Jap. J. of Educ. Psychol., VOL. X, No. 2 (1962)

学習機構の解析に関する方法論的研究：Ⅲ

——学習準備性（点）の解析（その3）——

大阪府教育研究所

中 嶽 治 麿**

Ⅰ 問題と目標

ある能力をもつている被教育者が，特定の教育作用のもとで，新しい教材をどの程度まで理解できるかということは，学習指導計画を設定する場合（特に，ティーチング・ステップのステップサイズを決定する場合）問題になることがらである。いま，これを具体的にするために，

(1) ある能力をもつている被教育者を，教材 $(S_1, S_2, \cdots, S_j)$ を理解している被教育者

(2) 特定の教育作用を，(A)

(3) 新しい教材を $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$

とおくことができたとすると，問題は，

「教材 $(S_1, S_2, \cdots, S_j)$ を理解している被教育者に対して，新しい教材 $(\boldsymbol{\alpha})$ が，教育作用 (A) によつて与えられた場合，かれらが理解できる教材 $(\boldsymbol{\alpha}_1=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k))$ と，理解できない教材 $(\boldsymbol{\alpha}_0=(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_m))$ を求めること」

ということになる。

ここでは，上述のような観点から，教材 $(S_1, S_2, \cdots, S_j)$ を理解している被教育者が，教育作用 (A) によつて新らしく理解できる教材 $(\boldsymbol{\alpha}_1=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k))$ を，能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_j)$ に対する学習準備域とよび，$(R_{SA}(\boldsymbol{\alpha}))$ で表わすことにする。そうして，この学習準備域 $(R_{SA}(\boldsymbol{\alpha}))$ に関する考察を，次に示すような側面から進めることにした。

(1) 学習準備域 $(R_{SA}(\boldsymbol{\alpha}))$ の構造と，その特性を明らかにするとともに，学習準備域の抽出方法を検討する。

(2) 学習準備域 $(R_{SA}(\boldsymbol{\alpha}))$ の境界要素の特性を明らかにする。

Ⅱ 方　針

ここでは，各種の能力体系をもつ被教育者に対して，教育作用が与えられた後に実施された学力検査の結果の解析を中心にして考察を進める。この場合，被教育者に与えられる教育作用は，一般に，教科書的なものであると考えることにする。また，ここで実施される学力検査は，教材 $(\boldsymbol{\alpha})$ を理解するために必要な，基礎的な能力 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の状態や，新しい教材 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ のそれぞれに対する達成度が，どの程度であるかを判定できるように構成されているものとする。

以上のような仮定をおくと，教育作用 (A) は，一般に教科書的なものと考えて，これを考察の外におくことができるために，学習準備域は $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ と表わすことができる。また，学力検査結果からは，各種の能力をもつた被教育者が受検者の中に含まれているために，基礎的な能力 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の各種の体系と，これに対応する学習目標 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の達成度の状態が把握できる。したがつて，以下では，上述のような学力検査の結果をどう解析すればよいか，という観点から検討を進めることにする。

Ⅲ 学習準備域の構造

3.1. 学習準備域の規定

まず，教材 (α_i) や (S_j) を理解している状態を，

$$\alpha_i=1 \qquad S_j=1$$

理解していない状態を，

$$\alpha_i=0 \qquad S_j=0$$

で表わすことにすると，さきに述べた学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ は，

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})=(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0) \quad (1)$$

---

* A methodological study concerning an analysis of the learning mechanism : Ⅲ. —Analysis of readiness and relevance in learning (3).

** by Osamaro Nakadake (*Osaka Prefectural Institute of Educational Research*)

として表わすことができる。

次に，すでに教材$(S_1, S_2, \cdots, S_j)$を理解している被教育者に，教育作用(A)が与えられた場合，(1)式の条件のもとでは，かれらは教材(α_i) $(i \leq k)$を理解することができるから，この場合の被教育者の学習効果を
$f_{\alpha i}(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}, \cdots, S_n)$ $(S_l=1$ または 0, $l=j+1, \cdots, n)$ で表わすことにすると

$$f_{\alpha i}(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}, \cdots, S_n)=1 \quad (2)$$
$$i=1, 2, \cdots, k$$
$$S_l=1 \text{ または } 0 \quad l=j+1, \cdots, n$$

(能力$(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}, \cdots, S_n)$をもつ被教育者の教材$(\alpha_i)$に対する学習効果が認められる)

となる。こうすると，(1)式は上の(2)式と，

$$f_{\alpha i}(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}=0, \cdots, S_n=0)=0 \quad (3)$$
$$i=k+1, k+2, \cdots, m$$

(能力$(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}=0, \cdots, S_n=0$をもつ被教育者の教材$(\alpha_i)$に対する学習効果が認められない)

によつて表わされる。すなわち，学習準備域$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$は，(2)，(3)式のような形で規定することができる。

3.2. 学習準備点からみた学習準備域の構造

学習準備点という観点から(2)式をみた場合，(α_i) $(i=1, 2, \cdots, k)$によつては，必ずしも

$$S_1=1,\ S_2=1,\ \cdots,\ S_j=1$$

という条件を，完全に満たす必要のないものも存在すると考えられる。したがつて，学習準備点という立場から学習準備域$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$の構造を規定していく方法としては，次のようなものが考えられる。

(1) まず，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$の個々の学習目標について，教育作用$(A)$のもとで，これを達成するためには，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$のうち，最小限，どれとどれを理解しておく必要があるかを求める(α_iの学習準備点の構成要素の抽出)。(1)(2)

(2) 次に，基礎的な能力の状態$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$について，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$の個々の学習目標に対する学習準備点の構成要素$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$の状態が，相互にどんな関係にあるかを検討する。

(3) もし，α_iの学習準備点$(R(\alpha_i))$が
$R(\alpha_i)=(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_i=1, S_{i+1}=0, \cdots, S_n=0)$で表わされ，$\alpha_l$の学習準備点$(R(\alpha_l))$が，
$R(\alpha_l)=(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_i=1, S_{i+1}=1, S_{i+2}=0, \cdots, S_n=0)$
で表わされた場合，α_iの学習準備点$(R(\alpha_i))$は，その構成要素が$(R(\alpha_l))$の構成要素に含まれているから，α_lの学習準備点$(R(\alpha_l))$に覆われると考えて，

$$R(\alpha_i) \subset R(\alpha_l)$$

で表わす。

(4) こうすると，α_lの学習準備点の構成要素によつて規定される学習準備域は，$(R(\alpha_l))$で覆われる学習準備点$(R(\alpha_i))$の(α_i)によつて構成されると考えることができる。

たとえば，学習目標(α_i)に対する学習準備点$(R(\alpha_i))$を，

$$R(\alpha_i)=(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_i=1, S_{i+1}=0, \cdots, S_n=0)$$
$$i=1, 2, \cdots, m \quad (m<n)$$

とすると，$(S_1, S_2, \cdots, S_j)$の学習準備域$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$は，

$$R(\alpha_j)=(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}=0, \cdots, S_n=0)$$

であり，

$$R(\alpha_j) \supset R(\alpha_{j-1}) \supset \cdots\cdots \supset R(\alpha_1)$$

となるから

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})=(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_j=1, \alpha_{j+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)$$

を得る。いま，この間の関係を表示すると，Table 1のようになる。

Table 1は$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$と$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$とが，ともに尺度化可能で，しかも両者が1対1に対応してい

Table 1 学習準備点からみた学習準備域の構造

学習目標	学習目標(α_i)がもつ学習準備点の構造										学習目標(α_i)の学習準備点によつて規定される学習準備域							
α_i	S_1,	S_2,	S_3,	$\cdots$,	S_i,	S_{i+1},	$\cdots$,	S_m,	S_{m+1},	$\cdots$,	S_n	α_1,	α_2,	α_3,	$\cdots$,	α_i,	α_{i+1},	$\cdots$,	α_m
α_1	1	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
α_2	1	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$											$\cdots$							
α_i	1	1	1	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	1	1	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$											$\cdots$							
α_m	1	1	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	1	1	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1

るという，きわめて単純な構造をもつものであるが，一般の場合においても，ほぼ同様に考察を進めていくことができる。

3.3. 具体的な観点からの考察と具体例

以上の考察は，学習準備点の構造を基盤にした論理的な観点からの考察であるが，ここでは，具体的な実例に即した考察を行なうことにする。

実際に学習準備域の構造を検討する場合は，Table 1 を作成したような手順によらないで，直接 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の状態と，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$の状態との対応を考えればよい。このとき，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ を，1または0によつて表わすことにすると，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ は，直接1または0を1対1の関係で対応させることはできない。したがつて，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ については，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の各種の能力の状態によつて規定される被教育者の群が，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ に関する学力検査問題で示す（平均）正答率を，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ の達成度と考え，これがある値以上を示すものを，準備ができているとするか，各 α_i について，

$$Q^*_{\alpha i} = \underset{l}{Max}\{P\alpha_i(\mathbf{A}_l) - P\alpha_i(\mathbf{A}_{l-1})\} \qquad (4)$$

$\mathbf{A}_l$: $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ $(S_i=1$ または $0,\ i=1, 2, \cdots, n)$ の理解の型を，α_iの達成度が低いものから順に並べたとき，l 番目にくる $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の理解の型。

$P\alpha_i(\mathbf{A}_l)$: 理解の型$(\mathbf{A}_l)$をもつ被教育者の群が示す学習目標 (α_i) の達成度

を満たす l 以上の理解の型をもつ被教育者の群について準備ができていると考えて，処理を進める方法が考えられる。

以下で示す例は，昭和 35 年度大阪府学力調査，中学校第2学年数学科の結果 (3) である。なお，この検査は，大阪府下の学力の実態を概観することを主要なねらいにしているために，方針のところで述べた条件すなわち，既有の能力 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と，新しい教材の理解の状態 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ との区分が明瞭でない。したがつて，ここでは，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ や $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ を適当に定め，これらの間にある関係を把握するという立場から，検討することにする。

$S_1 : (-6)\times(-5)=\square$

$S_2 : 2\frac{1}{7}\div 3\frac{3}{4}=\square$

$S_3 : 3a-2a^2+a+5a^2=\square$

$S_4 : \frac{3m-2}{3}-\frac{m-2}{2}=\square$

$\alpha_1 : (-8)-(-9)=\square$

$\alpha_2 : 4x-3=x-2 \quad x=\square$

$\alpha_3 : 6x^6\div 2x^2=\square$

$\alpha_4 : 4a^2b+3a\{a(a-b)-(a^2-b^2)\}=\square$

$\alpha_5 : \frac{3}{2}x-\frac{x-10}{3}=1 \quad x=\square$

α_6 : $0>a>-1$ のとき，a, $2a$, a^2, a^3 を大きさの順に並べよ。

上の S_1, S_2, S_3, S_4 および $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6$ に関する問題は，数および数計算，式および文字計算の領域に入るもので，ともに尺度性が強く，Table 1 に示す結果に近い特性をもつものと考えられる。いま，これらの関係を表示すると Table 2 のようになる。

Table 2 において，目標達成度 $f_{\alpha i}(S_1, S_2, S_3, S_4)$ の値が 0.50 以上のときに，学習の準備ができていると考えると，――で示した左側が，各既有の能力の体系 (S_1, S_2, S_3, S_4) がもつ学習準備域になる。また，(4)式を規準に用いると，〜〜から左側が学習準備域になる。この場合，$Q_{\alpha i}^*$ の値は Table 1に示すように，論理的には1になると考えられるために，この大きさの程度によつて，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ で，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$のそれぞれの学習準備点を，どの程度適確に把握しているかを示す標識になる。ここでは，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ が比較的大きい値を示している。さらに，……は，(S_1, S_2, S_3, S_4) に対して，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6)$ が尺度化可能な場合に考えられる準備域

Table 2 (S_1, S_2, S_3, S_4) から考えられる学習準備域

反応の型	既有の能力の体系				能力体系が(S_1, S_2, S_3, S_4)である生徒の比率	目標達成度					
	S_1	S_2	S_3	S_4	$\phi(S_1, S_2, S_3, S_4)$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
7	1	1	1	1	.06	.93	.96	.93	.64	.57	.29
6	1	1	1	0	.30	.93	.85	.87	.28	.32	.11
5	1	0	1	0	.04	.84	.84	.53	.05	.16	.05
4	1	1	0	0	.28	.69	.44	.37	.01	.07	.03
3	0	1	0	0	.03	.65	.29	.35	.00	.06	.01
2	1	0	0	0	.19	.44	.18	.20	.00	.01	.00
1	0	0	0	0	.09	.30	.09	.07	.00	.02	.00
計					.99						

調査対象数 500

である。これについては後述する。

Ⅳ 学習準備域の特性

既有の能力として，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ （$S_i=1$ または 0，$i=1,2,\cdots,n$）という体系をもつ被教育者のなかで，新しい教材 $(\boldsymbol{\alpha})$ に対して，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ （$\alpha_i=1$ または 0，$i=1,2,\cdots,m$）という理解の状態を示す者の比率を，

$$\phi_{(S_1, S_2, \cdots S_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

で表わすことにする。このとき，既有の能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ に対応する学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ を，

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})=(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)$$

とすると，(2) (3) 式から，論理的には，

$$\phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)=1 \quad (5)$$

となり，他の $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の（$\alpha_i=1$ または 0，$i=1,2,\cdots,m$）に対するどのような組合わせ（理解の状態）についても，

$$\phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=0 \quad (6)$$

$\alpha_i=1$ または 0，$i=1,2,\cdots,m$，ただし，(5)式のような条件（$\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0$）は除く。

ということができる。

したがつて，実際の資料から基礎的な能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ に対応する $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の学習準備域を求める場合は，与えられた能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ に対して，

$$\Phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)}{Max}\ \phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \quad (7)$$

$$\alpha_i=1 \text{ または } 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

を満たす $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ を求めればよい。

このとき，(5)式から $\Phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の値が1に近い程，学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ の把握は確実であるということができる。

以上が一般的な場合であるが，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ が $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ のある系列に関して，尺度化が可能で，その系列が

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

（α_i は α_{i+1} よりも低次と考える）

で与えられるときは，既有の能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ をもつ被教育者の学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ を

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})=(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)$$

とすると，$R_S(\boldsymbol{\alpha})$ の領域 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$ 内では，(2)式から

$$f\alpha_i(S_1, S_2, \cdots, S_n)=1 \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

となるから，

$$f\alpha_{i-1}(S_1, S_2, \cdots, S_n)-f\alpha_i(S_1, S_2, \cdots, S_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

となり，$R_S(\boldsymbol{\alpha})$ の領域外の $(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_m)$ では，(3)式から

$$f\alpha_i(S_1, S_2, \cdots, S_n)=0 \quad (i=k+1, k+2, \cdots, m)$$

となるから，

$$f\alpha_{i-1}(S_1, S_2, \cdots, S_n)-f\alpha_i(S_1, S_2, \cdots, S_n)=0 \quad (i=k+2, k+3, \cdots, m)$$

となる。しかし，学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ の境界では，

$$f\alpha_k(S_1, S_2, \cdots, S_n)-f\alpha_{k+1}(S_1, S_2, \cdots, S_n)=1$$

となる。したがつて，この場合は，上式を満たす (α_k) によつて，学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ を求める方法を考えることができる。すなわち，現実の資料では，

$$P\alpha_i(S_1, S_2, \cdots, S_n)=\underset{\alpha_i}{Max}\{f\alpha_i(S_1, S_2, \cdots S_n) - f\alpha_{i+1}(S_1, S_2, \cdots, S_n)\} \quad (8)$$

によつて，(α_i) を求めると，

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})=(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_i=1, \alpha_{i+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)$$

として，学習準備域が得られる。また，この場合，$P\alpha_i(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の値が1に近い程，学習準備域の把握は確実であるといえる。

(8)式は，Table 1 の $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の欄について，既有の能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の列を，右へ相隣る α_i, α_{i+1} 間の差の最大になるものを求めていくということを示している。Table 2 で……で示した左側が，以上のような方法によつて求めた学習準備域である。

Ⅴ 学習準備域における境界要素の特性

既有の能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ に対する学習準備域を $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$，学習準備域以外の領域を $(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ とすると，境界要素 (α_k) は，$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ と共通部分をもつとともに，$(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ とも共通部分をもつていると考えられる。すなわち，

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})\cap\alpha_k \fallingdotseq 0$$
$$\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})}\cap\alpha_k \fallingdotseq 0$$

したがつて，これまでに考察してきた(2)式や(5)式について，次のようなことがいえる。

$$1>f\alpha_k(S_1, S_2, \cdots, S_n)>0 \quad (9\text{-}1)$$

$$1>\phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)>0 \quad (9\text{-}2)$$

$$1>\phi_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-1}=1, \alpha_k=0, \cdots, \alpha_m=0)>0 \quad (9\text{-}3)$$

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-1}=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)=1 \quad (9\text{-}4)$$

ただし，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1})$ は$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$に含まれるが，$(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ には含まれない。また，$(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_m)$ は$(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ に含まれるが，$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ には含まれない。

上で，(9-4)式は，直接(5)式に対応するものである。また，(9-1)式～(9-3)式は，境界要素 (α_k) が1つの場合を考えたのであるが，境界要素が $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \cdots, \alpha_{kr})$ のように，多くある場合も同様である。

これから，$(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \cdots, \alpha_{kr})$ が境界要素である場合は，

$$1>\{\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-1}=1, \alpha_{k+1}=0 \cdots, \alpha_m=0)-\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-1}=1, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \cdots, \alpha_{kr}, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)\}>0 \quad (10\text{-}1)$$

$$\alpha_{ki}=1 \text{ または } 0,\ i=1,2,\cdots,r$$

$$1>\{\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-1}=1, \alpha_{ki}, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)-\phi_{(s_1, s_2, \cdots s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{ki}, \alpha_{k(i+1)}, \cdots, \alpha_{k(i+j)}, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)\}>0 \quad (10\text{-}2)$$

$$\alpha_{ki}=1 \text{ または } 0,\ i=1,2,\cdots,r-1$$
$$j=1,2,\cdots,r-i$$

などのことがいえるのに対し，境界要素を含まない $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_m)$ では，たとえば，

$$\{\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-2}=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)-\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_{k-2}=1, \alpha_{k-1}=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)\}=0 \quad (11)$$

となることが考えられる。

VI　具体的な観点からの考察と具体例

6.1.　学習準備域の特性とその抽出

まず，実際の資料について，(5)式を満たすような場合を考えてみると，それは，既有の能力の体系$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ に対して，きわめて容易に理解できると考えられる $(\alpha_{1.1}, \alpha_{1.2}, \cdots, \alpha_{1.t})$ や，これと反対に，きわめて理解が困難な $(\alpha_{m.1}, \alpha_{m.2}, \cdots, \alpha_{m.u})$ において，

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_{1.1}=1, \alpha_{1.2}=1, \cdots, \alpha_{1.t}=1, \alpha_{m.1}=0, \cdots, \alpha_{m.u}=0) \fallingdotseq 1$$

が認められる程度で，他のほとんどの場合には，境界要素や各種の誤差が混入してくるものと考えられる。これは，Table 2 をみても，うかがえることがらである。したがつて，(7)式によつて学習準備域を抽出する場合，この値が，どの程度の大きさになると，学習準備域とそうでない領域とを区別することができるかを，判定することが必要になつてくる。この場合の標識に関して，次のようなことが考えられる。

(1) $\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)} \phi_{(s_1, s_2, \cdots s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=1$

$\alpha_i=1$ または 0　$i=1,2,\cdots,m$

$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)}$ は $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ のすべての組合わせに関する和

(2) $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ について，$\alpha_i=1$ または 0, $i=1,2,\cdots,m$ の場合，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ におけるすべての組合わせの数は，2^m 個ある。

(3) したがつて，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ とが無関係な場合は，$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$の値が，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の状態に関係なく等しいと考えられるから，

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=1/2^m$$
$$\alpha_i=1 \text{ または } 0 \quad i=1,2,\cdots,m$$

ということができる。

これから，$\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の大きさ*や，mの大きさによつて，適当に，ある値 c_1 を定め，

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)>(1/2^m+c_1) \quad (12)$$

の場合に，これを満たす $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ を学習準備域とするという方法が考えられる。

なお，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ とが無関係ではないという観点から，学習準備域を決定する場合，c_1 の値としては，被教育者の数 N が大きいとき，

$$c_1 \fallingdotseq 3\sqrt{\frac{2^m-1}{2^{2m-1}N\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)}}$$

が考えられる。（これは，1%以下の危険率で，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ とが独立であるという帰無仮説を棄却する規準の近似値である**。）

6.2.　境界要素の特性とその抽出

境界要素 (α_k) の特性に関しては，(9-1)～(9-4)，(10-1)，(10-2) 式のようなことが考えられるが，(α_k) が境界要素であるかどうかを，比較的容易に判定する規準として，(9-1) 式をあげることができる。しかし，この場合，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ が (α_k) と無関係なときにも，

$$1>f\alpha_k(S_1, S_2, \cdots, S_n)>0$$
$$S_i=1 \text{ または } 0,\ i=1,2,\cdots,n$$

ということが起こる。したがつて，(9-1) 式のみでは，それが境界要素であるかどうかを判定することが，困難な場合が考えられる。

このような問題をさけるために，(10)式から

* $\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ は，反応型 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ をもつ被教育者の全体に対する比率を表わす。

** 安全側をとつて大きい値になるようにした。

$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m)$

$\quad -\phi'_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m)$

$\phi'_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m)$ は $\phi'_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m)$ と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m$ については同じ理解の型をもち，これに α_i を付加したもの

$\alpha_i=1$ または 0

を求めると，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ とが，互いに無関係な場合は，上式の値は

$$1/2^{m-1}-1/2^m=1/2^m$$

となるため，$\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と m の大きさによつて，適当にある値 c_2* を定め，

$$\underset{(\alpha_i)}{Min}\{\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m) -\phi'_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m)\}$$

$$\geq(1/2^m+c_2) \qquad \alpha_i=1 \text{ または } 0 \tag{13}$$

の場合に，これを満たす (α_i) を境界要素とするという方法が考えられる。

6.3. 具体例

さきにあげた学力検査の結果に基づいて述べることに

* c_1 と同様な観点から c_2 の規準を求めると次のようになる。

$$c_2 \fallingdotseq 3\sqrt{\frac{3(2^{m+1}-3)}{2^{2m+1}N\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)}}$$

Table 3 (S_1, S_2, S_3, S_4) から考えられる学習準備域および境界要素

S_1	S_2	S_3	S_4	$\phi(S_1,S_2,S_3,S_4)$	α_1	α_3	α_4	α_6	$\phi_{(s_1,\cdots,s_4)}(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)$	α_2	α_7	α_5	$\phi_{(s_1,\cdots,s_4)}(\alpha_1,\cdots,\alpha_4,\alpha_i)$
1	1	1	1	.06	1	1	1	1	.14			1	.14
												0	.00
					1	1	1	0	.43			1	.29
												0	.14
					1	1	0	1	.14			1	.04
												0	.10
					1	1	0	0	.18			1	.08
												0	.10
1	1	1	0	.30	1	1	1	1	.05		1		.05
											0		.00
					1	1	1	0	.20		1		.15
											0		.05
					1	1	0	1	.03		1		.03
											0		.01
					1	1	0	0	.54		1		.40
											0		.14
					1	0	0	0	.08		1		.05
											0		.03
1	1	0	0	.28	1	1	1	0	.25		1		.12
											0		.13
					1	1	0	0	.41		1		.18
											0		.23
					0	1	0	0	.10		1		.04
											0		.06
					0	0	0	0	.20		1		.07
											0		.13
1	0	0	0	.19	1	1	0	0	.12	1			.09
										0			.03
					1	0	0	0	.31	1			.05
										0			.26
					0	1	0	0	.08	1			.00
										0			.08
					0	0	0	0	.48	1			.03
										0			.45
0	0	0	0	.09	1	1	0	0	.07				
					1	0	0	0	.22				
					0	0	0	0	.71				

（注） 1. 右の列の上の .14 は $\phi_{(s_1=1, s_2=1, s_3=1, s_4=1)}(\alpha_1=1, \alpha_3=1, \alpha_4=1, \alpha_6=1, \alpha_5=1)$ の値であり，その下の .00 は $\phi_{(s_1=1, s_2=1, s_3=1, s_4=1)}(\alpha_1=1, \alpha_3=1, \alpha_4=1, \alpha_6=1, \alpha_5=0)$ の値である。以下同様。

2. (S_1, S_2, S_3, S_4)，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_i)$ の反応型は $\phi(S_1, S_2, S_3, S_4)$，$\phi_{(s_1, s_2, s_3, s_4)}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_i)$ の比較的大きい値を示すもののみを，とりあげた。

する。なお，ここでは，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ として，Table 2 の $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6)$ を中心に検討することにし，さらに，$\alpha_2, \alpha_7, \alpha_5$ を付加することにした。この場合の α_7 は次のようである。

α_7：1/10, −0.1, 0, 1/3, −0.01 を大きさの順に並べよ。

Table 3 の $\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_7, \alpha_5$ の欄で――を入れたのは(7)式を満たす $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6)$ と $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_i)$ の型である。また，(12)式にあげた $(1/2^m+c_1)$ を求めると，この値は，$\phi(S_1=1, S_2=1, S_3=1, S_4=1)$ の場合が最も大きく，0.25 となる。したがつて，―― で示したものは，いちおう，既有の能力体系 (S_1, S_2, S_3, S_4) に対する学習準備域を示していると考えることができる。

同様に境界要素について考えてみることにする。いま $\alpha_2, \alpha_7, \alpha_5$ のどれかが境界要素になつているとすると，(13)式の値は，$(1/2^m+c_2)$ よりも大きくなると考えられる。たとえば，既有の能力に対する反応型が $(S_1=1, S_2=1, S_3=1, S_4=1)$ のところでは，

$$\underset{(\alpha_5)}{Min}\{\phi_{(S_1=1,\, S_2=1,\, S_3=1,\, S_4=1)}(\alpha_1=1, \alpha_3=1, \alpha_4=1, \alpha_6=0)-\phi'_{(S_1=1,\, S_2=1,\, S_3=1,\, S_4=1)}(\alpha_1=1, \alpha_3=1, \alpha_4=1, \alpha_6=0, \alpha_5)\}=.43-.29=.14$$

となる。ところが (0.14) は $(1/2^m+c_2)$ の値 (0.20) よりも小さい。したがつて，(α_5) は，境界要素というよりも，準備域の要素であるとみることができる*。Table 3 では $(S_1=1, S_2=1, S=0, S_4=0)$ に対する (α_7) が，より境界要素的特性をもつと考えられる。

VII 考 察

7.1. 学習準備域の設定と教育作用の問題について

学習準備域というものは，この定義から明らかなように，ある能力をもつ被教育者が，特定の教育作用のもとで，どの程度まで，新しい学習目標に到達することができるか，という潜在的な可能性の範囲を問題にしている。したがつて，学習準備域の状態が明らかになると，個々の被教育者に対して，最大限，どの程度までは新しい教材を指導することができるか，ということが明らかになるために，これによつて，ティーチング・ステップにおけるステップサイズを決定することができ，学習指導の効率が高められていくものと考えられる。

しかし，ここで考えた学習準備域というものは，すでに特定の教育作用が被教育者に与えられ，その効果がどうであつたか，という結果に基づいている。したがつて教育作用が与えられない（考えられない）領域に関しては，そこにおける各種の能力をどこまで伸ばすことができるかという，潜在的な可能性を知ることはできない。また，教育作用として，具体的に与えることができたとしても，さらに，より的確な教育作用のもとでは，どのような潜在的な可能性が見出せるかということは，これではわからない。けれども，これまでに検討してきたような，被教育者の学習機構の状態に基づいて，より的確な教育作用の構成を考え，この作用のもとで潜在的な可能性を問題にするというように，逐次，これらの分野における問題を解明していくことができると考えられる。

以上のような考察は，ここで仮定した「教育作用は教科書的である」ということに矛盾する。しかし，上の仮定は，より一般的，概観的な観点から行なわれる学力調査（多くの学校を対象とした）の処理などには，比較的妥当なものであると考えられる。けれど，微視的な観点から学習準備域の状態を検討する場合は，教育作用を考慮に入れた検討が必要になると考えられる。

7.2. 学習準備域の有効性について

基礎的な能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ は，被教育者の状態から求めることができ，また，学習の目標 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ も，学習指導要領や教科書などによつて，実際には規定されているとみることができる。しかし，ここにあげたような方法で，学習準備域を規定する場合は，これらのなかから，問題になる要素を選択する必要が起こつてくる。したがつて，この場合の選択の規準が問題になる。

このとき，選択された要素が，適当なものであつたかどうかを示すひとつの標識としては，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ と $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の相関関係から，

$$L=\underset{(\alpha_i)}{Max} f_{(\alpha_i)}(S_1=0, S_2=0, \cdots, S_n=0) \quad (14)$$

$$U=\underset{(\alpha_i)}{Min} f_{(\alpha_i)}(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_n=1) \quad (15)$$

の値を求め，この値が

$$L=0 \quad (14')$$

$$U=1 \quad (15')$$

か，または，これに近い値をとるとき，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ や $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の選択は妥当であると考える。たとえば，(α_1) がきわめて容易なものであれば，

$$L\fallingdotseq 1$$

となり，逆に (α_m) が問題にならない程，困難なものであれば

$$U\fallingdotseq 0$$

となる。したがつて，この場合の準備域は，きわめて明

* $\{1/2^m+c_2\}$ の値の (.20) は危険率が 1% 以下の場合であるが，これを 5% にとると，(.14) となり，この規準からは，境界要素とみることができる。

確に把握され，(5)式に示した条件は完全に満たされるけれども，実際には，自明のことであるため，有効な情報を提供していないとみることができる。

したがつて，(14′)，(15′) 式を満たしていて，さらに(5)式を満たすような学習準備域は，より有効なものであると考えられる。しかし，学習指導という点から考えた場合，より多くの被教育者に，共通に認められるような学習準備域が問題になる。この標識としては，$\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ を用いることができる。

以上のような観点から，$\phi(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ が大きい値を示しているうえに，(5)式や(14′)，(15′) 式を満たしているものが，より有効な学習準備域であるということができる。

7. 3.　境界要素の特性と学習準備域の準備性について

(14′)，(15′) 式を満たすという条件のもとでは，学習目標として，特に容易なものや，困難なものは除外されるから，一般に境界要素が多く混入してくるとみられる。この場合，境界要素 (α_k) が，$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ ともつ共通部分と，$(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ ともつ共通部分の大きさが問題になる。いま，(α_k) が，ほとんどの部分で $(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ と共通領域をもつていたとすると，

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0) < .50$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ は $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ の要素

$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_m$ は $(\overline{R_S(\boldsymbol{\alpha})})$ の要素

となる。したがつて，(7)式は $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ とより多くの共通領域をもつ境界要素を含めた学習準備域を規定するとみることもできる。

また，(7)式からは，与えられた $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ に対して，1種類の学習準備域が考えられる。しかし，Table 3 からうかがえるように，学習の準備ができた状態をどうみるかによつて，そこに，準備性に関するいくつかの尺度が規定できると考えられる。すなわち，$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ や $f_{\alpha i}(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ の大きさによつて，準備性の程度を規定することが考えられる。

VIII　要　　約

ここでは，基礎的な能力の体系 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ をもつ被教育者が，ある教育作用のもとで新しい学習目標 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ に対して，どこまで到達できるか，到達できる領域はどこか，という点を問題にし，到達できる領域 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$ を学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ とよぶことにした。

この学習準備域 $(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$ は，たとえば，基礎的な能力の状態を $(S_1=1, S_2=1, \cdots, S_j=1, S_{j+1}=0, \cdots, S_n=0)$ とした場合，これを学習準備点 $(R(\alpha_j))$ としてもつ学習目標 (α_j) に対して，$(R(\alpha_j))$ で覆われるすべての学習準備点 $(R(\alpha_i))$ によつて規定される学習目標 (α_i) を含んでいると考えられる。

また，基礎的な能力として，$(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ をもつている被教育者のなかで，新しい学習目標を，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ という状態で理解している人の比率を，$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ で表わすと，学習準備域

$$R_S(\boldsymbol{\alpha})=(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)$$

に対して，論理的には

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1=1, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_k=1, \alpha_{k+1}=0, \cdots, \alpha_m=0)=1$$

となり，他のどのような $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の組合わせについても

$$\phi_{(s_1, s_2, \cdots, s_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=0$$

となる。したがつて，このような観点から，$(R_S(\boldsymbol{\alpha}))$は(7)式によつて抽出することもできる。さらに，学習準備域とそうでない領域との間にある境界要素については，(9)，(10)，(11)式のような特性を見出すことができる。

以上のようにして，学習準備域の構造の概要は，ほぼ明らかになるが，ここにあげた方法では，基礎的な能力 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ や，学習目標$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ の選定が基本的な問題になる。ここでは，選定の規準の標識として，(14′)，(15′) 式をあげ，これを満たすものは，ほぼ妥当な内容を示すと考えた。

＜追記＞

この研究について，名古屋大学教育学部白石教授のご指導をいただきました。ここで，あつくお礼もうしあげます。

文　　献

(1)　中嶽治麿：学習機構の解析に関する方法論的研究 I ―学習準備性(点)の解析(1)―. 教育心理学研究 1961, 9, 146―152.

(2)　中嶽治麿：学習機構の解析に関する方法論的研究 II ―学習準備性(点)の解析(2)―. 教育心理学研究 1962, 10, 11―19.

(3)　昭和 35 年度学力調査報告（中学校数学科第二学年）. 大阪府教育研究所研究報告集, 1961, 52～6, 1―29.

（1962年1月31日原稿受付）