155　Jap. J. of Educ. Psychol., 1986, 34, 155—158

資　料

相関係数を用いる研究において被験者数を決めるための簡便な表

南風原 朝 和*

TABLES FOR DETERMINING SAMPLE SIZE IN CORRELATIONAL RESEARCH

Tomokazu HAEBARA

Many educational and psychological researchers determine the sample size in their research without any guideline except for the vague "as many as possible" principle. This article presents easy-to-use tables for determining the sample size in a research involving the use of the Pearson product-moment correlation coefficient. To use the tables, the researcher needs to specify the expected size of the sample correlation and the desired width of the 95% or 99% confidence interval for the population correlation. The construction of the tables is based on the large sample theory with Fisher's Z transformation.

Key words : sample size, correlation, confidence interval, interval estimation.

問題と目的

教育心理学の研究においては相関係数（Pearson の積率相関係数）がしばしば用いられる。相関係数の算出と解釈を主目的とする研究もあれば，使用される測度の信頼性や妥当性の指標として相関係数を用いる研究もある。また，多くの変数が同時に扱われる場合には，それらの変数のすべての組合わせについて相関係数を算出することが，種々の多変量解析的手法の第一ステップとなる。本論文では，相関係数を用いるこのような研究において必要とされる被験者数の目安を与える簡便な表を作成し，研究者のための資料として提供することを目的とする。

被験者数の決定は，研究を計画する段階においてなされる重要な決定の1つであるが，実際の研究においては，被験者は多いほど望ましいということ以外には特別な指針も根拠もないままにその数が決められていることが多い。したがって，統計的根拠に基づいた被験者数決定のための利用しやすい表を作成しておくことは意義のあることであろう。

統計的根拠に基づいて被験者数を決めるためには，サンプルから母集団への統計的推論が被験者数によってどのような影響を受けるかを知る必要がある。相関係数に関する統計的推論としては，従来，無相関仮説の検定が多く用いられてきた。その“伝統”に従えば，適当な有意水準と対立仮説を設定し，必要とされる検出力（有意な相関が得られる確率）に応じて被験者数を決めるということになるかもしれない。しかし，渡部（1984）も指摘しているように，教育心理学の研究において，無相関仮説を立てることや，その仮説の検定結果のみに基づいて相関係数を解釈することが，どれほど意味をもつかは疑問である。

そのようなゼロ相関との比較という従来の枠組みを離れて，相関係数の大きさ自体を評価していこうとすると，統計的推論は，検定ではなく推定という形をとることになる。すなわち，サンプルにおいて得られた相関係数を母集団相関係数の推定値としてとらえ，信頼区間の幅でその推定値の精度ないしは統計的一般化可能性を表わすのである。相関係数の統計的有意性検定より区間推定を

* 新潟大学教育学部（Faculty of Education, Niigata University）

重視するこの立場は，最近では Humphreys (1985) や南風原 (1985) によって主張されている。本論文では，この区間推定を重視する考えに沿って，予想される相関係数の値と望まれる信頼区間の幅の2つから必要な被験者数を導き出すという方法を用いる。

表作成の方法

はじめに，ここで実際に用いる方法ではなく，標準的な統計のテキストにある図を利用して必要な被験者数を知る方法について簡単に述べておく。母集団相関係数の区間推定に関連して，たとえば芝・渡部 (1984, pp. 216—217) には，2変量正規分布に従う母集団からのランダムサンプルで得られた任意の相関係数から，母集団相関係数の95％および99％信頼区間の上限と下限を求めるための曲線が，被験者数3—8，10，12，15，20，25，50，100，200，400 について与えられている。したがって，その図を用いれば，予想される相関係数の値を固定して，望まれる幅の信頼区間を与える被験者数を逆に読みとることができる。ただ，この方法の場合，とびとびの被験者数（25を超えるものは50，100，200，400 の4通りのみ）についてしか曲線が与えられていないために内挿の必要があり，また，そもそも被験者数を決めるために用意されたものでないために図が使いにくいという問題点がある。それで，ここでは，必要とされる被験者数を直接的に与える表を，以下に述べるような相関係数の大標本理論（被験者数が多いときに成り立つ理論）を用いて作成することにした。

被験者数が多いときの相関係数に関する推論には，Fisher の Z 変換が利用できる。これは数学的には逆双曲線正接変換とよばれるもので，相関係数 r を次のように変換するものである。

$$Z=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+r}{1-r}=\tanh^{-1}r \qquad \cdots\cdots(1)$$

この変換された統計量 Z の母集団値を ζ とすると，ζ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間の上限 Z_U と下限 Z_L はそれぞれ

$$\begin{aligned} Z_U&=Z+z_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{n-3}\\ Z_L&=Z-z_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{n-3}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2)$$

で与えられる。ここで，n は被験者数，$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ は標準正規分布の上側確率 $\alpha/2$ の値で，たとえば信頼係数 $1-\alpha=.95$ のときは $z_{.975}=1.960$ となり，$1-\alpha=.99$ のときは $z_{.995}=2.576$ となる。

いま，予想される相関係数の値を r^* とすれば，ζ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間の上限と下限は被験者数 n のみの関数となるから，それぞれ $Z_U(n|r^*)$ および $Z_L(n|r^*)$ と表わすことができる。ここで我々が関心をもつのは ζ ではなく母集団相関係数 ρ であるが，その ρ の信頼区間の上限と下限は，この $Z_U(n|r^*)$ と $Z_L(n|r^*)$ に(1)の逆変換，すなわち双曲線正接変換 $\tanh x=(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$ を施すことによって与えられる。したがって，予想される相関係数の値 r^* が与えられたときの ρ の信頼区間の幅も n のみの関数となる。この幅を $w(n|r^*)$ とすると，

$$w(n|r^*)=\tanh Z_U(n|r^*)-\tanh Z_L(n|r^*) \cdots\cdots(3)$$

と書ける。ここで，望まれる信頼区間の幅を w^* とすれば，方程式

$$f(n)=w(n|r^*)-w^*=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

を n について解くことによって，必要な被験者数を知ることができる。

方程式(4)の解は公式の形で表わすことはできないが，Newton-Raphson 法を用いて

$$n_{i+1}=n_i-f(n_i)/f'(n_i) \qquad \cdots\cdots(5)$$

によって逐次近似することができる。ここで，n の添字は近似の繰り返しの回数を表わす。また，$f'(n)$ は $f(n)$ の導関数で，次の式で与えられる。

$$f'(n)=-\frac{1}{2}z_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-3)^{-\frac{3}{2}}\times\{\mathrm{sech}^2Z_U(n|r^*)+\mathrm{sech}^2Z_L(n|r^*)\} \cdots\cdots(6)$$

ここで，sech は双曲線余弦の逆数を与える関数 $\mathrm{sech}\,x=2/(e^x+e^{-x})$ である。なお(5)を用いる際には，初期値 n_0 を与える必要があるが，それは $n_0>3$ であればどんな値でもよい。ただし，逐次近似の途中で $n_i\leqq 3$ となる場合には(2)の第2項の計算ができなくなるので，これを $n_i>3$ となる値（たとえば $n_i=4$）と置き換える必要がある。

以上の方法で求められる解 n は一般には整数とはならないので，小数点以下を切り上げて整数化した値を最終的な解とする。

表の利用法

前節の方法で求めた被験者数 n を，予想される相関係数の値（0.00—0.95）と望まれる信頼区間の幅（0.05—1.00）に対して示したのが TABLE 1（信頼係数=0.95）と TABLE 2（信頼係数=0.99）である。負の相関係数が予想される場合には，その絶対値をとって表を利用すればよい。

たとえば，ある研究において2つのテストの得点の間に0.5程度の相関係数が予想されるとする。このとき，95％信頼区間の上下の限界値が大体 $r\pm0.1$ ぐらいにな

TABLE 1 予想される相関係数の値と望まれる信頼区間の幅から被験者数を決めるための表 (信頼係数=.95)

予想される相関係数の値	望まれる95%信頼区間の幅																			
	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95	1.00
.00	6147	1538	684	385	247	172	126	97	77	62	52	44	37	32	28	25	22	20	18	16
.05	6117	1530	680	383	246	171	126	97	76	62	51	43	37	32	28	25	22	20	18	16
.10	6025	1507	670	378	242	168	124	95	75	61	51	43	37	32	28	25	22	20	18	16
.15	5874	1469	654	368	236	164	121	93	74	60	50	42	36	31	27	24	21	19	17	16
.20	5666	1417	631	355	228	159	117	90	71	58	48	41	35	30	26	23	21	19	17	15
.25	5404	1352	602	339	218	151	112	86	68	55	46	39	33	29	25	22	20	18	16	15
.30	5092	1274	567	320	205	143	105	81	64	53	44	37	32	28	24	21	19	17	16	14
.35	4735	1185	528	298	191	133	98	76	60	49	41	35	30	26	23	20	18	16	15	14
.40	4339	1086	484	273	176	123	91	70	56	46	38	32	28	24	21	19	17	15	14	13
.45	3912	980	437	247	159	111	82	64	51	42	35	30	26	22	20	18	16	14	13	12
.50	3460	867	387	219	141	99	73	57	46	37	31	27	23	20	18	16	15	13	12	11
.55	2994	751	336	190	123	86	64	50	40	33	28	24	21	18	16	15	13	12	11	10
.60	2521	633	283	161	104	74	55	43	35	29	24	21	18	16	15	13	12	11	10	10
.65	2054	517	232	132	86	61	46	36	29	25	21	18	16	14	13	12	11	10	9	9
.70	1603	404	182	105	69	49	37	30	24	20	18	15	14	12	11	10	10	9	8	8
.75	1182	299	136	79	52	38	29	23	19	17	15	13	12	11	10	9	9	8	8	7
.80	802	205	94	56	38	28	22	18	15	13	12	11	10	9	8	8	8	7	7	7
.85	480	125	59	36	25	19	16	13	11	10	9	9	8	8	7	7	7	6	6	6
.90	229	62	31	20	15	12	11	9	8	8	7	7	7	6	6	6	6	6	5	5
.95	66	22	13	10	8	8	7	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5

TABLE 2 予想される相関係数の値と望まれる信頼区間の幅から被験者数を決めるための表 (信頼係数=.99)

予想される相関係数の値	望まれる99%信頼区間の幅																			
	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95	1.00
.00	10616	2653	1179	663	424	294	216	165	130	105	87	73	62	53	46	40	36	32	28	25
.05	10563	2640	1173	659	422	293	215	164	130	105	86	72	62	53	46	40	36	32	28	25
.10	10405	2601	1155	650	415	288	212	162	128	103	85	71	61	52	45	40	35	31	28	25
.15	10144	2536	1127	633	405	281	206	158	125	101	83	70	59	51	44	39	34	31	27	25
.20	9784	2446	1087	611	391	271	199	152	120	97	80	68	57	49	43	38	33	30	27	24
.25	9331	2333	1037	583	373	259	190	146	115	93	77	65	55	47	41	36	32	29	26	23
.30	8792	2198	977	550	352	244	180	138	109	88	73	61	52	45	39	35	31	27	24	22
.35	8176	2045	909	512	328	228	168	128	102	82	68	57	49	42	37	33	29	26	23	21
.40	7493	1874	834	469	301	209	154	118	94	76	63	53	45	39	34	30	27	24	22	20
.45	6754	1690	752	424	272	189	140	107	85	69	57	49	42	36	32	28	25	22	20	18
.50	5975	1495	666	376	241	168	124	96	76	62	52	44	38	33	29	25	23	21	19	17
.55	5168	1294	577	326	210	147	108	84	67	55	46	39	33	29	26	23	21	19	17	16
.60	4353	1091	487	276	178	125	93	72	57	47	40	34	29	26	23	20	18	17	15	14
.65	3546	890	398	226	146	103	77	60	48	40	34	29	25	22	20	18	16	15	14	13
.70	2767	696	312	178	116	82	62	48	39	33	28	24	21	19	17	16	14	13	12	11
.75	2039	515	232	133	88	63	48	38	31	26	23	20	18	16	14	13	12	11	11	10
.80	1384	352	160	93	62	45	35	28	24	20	18	16	14	13	12	11	10	10	9	9
.85	826	213	99	59	41	31	24	20	17	15	14	12	11	11	10	9	9	8	8	8
.90	393	105	52	33	24	19	16	14	12	11	10	9	9	8	8	8	7	7	7	7
.95	112	35	20	15	12	10	9	9	8	8	7	7	7	6	6	6	6	6	6	5

るような精度がほしいとすれば，望まれる信頼区間の幅は 2×0.1=0.2 ということになる（信頼区間の上下の限界値は，一般には標本相関係数から等距離にあるわけではないが，このように $r\pm w/2$ と考えるほうがわかりやすいと思われる)。この2つの値をもとにして TABLE 1 を見ると，$n=219$ という被験者数が必要であることがわかる。ここで，もし95%信頼区間の幅が0.3ぐらいであってもよいと考えるなら，被験者数は $n=99$ でよいことになる。

どの程度の相関が予想されるかということは，類似した集団における類似した変数間の関係についての他の研究の結果や予備調査の結果などから総合的に判断されるものである。しかし，予想はあくまでも予想であり，実

際に得られる相関係数はそれより高いことも低いこともあり，その結果，望んでいたよりも広い幅の信頼区間になってしまうということも当然起こり得る。このような不確実性は，研究を計画する段階での決定では避けることのできない性質のものである。もし，まったく予想がつかないとか，あるいは得られる相関係数の値にかかわりなく一定の幅以内の信頼区間が欲しいというのであれば，予想される相関係数の値をゼロとして表を見ればよい。それは，同一の区間幅に対しては，相関係数の絶対値が低いほど多くの被験者を必要とするからである（ゼロ相関の仮説は被験者が少ないときほど採択されやすいが，母集団相関がゼロであることの証拠を得るには，逆に最も多くの被験者を必要とするということである）。

必要とされる推定の精度を望まれる信頼区間の幅として表わすには，以下のように，標本相関係数 r が母集団相関係数 ρ にどの程度近ければ ρ の推定値として満足できるかを考えればよい。たとえば，望まれる95%信頼区間の幅を設定するには，標本ごとに変動する r の少なくとも95%のものが ρ から $\pm c$ 以内に入れば満足できるというような値 c を決める。そして，その c を2倍した値を望まれる95%信頼区間の幅とするのである。このやり方は，r が ρ から $\pm c$ 以内に入るということ，つまり $\rho-c<r<\rho+c$ と，r を中心とする幅 $2c$ の区間が ρ を含むということ，つまり $r-c<\rho<r+c$ とが同じであることに基づいている。先に述べたように，ρ の信頼区間の上下の限界値は r から等距離にあるのではないが，望まれる区間幅を決めるという目的のためにはそのようにみなしても実際上差し支えない。なお，上記の c の値が ρ によって異なるというのであれば，ρ の値として，先に考えた予想される相関係数の値をあてればよい。

ところで，前節で述べたように，ここでは2変量正規分布からのランダムサンプルをとることに加えて，サンプルが大きいことが仮定されている。Fisher の大標本理論を利用するためにどの程度の大きさのサンプルが必要かについて，Hays (1981) や竹内 (1975) は10人ぐらいの被験者があればよいと示唆している。被験者数がそれより少ない場合に母集団相関係数の信頼区間を求めるには，Fisher の Z 変換による近似的な方法ではなく，前に述べたような図を用いる正確な方法を適用すべきである。このとき問題になるのは，近似的な方法に基づいて作成した本論文の表から得られる被験者数と，正確な方法で必要とされる被験者数が一致するかということである。そこで，被験者数が5前後のときと10前後のときについて，予想される相関係数の値をいろいろ変えながら，Z 変換に基づく信頼区間の幅と図から得られる信頼区間の幅とを比較してみた。その結果，信頼係数が0.95の場合でも0.99の場合でも，近似による誤差は被験者数に換算して1以内におさまるということがわかった。つまり，たとえば表から10人の被験者が必要ということになったとき，実際には9人でよかったり，逆に11人必要だったりということはあるが，それ以上の食い違いは見られなかったのである。したがって，ここで提示した表にある $n<10$ の値も十分に正確なものであると言えよう。

引用文献

南風原朝和　1985　相関係数の解釈を中心に　日本教育心理学会第27回総会シンポジウム“教育心理学研究における統計的方法再考”　教育心理学年報第25集　Pp. 25-27.

Hays, W.L. 1981 *Statistics*. 3rd ed. ホルト・サウンダース・ジャパン

Humphreys, L.G. 1985 Correlations in psychological research. In D.K. Detterman (Ed.), *Current topics in human intelligence*. Vol. 1. *Research methodology*. Norwood, N.J.: Ablex. Pp. 3-24.

芝　祐順・渡部　洋　1984　統計的方法Ⅱ　推測　増訂版　新曜社

竹内　啓　1975　確率分布と統計解析　日本規格協会

渡部　洋　1984　測定・評価部門論評　教育心理学年報第23集　p. 62.

（1985年10月11日受稿）