

質量平均速度を基準速度に選ぶことについて

金久博忠 (気象大学校)

[1. 序 質量方程式] 湿潤大気を考える。 α 種 (α = 空気, 水蒸気, 雨粒など) の密度と速度と生成率を ρ^α と $\mathbf{v}^\alpha$ と Q^α として質量方程式は

$$\partial_t \rho^\alpha + \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = Q^\alpha. \quad (1)$$

基準速度を $\mathbf{v}$ として $\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v} + \mathbf{V}^\alpha$. $\mathbf{V}^\alpha$ は α 種の相対速度。 $\sum_\alpha Q^\alpha = 0$ に注意して質量方程式は

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = - \nabla \cdot (\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha). \quad (2)$$

$\rho = \sum_\alpha \rho^\alpha$ は全密度。質量平均速度 $\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha / \rho$ を基準速度 $\mathbf{v}$ に選べば $\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha = 0$. この時、質量方程式(2)は乾燥大気の場合と同じ形に成る (e.g., Wacker 2006)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3)$$

運動方程式、熱方程式も、質量平均速度を基準速度に選べば都合であることを以下に示す。

[2. 運動方程式] α 種の運動方程式は

$$\partial_t (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \nabla \cdot (\mathbf{v}^\alpha \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \nabla P^\alpha + \rho^\alpha \nabla \phi = \mathbf{F}^\alpha. \quad (4)$$

P^α は α 種の圧力 (凝縮相なら零)。 ϕ は重力 Potential。 $\mathbf{F}^\alpha$ は α 種が他種から受ける力。内部力 $\mathbf{F}^\alpha$ は $\sum_\alpha \mathbf{F}^\alpha = 0$ を満たす事より運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) + \nabla P - \rho \mathbf{g} = - \sum_\alpha \{ \partial_t (\rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{V}^\alpha \rho^\alpha \mathbf{v} + \mathbf{V}^\alpha \rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

$P = \sum_\alpha P^\alpha$ は全圧力。質量平均速度 $\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha / \rho$ を基準速度 $\mathbf{v}$ に選べば運動方程式(5)は

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) + \nabla P - \rho \mathbf{g} = - \sum_\alpha \nabla \cdot (\mathbf{V}^\alpha \rho^\alpha \mathbf{V}^\alpha). \quad (6)$$

他 (例えば空気) の速度を基準速度に選ぶ場合に比べて遥かに簡単。乾燥大気の運動方程式 (右辺 = 0) に近い形。運動方程式の右辺を無視する近似の場合、近似誤差も遥かに小さく成る。

[3. 熱方程式] 下添え字 m で分子を表して、 α 種の微視的な質量方程式と運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_m^\alpha + \nabla \cdot (\rho_m^\alpha \mathbf{v}_m^\alpha) &= Q_m^\alpha, \\ \partial_t (\rho_m^\alpha \mathbf{v}_m^\alpha) + \nabla \cdot (\mathbf{v}_m^\alpha \rho_m^\alpha \mathbf{v}_m^\alpha) + \rho_m^\alpha \nabla \phi &= \mathbf{F}_m^\alpha. \end{aligned}$$

この2式の巨視的平均が式(1,4)。上2式より微視的 Energy 方程式は $\sum_\alpha [\partial_t \{ \rho_m^\alpha (\mathbf{v}_m^\alpha \cdot \mathbf{v}_m^\alpha / 2 + \phi + \phi^\alpha) \} + \nabla \cdot \{ \mathbf{v}_m^\alpha \rho_m^\alpha (\mathbf{v}_m^\alpha \cdot \mathbf{v}_m^\alpha / 2 + \phi + \phi^\alpha) \}] = 0$. ϕ^α は α 種の Energy Level. この式を巨視的に平均して Energy 方程式は

$$\sum_\alpha [\partial_t \{ \rho^\alpha (\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2 + \phi + \phi^\alpha + C^\alpha T) \} + \nabla \cdot \{ \mathbf{v}^\alpha \rho^\alpha (\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2 + \phi + \phi^\alpha + C^\alpha T) + \mathbf{v}^\alpha P^\alpha \}] = 0.$$

T と C^α は温度と α 種の比熱。一方、式(1,4)より力学的 Energy 方程式は

$$\begin{aligned} \sum_\alpha [\partial_t \{ \rho^\alpha (\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2 + \phi) \} + \nabla \cdot \{ \mathbf{v}^\alpha \rho^\alpha (\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2 + \phi) \\ + \mathbf{v}^\alpha \cdot \nabla P^\alpha \}] = \sum_\alpha (\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{F}^\alpha - Q^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2). \end{aligned}$$

両式の差より熱方程式は $\sum_\alpha [\partial_t \{ \rho^\alpha (\phi^\alpha + C^\alpha T) \} + \nabla \cdot \{ \mathbf{v}^\alpha \rho^\alpha (\phi^\alpha + C^\alpha T) \} + P^\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}^\alpha] = - \sum_\alpha (\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{F}^\alpha - Q^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2)$. $\mathbf{F}^\alpha$ は摩擦力 $\mathbf{F}_V^\alpha$ と相転移力 $\mathbf{F}_T^\alpha$ との和 $\mathbf{F}^\alpha = \mathbf{F}_V^\alpha + \mathbf{F}_T^\alpha$. 相転移力 $\mathbf{F}_T^\alpha$ がする巨視的工作 $= \sum_\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{F}_T^\alpha$ は、相転移過程に生成された運動 Energy $= \sum_\alpha Q^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha / 2$. 従って熱方程式は

$$\begin{aligned} \sum_\alpha [\partial_t \{ \rho^\alpha (\phi^\alpha + C^\alpha T) \} + \nabla \cdot \{ \mathbf{v}^\alpha \rho^\alpha (\phi^\alpha + C^\alpha T) \} \\ + P^\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}^\alpha] = - \sum_\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{F}_V^\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

式(1)を使い熱方程式(9)は次式となる。

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \{ q^\alpha D^\alpha T^\alpha + T^\alpha (Q^\alpha / \rho) + (P^\alpha / \rho) \nabla \cdot \mathbf{v}^\alpha \} \\ = - (1/\rho) \sum_\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{F}_V^\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

$q^\alpha = \rho^\alpha / \rho$ と $D^\alpha = \partial_t + \mathbf{v}^\alpha \cdot \nabla$ と $T^\alpha = \phi^\alpha + C^\alpha T$ は α 種の混合比と物質微分と内部 Energy. 式(10)に $\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v} + \mathbf{V}^\alpha$ を代入して

$$\sum_\alpha (q^\alpha D^\alpha T^\alpha + T^\alpha D q^\alpha) + (P/\rho) \nabla \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{V}^\alpha \text{の項}].$$

$D = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ は物質微分。熱方程式の右辺を無視する近似の場合、近似誤差は質量平均速度 $\sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha / \rho$ を基準速度 $\mathbf{v}$ とした時に小さく成る。