

一般化された2次元流体系における Kelvin-Helmholtz 不安定

* 岩山隆寛 (神戸大・理), 末吉雅和, 渡邊威 (名工大・工),

1 はじめに

地球流体力学において知られている幾つかの2次元流体系を統一的に記述する方程式系として、一般化された2次元流体系、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} = D + F, \quad (1a)$$

$$q = -(-\Delta)^{\alpha/2} \psi, \quad (1b)$$

が知られている (Pierrehumbert *et al.*, 1994). ここで、 q は一般化渦度 (以下では単に渦度と呼ぶ)、 ψ は流れ関数、 α は3以下の実数、 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ は分数冪 Laplacian、 D, F はそれぞれ散逸項と強制項を表す。(1) に従う乱流の研究は、この系が提唱されて以降行われてきたが、それ以外の基礎的な研究は、例えば平行流の線形安定性でさえ行われていない。そこで本研究では、平行流の線形安定性、特に $Q = \delta(y)$ で与えられる渦度分布の非粘性線形不安定問題を調べることにする。Euler 方程式系 ($\alpha = 2$) では、この不安定問題は Kelvin-Helmholtz (KH) 不安定問題としてよく知られたものである。

Euler 系の KH 不安定問題を解く場合には、渦無し領域で ψ に関する Poisson 方程式を解き、渦層上で I) 渦層の変位の連続性、II) 圧力の連続性、を課すことによって解を接続する。しかしながら (1) の KH 不安定問題では、後者の接続条件の一般化がわからない。そこで、本研究ではまず、 x 軸上を同じ強さの点渦が等間隔 a で配置された点渦列の安定性問題を解き、 $a \rightarrow 0$ の極限をとることにより (1) の KH 不安定問題を解くことにする。なお、点渦が作る流れ関数場は、Riesz ポテンシャルで与えられることが知られている (Iwayama & Watanabe, 2010)。

2 渦層の作る基本流速場

安定性を調べる流れ場は、 α の値に依存してそのプロファイルが異なる。線密度 ρ の渦層が作る平均流 $U(\alpha; y)$ は渦層からの距離 $|y|$ の冪乗に比例し、

$$U(\alpha; y) = -\text{sgn}(y) \frac{\rho}{2^{\alpha-1} \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} |y|^{\alpha-2} \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 Γ は gamma 関数である。即ち、平均流は $\alpha < 2$ では渦層に向けて発散する (図1 参照)。

3 渦層の成長率

渦層は不安定で、 x 方向に波数 k を持った正弦波的な擾乱を渦層に与えた場合、渦層の指数関数的な成長率

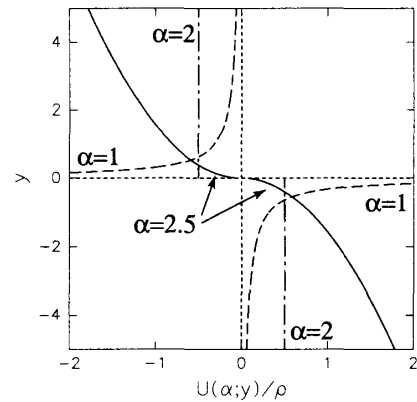


図1: 渦層 $Q = \rho \delta(y)$ の作る流速

$\Lambda(\alpha; k)$ は α と波数に依存し、

$$\Lambda(\alpha; k) = 2|\rho| \sqrt{3-\alpha} \Psi(\alpha) I(\alpha) k^{3-\alpha}, \quad (3a)$$

$$I(\alpha) \equiv \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^{4-\alpha}} dx, \quad (3b)$$

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} -\frac{1}{2^\alpha \pi} \frac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}, & (0 < \alpha \leq 2) \\ -\frac{1}{2^\alpha (\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}}, & (2 < \alpha) \end{cases} \quad (3c)$$

となる。ここで、 $\mathcal{P}$ は Cauchy の主値を表し、 $I(\alpha)$ は $1 < \alpha < 3$ ではある有限の値に収束する。したがって渦層の成長率は $1 < \alpha < 3$ では有限値で、波数の $3-\alpha$ 乗に比例する。一方、 $\alpha \leq 1$ では $I(\alpha)$ 、即ち $\Lambda(\alpha; k)$ は発散する。

4 まとめ

一般化された2次元流体系の KH 不安定問題を考察した。 $\alpha < 3$ では渦層は不安定である。 $1 < \alpha < 3$ の場合には、摂動の成長は指数的で、成長率は摂動の波数 k に対して $k^{3-\alpha}$ の依存性を持ち、有限値にとどまるが、 $\alpha \leq 1$ では指数的成長率は無限大となる。 $\alpha = 3$ では、渦層が作る基本流速場は流れの全領域いたるところで発散するので、安定性の議論から除外した。これは、 $\alpha = 3$ の渦度が作る渦を中心とする周方向速度の大きさが渦からの距離に依存しないため、無限の長さの渦層が作る流れ場は発散するからである。講演では、 $\alpha \leq 1$ で成長率が発散する原因の物理的考察にも触れる。Euler 系の KH 不安定のメカニズムを説明するモデル (Batchelor, 1967) と運動学的関係式 (1b) を組み合わせることにより、 $\alpha \leq 1$ における成長率の発散が説明できる。なお本研究は *J. Phys A: Math. Theor.*, **46** (2013), 065501 に出版された論文の内容の一部である。