Noether の定理と波の振幅 2 次 Flux 保存則について

新藤 永樹 (気象研究所・気候研究部)

1 はじめに

波動現象では、振幅の 2 次 Flux が保存則を満たす場合がある。例えば、Rossby 波では Energy Flux が保存則を満たす。(Longuet-Higgins(1964))。また、2 次 Flux と群速度の関係について Hayes(1977) は散逸の無い一様な分散性媒質を伝わる微小振幅の単色平面波の場合、波の振幅の任意の 2 次 Flux が保存則を満たせば、Flux と群速度の方向が一致することを示した。Noda(1986) は議論を一般化して、散逸のある非一様な媒質においてそれを示した。Noda(1986) では、2 次 Flux が 1 階線形偏微分方程式に従う事を仮定の 1 つとしている。この式が Noether Current 保存則を含む事から、ここでは系の Lagrangian が与えられた場合、2 次 Flux と保存則について Noether の定理から説明してみたい。

流体力学での Lagrangian は、完全流体ばかりでなく、粘性流体においてもその存在が Noda(1988) や Mizuno(1991,1994), 水野(1997) により議論されている。気象学や海洋学に用いられる方程式系は特定の空間スケールや時間スケールに注目して方程式系に近似が施される。その方法は運動方程式を直接近似するやり方が一般的である。しかしこのような近似のやり方において近似方程式系を構成する際に重要な指針、つまり「保存則を崩さない近似」がなされているかどうかが問題になる。例えば Primitive 方程式系や準地衡風方程式系においては確かに保存則は存在するが、特に渦位が保存することを考えながら運動方程式の近似を行うのは難しい。このような問題は Lagrangian でなく、2 次的に得られる運動方程式に近似を施したことから起こるのであって、Lagrangian が系の基礎であることを考えれば、Lagrangian に保存則を導く対称性を崩さないように近似を行えば何ら問題はない。このような視点から、系に Lagrangian が存在する事を出発点とする。

2 Hamilton の原理と Noether の定理

時空間座標 x^μ , 場の量 $\psi^\mu(x^\mu)$ とし, Scalar, Vector, Tensor, Spinor, 同一添字は和をとる。

作用

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(\psi^\mu, \psi^\mu_{,\nu}) \quad (1)$$

が停留値を取る必要十分条件は Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu} = 0 \quad (2)$$

Noether の恒等式 (高橋(1982)) は無限小変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ より

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu}\right) \delta^L \psi^\mu = -\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\delta x^\nu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} \delta^L \psi^\mu\right) + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \mathcal{L} + \mathcal{L}' - \mathcal{L} \quad (3)$$

作用が不変ならば、Euler-Lagrange 方程式が成り立つところで Noether Current とその保存則は

$$N^\mu = -\delta x^\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\mu_{,\nu}} \delta^L \psi^\nu \quad (4)$$

$$\frac{\partial N^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (5)$$

また、無限小変換が時空間体積を変えなければ、Lagrangian 密度の対称性だけでも保存則は成り立つ。

さらに $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$ でも

$$\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \mathcal{L} + \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{\partial K^\mu}{\partial x^\mu} \quad (6)$$

のようなある量 K^μ が存在する時、Noether Current を新たに

$$N'^\mu = N^\mu + K^\mu \quad (7)$$

で定義し直せば Noether Current は保存する。

3 Noda(1986) の定理との関連

Lagrangian 密度が 2 次形式で書ける事を仮定する。 ψ^μ が波動形 $Re(ae^{i\theta})$ を取れば、Noether Current は 2 次の Flux となる。Noda(1986) の標記を用いて

$$N^\mu = Re(\tilde{N}^\mu e^{2i\theta} + \bar{N}^\mu e^{-2i\theta}) \quad (8)$$

Noda(1986) における F^μ をここでの N^μ とすれば、Noda(1986) の定理により、波の振幅について 2 次 Flux と群速度の関係を導く事ができる。

4 Noether Current の任意性

K^μ が存在するように無限小変換を選ぶと、別の 2 次 Flux が作成できる。

5 準地衡風系

準地衡風系の 2 次 Flux は、Andrews(1983), Hoskins et al.(1983), Plumb(1985,a,b), Takaya and Nakamura(1997,2001) など多くの研究がある。この系での Lagrangian 密度の存在が不明であるため、ここでの方法では 2 次 Flux を導出できない。野田(1988) は準地衡風方程式系は、質量保存則との間に矛盾があり、Hamilton の原理から直接導くことはできない事を指摘している。