin^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\sin\left(\alpha_{xyz} - |\theta_z|\right) \right] \quad (1)$$

ここに、

$$S'_x = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\theta_x) & (\theta_x \neq 0) \\ \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_x) & (\theta_x = 0 \cap \dot{\theta}_x \neq 0) \\ \mathrm{sgn}(\ddot{Y}) & (\theta_x = \dot{\theta}_x = 0) \end{cases} \quad S'_y = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\theta_y) & (\theta_y \neq 0) \\ \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_y) & (\theta_y = 0 \cap \dot{\theta}_y \neq 0) \\ \mathrm{sgn}(\ddot{X}) & (\theta_y = \dot{\theta}_y = 0) \end{cases} \quad (2)$$

であり、i_{gx} , i_{gy}, i_{gz} はそれぞれ単位質量あたりの重心をとおる x, y, z 軸まわりの慣性モーメント、r_{yz} は yz 平面に射影した重心と剛体のエッジとの距離、α_x は剛体のエッジと yz 平面へ射影した重心とを結ぶラインと z 軸とのなす角、α_{xy} は x 軸回りの回転を施した後の、剛体のエッジと zx 平面へ射影した重心とを結ぶラインと z 軸とのなす角、α_{xyz} は x 軸回り、y 軸回りの回転を施した後の、剛体のエッジと xy 平面へ射影した重心とを結ぶラインと z 軸とのなす角である。また、重心の位置は次式で表わされるので

$$x = \sqrt{\left\{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)\right\}\sin^2\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + r_{yz}^2\sin^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\sin\left(\alpha_{xyz} - |\theta_z|\right)$$

$$y = \sqrt{\left\{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)\right\}\sin^2\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + r_{yz}^2\sin^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\cos\left(\alpha_{xyz} - |\theta_z|\right)$$

$$z = \sqrt{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\cos\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) \quad (3)$$

$$\alpha_x = \tan^{-1}\frac{w}{h}, \qquad \alpha_{xy} = \tan^{-1}\frac{b}{r_{yz}\cos\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}$$

$$\alpha_{xyz} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}\sin\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right)}{r_{yz}\sin\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)} \quad (4)$$

重心の速度および加速度はこの重心の変位を時間 t で微分することにより求めることができる。

Slide Rotation の場合は、式(1)に対応した回転角に関する運動方程式と、次式のような重心に関する方程式を得る。ただし、z 方向は rotation と同じである。

$$\ddot{x} = -\ddot{X} - S_x\mu_k\left(g + \ddot{Z} + \ddot{z}\right), \quad \ddot{y} = -\ddot{Y} - S_y\mu_k\left(g + \ddot{Z} + \ddot{z}\right) \quad (5)$$

ここに、

$$S_x = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\dot{x}_0) & \dot{x}_0 \neq 0 \\ \mathrm{sgn}(-\ddot{X}) & \dot{x}_0 = 0 \end{cases} \quad S_y = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\dot{y}_0) & \dot{y}_0 \neq 0 \\ \mathrm{sgn}(-\ddot{Y}) & \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

また、μ_k は床と剛体の底面との間の動摩擦係数である。

3. 剛体の運動モードの推移と衝突

剛体運動は、床が振動したり何らかの外力が作用することによって、上述の Rotation や Slide Rotation を含む 6 つの運動モード間を推移する。表-1 は剛体が床と衝突する現象を除いて、ある運動モードが別の運動モードに推移するための条件を表わしたものである。

剛体が Jump, Rotation そして Slide Rotation している場合、エッジまたは底面が床と接触することで衝突が生じる。この際、剛体は床から水平、鉛直双方の力積を受けることになる。衝突後の値にダッシュをつけることにすると、例えば Jump からの衝突に関しては運動量、角運動量保存則から次式を得る。

$$\dot{x}' = \dot{x} + Q_x \quad \dot{y}' = \dot{y} + Q_y \quad \dot{z}' = \dot{z} + Q_z \quad (7)$$

$$\dot{\theta}'_x = \dot{\theta}_x + A_1 \times Q_y - A_2 \times Q_z \quad (8)$$

$$\dot{\theta}'_y = \dot{\theta}_y + B_1 \times Q_x - B_2 \times Q_z \quad (9)$$

$$\dot{\theta}'_z = \dot{\theta}_z + C_1 \times Q_x - C_2 \times Q_y \quad (10)$$

ここに、Q_x, Q_y, Q_z は床から剛体に加わる単位質量あたりの x, y, z 方向の力積、A_1 ,A_2 ,B_1 ,B_2 ,C_1 ,C_2 は θ_x , θ_y , θ_z , b , r_{yz} , α_x , α_{xy} ,α_{xyz} および i_{gx} , i_{gy}, i_{gz} の関数である。これより、力積 Q_x, Q_y, Q_z は跳ね返り係数 e_x,e_y,e_z を用いて表わすことができる。例えば Q_z については

$$Q_z = \frac{-\left(e_z + 1\right)\left\{\dot{z} - UV_z - UV_x\right\}}{1 - A_2 U\sin\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + \mathrm{sgn}\left(\theta_y\right) \times B_2 U\sin\left(\alpha_{xy} - |\theta_y|\right) + A_2 V_z \frac{U}{\theta_z}} \quad (11)$$

ここに

$$U = \sqrt{b^2 + r_{yz}^2\cos^2\left(\alpha_x - |\theta_x|\right)}$$

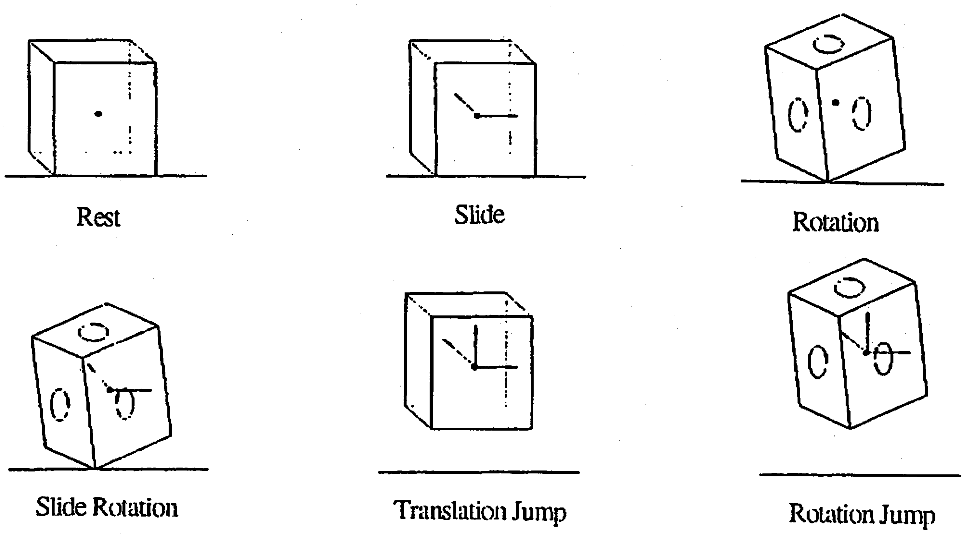


図-1 3次元剛体運動の分類

$$U = \mathrm{sgn}(\theta_x) \times \frac{r_{yz}^2 \dot{\theta}_x \sin 2(\alpha_x - |\theta_x|)}{2 \times \sqrt{b^2 + r_{yz}^2 \cos^2(\alpha_x - |\theta_x|)}} \quad (12)$$

$$V_z = \cos(\alpha_{xy} - |\theta_y|)$$

$$\dot{V}_z = -(\dot{\alpha}_{xy} - \mathrm{sgn}(\theta_y) \times \dot{\theta}_y) \sin(\alpha_{xy} - |\theta_y|) \quad (13)$$

であり、Q_zを適用した後のエッジの z 方向の速度は次式のようになる。

$$\dot{z}_0' = \dot{z}' - (U\dot{V}_z + \dot{U}V_z)' \quad (14)$$

この衝突後のエッジの速度によって次の運動の状態が決定される。$\dot{z}_0' > 0$ ならば、剛体は Rotation Jump を続ける。$\dot{z}_0' = 0$ ならば、$\dot{x}_0' = 0 \cap \dot{y}_0' = 0$ のとき Rotation に移り、それ以外なら Slide Rotation に推移する。$\dot{z}_0' < 0$ ならば、剛体は Rotation に推移し、剛体のエッジには次のステップでもさらに水平方向と鉛直方向の力積が加えられる。$\dot{z}_0' < 0$ のとき、すなわち Rotation に推移した時、剛体のエッジへさらに加わる力積は、角運動量保存則より同様の手順を踏んで求めることができる。例えばｚ方向の Rotation 移行後 (″の記号)の鉛直方向速度は

$$\dot{z}'' = \dot{z}' + Q_z' \quad (15)$$

であるから、Q_z'は次式で与えられる。

$$Q_z' = -\dot{z}' + (U\dot{V}_z' + \dot{U}'V_z) \quad (16)$$

次に、Rotation および Slide Rotation からの衝突は、θ_x またはθ_y が 0 になったときに生ずる。例えば、θ_x=0 ($\theta_y \neq 0$) のときは、鉛直方向の力積 Q_z は底辺全体に加えられる。これを、一点に作用する等価な力積に置き換え、その作用点を辺の中心からの距離 ζ_w とすると、ζ_w は

$$\zeta_w = -\mathrm{sgn}(\theta_x) \times \frac{w}{2} \left\{ -\frac{1+e_z}{1-e_z}\left(1+\frac{i_{gx}^2}{w^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1+e_z}{1-e_z}\right)^2 \left(1+\frac{i_{gx}^2}{w^2}\right)^2 - 4\frac{i_{gx}^2}{w^2}} \right\} \quad (17)$$

となり、z 方向、y 方向の力積Q_z、Q_yは次式のようになる。

$$Q_z = -\frac{\dot{z}}{1+\frac{\zeta_w^2}{i_{gx}^2}}(1+e_z)\left(1-\frac{\zeta_w}{w}\right) \quad (18)$$

$$Q_y = -\frac{h \times \zeta_w}{i_{gx}^2 + h^2} Q_z \quad (19)$$

θ_y=0 ($\theta_x \neq 0$) の場合も同様である。衝突後の次の運動の状態は Jump の場合と同様に、求めた力積 Q_x、Q_y、Q_z を適用した後の剛体のエッジの速度によって決定される。

以上の衝突後の運動の推移をまとめたものが表-2、表-3 である。

表-1 剛体運動の推移

現在の状態	推移条件	次の状態
Rest	$\lvert\ddot{x}\rvert > \mu_s(g+\ddot{z}) \cap \mu_s < \frac{b}{h}$ または $\lvert\ddot{y}\rvert > \mu_s(g+\ddot{z}) \cap \mu_s < \frac{w}{h}$	Slide
	$\frac{h}{b} > \frac{g+\ddot{z}}{\lvert\ddot{x}\rvert} \cap \mu_s \geq \frac{\lvert\ddot{x}\rvert}{g+\lvert\ddot{z}\rvert} \cap \mu_s > \frac{b}{h}$ または $\frac{h}{w} > \frac{g+\ddot{z}}{\lvert\ddot{y}\rvert} \cap \mu_s \geq \frac{\lvert\ddot{y}\rvert}{g+\lvert\ddot{z}\rvert} \cap \mu_s > \frac{w}{h}$	Rotation
	$\ddot{Z}+\ddot{z} < -g$	Translation Jump
Slide	$\dot{x}=0 \cap \dot{y}=0$	Rest
	$\bar{\mu}_k > \frac{b}{h} \cap \ddot{x} \neq 0$ または $\bar{\mu}_k > \frac{w}{h} \cap \ddot{y} \neq 0$	Slide Rotation
	$\ddot{Z}+\ddot{z} < -g$	Translation Jump
Rotation	$\begin{cases}\theta_x=0\\ \dot{\theta}_x=0\end{cases} \cap \begin{cases}\theta_y=0\\ \dot{\theta}_y=0\end{cases} \cap \dot{\theta}_z=0$	Rest
	$\lvert\ddot{X}+\ddot{x}\rvert > \bar{\mu}_k(g+\ddot{Z}+\ddot{z})$ または $\lvert\ddot{Y}+\ddot{y}\rvert > \bar{\mu}_k(g+\ddot{Z}+\ddot{z})$	Slide Rotation
	$\ddot{Z}+\ddot{z} < -g$	Rotation Jump
Slide Rotation	$\lvert\ddot{X}+\ddot{x}\rvert < \bar{\mu}_k(g+\ddot{Z}+\ddot{z})$ かつ $\lvert\ddot{Y}+\ddot{y}\rvert < \bar{\mu}_k(g+\ddot{Z}+\ddot{z})$	Rotation
	$\begin{cases}\theta_x=0\\ \dot{\theta}_x=0\end{cases} \cap \begin{cases}\theta_y=0\\ \dot{\theta}_y=0\end{cases} \cap \dot{\theta}_z=0$	Slide
	$\ddot{Z}+\ddot{z} < -g$	Rotation Jump
Translation Jump	$\lvert\theta_x\rvert > 0 \cup \lvert\theta_y\rvert > 0 \cup \lvert\dot{\theta}_z\rvert > 0$	Rotation Jump
Rotation Jump	$\begin{cases}\theta_x=0\\ \dot{\theta}_x=0\end{cases} \cap \begin{cases}\theta_y=0\\ \dot{\theta}_y=0\end{cases} \cap \dot{\theta}_z=0$	Translation Jump

表-2 Jump からの衝突後の運動

衝突時の条件			衝突後の運動
$\theta_x \neq 0 \cup \theta_y \neq 0 \cup \dot{\theta}_z \neq 0$	$\dot{z}_0' > 0$		Rotation Jump
	$\dot{z}_0' = 0$	$\dot{x}_0' = 0 \cap \dot{y}_0' = 0$	Rotation
		else	Slide Rotation
	$\dot{z}_0' < 0$		Rotation
$\theta_x = 0 \cap \theta_y = 0 \cap \dot{\theta}_z = 0$	$\dot{z}_0' > 0$	$\theta_x' = 0 \cap \theta_y' = 0$	Translation Jump
		else	Rotation Jump
	$\dot{z}_0' = 0$	$\dot{x}_0' = 0 \cap \dot{y}_0' = 0$	Rest
		else	Slide
	$\dot{z}_0' < 0$		Rotation

表-3 Rotation, Slide Rotation からの衝突後の運動

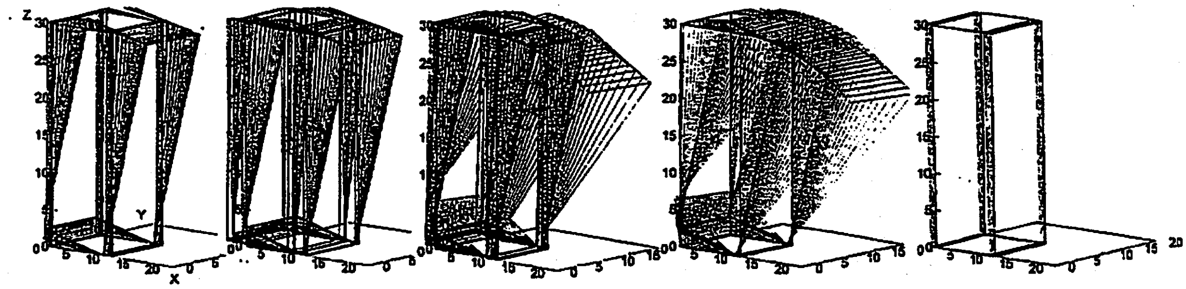
衝突時の条件		衝突後の運動
$\dot{z}_0' \geq 0$	$\dot{x}_0' = 0 \cap \dot{y}_0' = 0$	Rotation
	else	Slide Rotation
$\dot{z}_0' < 0$		Rotation

4. 剛体挙動の３次元シミュレーション

本研究では、上述の一連の手順を基に剛体の 3 次元運動のアルゴリズムを構築し、これを用いて正弦波を入力した場合の 3 つのパターンについて剛体運動シミュレーションを行った。

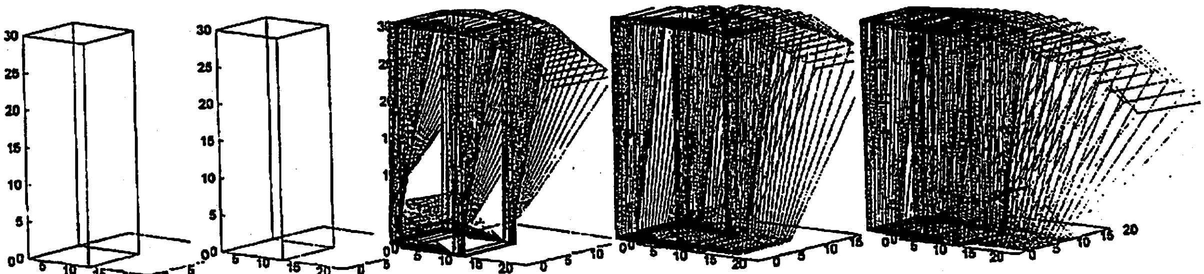
(1) 水平１方向加振 (x 方向)

振幅を 500gal と固定して振動数を 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0Hz と変化させた場合と、振動数を 1.0Hz に固定して振幅を 100, 250, 500, 750, 1000gal と変化させた場合のシミュレーションを行った。それぞれの結果を図-1 と図-2 の (a) ～ (e) に示す。ただし、幅、奥行き、高さはそれぞれ 10cm, 10cm, 30cm、床と底面、床とエッジの間の静止摩擦係数 μ_s、$\bar{\mu}_s$ はそれぞれ 0.4 動摩擦係数μ_k、$\bar{\mu}_k$ はそれぞれ 0.3、単位質量あたりのQ_x、Q_y、Q_z はそれぞれ-1.0, -1.0, 0.5 を与えている。また、計算時間



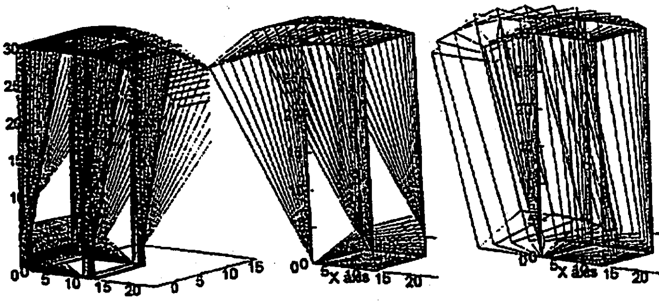
(a) 0.2Hz　(b) 0.5Hz　(c) 1.0Hz　(d) 2.0Hz　(e) 5.0Hz

図-2 振動数 f を変化させた場合の水平 1 方向加振（$\ddot{x}=500\sin 2\pi ft$）



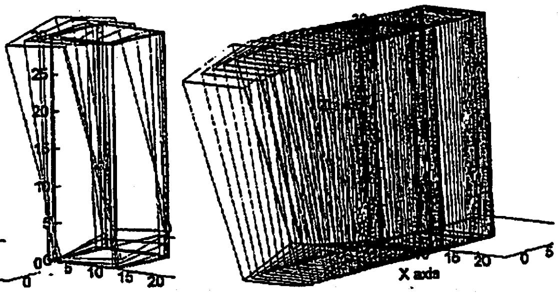
(a) 100gal　(b) 250gal　(c) 500gal　(d) 750gal　(e) 1000gal

図-3 振幅 A を変化させた場合の水平 1 方向加振（$\ddot{x}=A\sin 2\pi t$）



(a) $\ddot{x}=500\sin 2\pi t$, $\ddot{y}=250\sin 2\pi t$　(b) $\ddot{x}=500\sin 2\pi t$, $\ddot{y}=500\sin 2\pi t$　(c) (b)の状態から $\ddot{x}=1000\sin 2\pi t$

図-4 水平 2 方向加振(x, y 方向)



(a) $\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=500\sin 2\pi t$　(b) $\ddot{x}=250\sin 0.4\pi t$, $\ddot{y}=1000\sin \pi t$, $\ddot{z}=500\sin 2\pi t$

図-5 3 方向加振(x, y, z 方向)

間隔は 0.001sec である。

振幅を固定させた場合、振動数を高くすればするほど、短いステップ数で Rest から Slide Rotation 運動へ推移し、その後転倒した。ただし、5Hz では転倒には至らなかった。この振幅は West の式で示される転倒条件を満たしているにも関わらず転倒に至らないのは、運動モードの遷移領域が 2Hz と 5Hz の間に存在し、それより高周波領域では Rotation あるいは Slide Rotation 運動を続けるためである。振動数を固定させた場合も同様であり、始めの 100, 250gal では Rest を保つが、さらに振幅が大きくなると Rotation に推移し、その後転倒を起こした。

(2) 水平2方向加振（x、y方向）

振動数を 1Hz とし、x 方向、y 方向の振幅をそれぞれ 500gal, 250gal とした場合の結果が図-3(a)である。Rotation の開始条件である West の式を満たしているのは x 方向だけであるので、y 軸に平行な辺まわりの運動のみ生じている。(b)はで x、y 双方の振幅を 500gal とした場合である。原点にあるエッジを中心とした運動となっている。(c)は(b)の運動の途中で、$\theta_x \neq 0$ かつ $\theta_y \neq 0$ の時に、強制的に x 方向の振幅を 2 倍にしたもので、z 軸回りの回転が生じていることがわかる。

(3) 3方向加振（x, y, z方向）

正弦波を 3 方向へ入力することで剛体は Rotation, Slide, Jump など多彩な動きをする。また、これら正弦波の振幅の大きさを変えることでも様々な動きをする。図-4(a)は図-3(b)に z 成分が加わったもので、原点のエッジ部分に Jump や Slide の運動モードが現れている。(b)はそれぞれの方向の加振振動数を変えると共に、y 方向に 1000gal という大振幅を入力したものであり、最終的に y 軸負方向に大きく移動して転倒に至っている。

参考文献

1) 日本建築学会建築計画委員会兵庫県南部地震調査研究部報告書, 1996. 2) Ishiyama:Build. Res. Inst. 1980. 3) Chik-Sing:Earthq. Eng. and Struc. Dyn., Vol.8, pp.565-587, 1982. 4) Ishiyama: Earthq. Eng. and Struc. Dyn., Vol.10, pp.635-650, 1982. 5) Winkler: Earthq. Eng. and Struc. Dyn., Vol.24, pp.1389-1408, 1995.