D301

円筒容器内で回転する円盤の上の軸対称流

伊賀 啓太 (東大大気海洋研)

1. はじめに

大気や海洋の中では、軸対称な環境場のもとで非対称な現象が生じたり、その現象が時間的に変動することはよく見られるが、このように軸対称流から発達する擾乱は、円筒容器に水を入れて底面付近においた円盤を回転させるという非常に簡単な実験でも実現することができる。

これまで、この実験をさまざまな初期水深と円盤の回転数のもとで行い、観察された興味深い現象について報告を行ってきた。回転数によって楕円や多角形の渦の形が見られること (2010 春 D403)、円形の渦から対称性が崩れて楕円になる回転数の範囲では、履歴現象が見られること (2011 春 D201)、いくつかの回転数領域では、水面の大きな変動を伴う振動と平穏な状態を繰り返すという現象が見られるということ (2012 春 C101) などである。

このような現象のしくみを調べるためには、与えた条件のもとで達成される軸対称な流れを基本場として考え、安定性などの解析を行うことは有力な手段である。そのために (2010 春 D403) では基本場となる軸対称流を考えたが、軸対称流全体が直接粘性によって平衡に到達する状態を求めており、これは必ずしも妥当な仮定とは言えない。そこでここでは、さまざまな現象を解析するための基本場として必要となる回転円盤の上での軸対称流の状態を記述した結果を報告する。

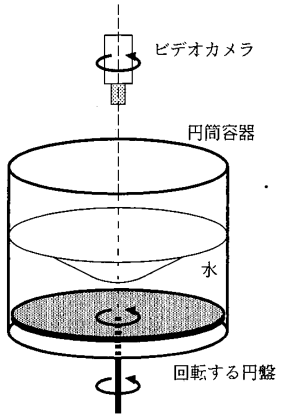

図 1: 実験装置の概要

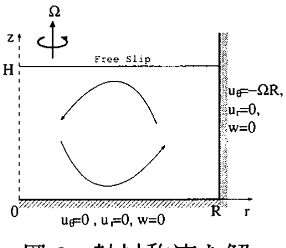

図 2: 軸対称流を解析する問題の設定

2. 問題設定

$0<z<H, 0<r<R$ の範囲の円筒領域にある流体の軸対称定常流を考える。円盤とともに回る回転系で円筒座標を用いて運動方程式を記述し、境界条件は下面 $z=0$ で粘着条件、上面 $z=H$ で応力なし、側面 $r=R$ で $u_\theta=-\Omega R, u_r=0, w=0$ とする。内部領域など鉛直方向の速度変化が大きくない領域では、回転角方向の運動方程式 (角運動量収支) はつぎのようになる。

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)+2\Omega\right]u_r=\nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right].$$

3. 内部領域の解

エクマン数 $E\equiv\nu/(\Omega H^2)$ が小さいとすると、内部領域での u_r は底面のエクマン輸送で補償されなければならないから $u_r=(H/2\delta_E)u_\theta=1/(2E^{\frac{1}{2}})u_\theta$ となる。ただし δ_E はエクマン層の厚さ $\delta_E\equiv\sqrt{\nu/\Omega}$ である。回転角方向の運動方程式の右辺は左辺の各項よりずっと小さいので、(i)$u_r=0$ または (ii) $(1/r)\partial/\partial r(ru_\theta)+2\Omega=0$ のいずれかが成り立つ。(i) は $u_r=u_\theta=0$ で剛体回転を表し、(ii) は $u_\theta=-\Omega r+\mathrm{const}/r$ で角運動量一様な流れを表す。(i) の解の u_θ は $r=R$ でも 0 のままである一方、(ii) の解は $r=0$ で発散するため、内部領域のうち内側では (i)、外側では (ii) の解をとることになる。両領域の境となる r を r_m とおくと、

$$u_\theta=\begin{cases}0 & (r<r_m),\\ \Omega\left(-r+\frac{r_m^2}{r}\right) & (r>r_m).\end{cases}$$

4. スチュワートソン層

剛体回転領域と角運動量一様領域が接する $r\sim r_m$ 付近では、接続のために u_θ の変化が大きくなり境界層ができる。この付近での u_θ を求めると、

$$u_\theta=\begin{cases}-\frac{2\Omega\delta_S}{\sqrt{2/\pi+1}}\exp\left[(r-r_m)/\delta_S\right] & (r<r_m),\\ \Omega\left(-r+\frac{r_m^2}{r}\right)+\frac{2\Omega\delta_S}{\sqrt{2/\pi+1}}\{-1+\mathrm{erf}[(r-r_m)/\delta_S]\} & (r>r_m).\end{cases}$$

$\delta_S\equiv\sqrt{H\sqrt{\nu/\Omega}}=E^{\frac{1}{4}}H$ はこの境界層の厚さを与える。

5. 側壁付近の流れ

外側の側壁付近では、下層のエクマン層を通して外側に運ばれた水が上昇流を作り、内部領域で水槽の内側へと戻されていく。この上昇流によって下層から輸送される角運動量の大きさが、(ii) の領域の角運動量の値と r_m を決定する。

6. まとめ

底面を回転させた円筒容器内での軸対称流は、中心付近での剛体回転領域とそれより外側の角運動量一様領域にわかれ、その間にはスチュワートソン層ができる。ただし、その遷移の位置を決定するには、さらに側壁付近での流れの詳細を調べる必要がある。

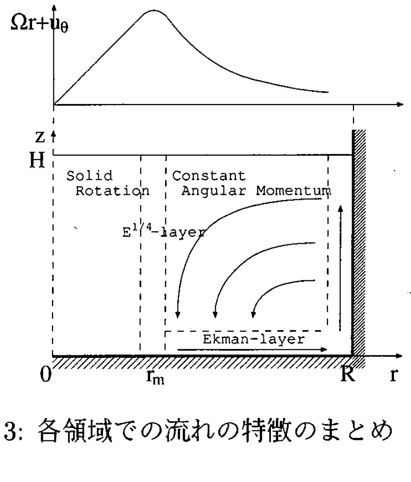

図 3: 各領域での流れの特徴のまとめ