

分数概念の習得過程に関する発達的研究*

吉 田 甫** 栗 山 和 広***

A DEVELOPMENTAL ANALYSIS ON THE ACQUISITION PROCESS OF THE CONCEPT OF FRACTION

Hajime YOSHIDA AND Kazuhiro KURIYAMA

This developmental study examined an acquisition of the concept of fraction. A total of 164 children were administrated six tests over a period of 3 years. Two principal incorrect strategies were found concerning the magnitude of fractions. The first made Rule S, in which children ordered fractions with a larger numerator as a smaller magnitude for problems with the same denominators. Another one made Rule L, in which children ordered the fractions with larger denominators as a greater magnitude for problems with the same numerators. The cross-sectional and longitudinal analyses on these strategies suggested four processes of acquiring the concept of fraction. The first was the process having informal knowledge on fraction before learning the concept formally. The second was one considering the concept of fraction based on children's existing knowledge. The third was a process judging the concept based on an incorrect concept of fraction. The last process consisted on the acquisition of a correct concept. These processes were discussed in terms of interacting process of the existing knowledge with a new concept.

Key words : acquisition process, concept of fraction, incorrect strategies, four processes, existing knowledge.

小学校算数の中で、学習することが困難な概念の1つとして分数があげられる。分数は子どもが初めて出会う端数の概念であり、中学校で学習する有理数へとつながっていくきわめて重要な概念である。しかし、これをかなり理解しにくい概念であると考え子どもが多いし、さらに高校生になっても分数の計算ができない生徒がいるということは、さまざまな調査が指摘しているところでもある。

なぜ分数は、子どもにとって学習することが困難なのであろうか。この疑問に答えることは、実践という点からも重要な含みがある。それは、分数のカリキュラムをどのように構成し、授業をどのように展開するかといった現場からの切実な要求に応えることにつながっている。現在、こうした疑問に対して数学教育という立場から、むずかしさの要因についての考察がなされている(石田, 1985)。それによると、以下の3つの要因があげられている。第1は、分数概念の意味の多様性、第2には、分数の意味の複雑性、第3に分数の表記の複雑性の3つである。こうした要因は、これまでの数学教育の中で伝統的に指摘されてきた要因であり、いずれも分数という概念が持つ性質そのものに基づいた教科の論理からの指摘である。

しかし、こうした指摘には、子どもがどのように学

* 本研究は、第1著者に対する昭和60年度および62・63年度科学研究費補助金(一般研究C)(課題番号60510068, 62510061)「分数概念の理解過程の変容に関する縦断的分析」および第2著者に対する昭和63年度発達科学研究教育奨励賞「児童の分数概念の理解過程の分析と教授的介入」の助成を受けて行われた。

** 宮崎大学 (Miyazaki University)

*** 宮崎女子短期大学 (Miyazaki Women's Junior College)

習していくかというもっとも肝心な視点が欠落している。このためか、それこそ無数と言っていいほどに公表されている授業実践にも、そうした視点をおりこんだ報告はきわめて少ないといってよい。

こうして、子どもがなぜ分数をむずかしく思うのかを追究する認知心理学的立場からの研究が必要になる。この立場からの研究は、単に実践への貢献だけでなく、理論的にも重要な含みがある。それは、知識の獲得過程に関する問題である。つまり、分数を学習する以前の子どもの数にかかわる知識系は、すべて整数の知識体系で占有されているはずである。端数の典型的な概念である分数を学習することで、それまでの既有知識にどのような変化が起こり、どのようにして新しい概念が同化されていくかを検討できると期待される。したがって、子どもがどのように分数を習得するかという本研究のテーマは、知識習得の過程を研究するには最適な材料といってよいだろう。

最近外国では、数に関する研究はきわめて盛んであるが、それらの多くは、どちらかといえば、日本の子どもにとっては比較的習得することが容易なたし算やひき算といった概念が研究の対象となっている。そうした研究でとりあげられている知識の習得過程の中でも重要なことは、ある領域において手続的知識と概念的知識という2種類の知識を獲得することであると主張されている (Hiebert & Lefevre, 1986; Carpenter, 1986)。手続的知識とは、形式的な記号の操作についての知識であり、概念的知識とは、いくつかの情報を相互に関連づけた意味的な知識である。算数の知識習得においては、この2種類の知識を意味的に関連づけることが重要であると考えられている。そこでの基本的なメカニズムを正確に規定することは難しいが、本質的には Piaget (1960) が述べたように、すでに獲得している既有知識の中へ新しい概念を統合する過程であると考えられる。

分数を対象として、しかもこうした視点を背景にした研究となると、きわめて少数の報告しか見られない (Behr, et al., 1984; Behr, et al., 1985; Hunting & Sharpley, 1988; Pothier & Sawada, 1983)。しかし、残念なことに、これらの研究は、なぜ分数という概念がむずかしいかという問題を追究しているものではない。

小数を対象とした研究に関しては、最近報告が増えており (Hiebert & Wearne, 1986; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985; Resnick et al., 1989), ここでは知識習得に関する先述の問題が検討されている。しかし、小数と分数ではかなり意味が異なる。その最大のものは、小

数は数の10進法性にしたがうが、分数はそうでないという点であろう。ここに分数を独自に検討する必然性がある。

認知心理学的視点から、Yoshida & Kuriyama (1988) は、以下のような要素が、分数概念の理解を困難にしていると指摘している。それらは、分数の大小関係、全体としての1の概念 (分数における等分割を含む)、部分-全体関係、計算能力などである。

これらの要素の内、分数の大小関係については、Yoshida & Kuriyama (1988) が興味ある報告をしている。彼らは、分数の大小関係に対する子どもの方略が彼らの既有知識から引き出されていることを示唆している。彼らは、子どもが分数の大きさを判断するとき、おもに2つの誤った方略があることを見いだした。第1は、同分母で異分子の問題を比較する状況でみられるもので、分子の大きさが大きくなるほど、分数の大きさは小さくなると考える方略である (大きくなれば小さくなる, smaller という意味で、ルールSと呼ぶ)。第2は、異分母で同分子の問題でみられる方略であり、分母の大きさが大きくなるほど、分数の大きさも大きくなるという方略である (大きくなれば大きくなる, larger という意味で、ルールLと呼ぶ)。

これらの誤った方略を見ると、ルールLは分母が大きくなるほど分数の大きさも大きくなるというものであり、これは整数の知識とぴったり一致している。このことから、ルールLは整数の知識にしたがった方略であることが仮定された。一方、ルールSは分子が大きくなるほど分数の大きさは小さくなるというもので、これは全体を分割するほど1つ分は小さくなるという分数の概念をある意味で反映したものであるとみなされる。このことから、ルールSは分数の誤った知識を反映した方略であると仮定された。

本研究の目的は、子どもが学校で分数単元の授業を受けることによって、分数概念の重要な要素である大小関係に関する知識が、どのように変化するかを調べることにある。分数単元は、3年で初めて導入され6年までの4年間かかって教えられる概念である。そこで、分数単元の授業の前後の子どもの理解の様子を同一の子どもを3年間追跡することから、分数の大小に対する理解が教授的介入によってどのように変化し、知識の統合過程がどのように進行するかを検討する。

方 法

被験児 宮崎市内のO小学校の初年度3年生221名が、対象者となった。本研究は、縦断的研究であるの

で、3年間にわたる合計6回のテストすべてに参加した164名が、分析の対象者となった。

材 料 分数概念を構成するテストの内容は、以下のとおりである。(1)分数の大小関係、(2)計算技能の2つである。テストの形式は学年によって少し異なっていたが、基本的な内容は以下のとおりであった。

(1)分数の大小関係では、3つ以上の分数の大小関係の判断を求める並べかえ課題が用いられた。ただし、3年生の事前テストではまだ分数概念を学習していないため、整数の形式で分数の大小のテストが与えられた。その例としては、「1つのチョコレートを、2人で同じ大きさに分けるときと、3人で同じ大きさずつ分けるときでは、どちらの方が1人分は大きくなるでしょう」というもので、問題数は3問である。

3年生の事後テストから5年生の事後テストまでは、同一の形式の問題が用いられた。つまり、同分母で異分子(同一異と略する)の3つの分数についての並べかえ課題と、異分母で同分子(異一同と略する)の3つの分数の並べかえ課題である。問題数は、3年生の事後テストのみ同一異4問、異一同3問で、それ以後のテストではすべて2問ずつであった。

4年生の事後テスト以後では、異分母で異分子(異一異と略する)の形式の問題が追加された。この型の問題数は、すべてのテストをとおして3問であった。これらの問題例の一部は、同一異と異一同のタイプとともに、TABLE 1 に示されている。

TABLE 1 本実験で使った課題の一部

次の数を小さい順に並べましょう。

0, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, 1	(同分母一異分子)
0, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$, 1	(異分母一同分子)
1, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{6}$, 0	(異分母一異分子)

(2)計算では、各学年で習得する計算内容について4問から10問の問題が出題された。3年生事後テストと4年生事前テストでは、同分母のたし算とひき算問題が用いられたが、4年生の事後テストと5年生の事前テストでは、整数部分からかりてくるひき算問題も使用した。5年生の事後テストでは、通分を必要とする異分母のたし算とひき算も問題に含められた。

手 続 手続は、単元の授業の前の事前テスト、分数単元の授業、その後に事後テストという流れをとった。

事前テストは、原則的に各学年の分数単位のおよそ2か月前、つまり1986年、1987年、1988年の各9月中旬から下旬にかけて実施された。テストは、通常の授業時間に算数テストという形で一斉におこなわれた。テスト終了後に、一人の子ども毎に方略の推定をおこなった。これらの分析が終わった後、各クラスの担任教師に事前テストの分析結果についてのフィードバックが与えられた。さらに、事前テストの結果を基にして、分数の単元をどのように教えるかということで、著者らを含めた大学側の研究者との話し合いがおこなわれた。単元の授業に対しては、著者らが録画しながら観察することを原則とした。事後テストは、分数単元が教授されたおよそ1週間後に実施された。このような形式の繰り返しによって、3年生が5年生になるまでの3年間にわたって研究が続けられた。

各学年の単元内容と大まかな教授方法は、以下のとおりであった。3年生では、まず分数の意味として、テープや数直線をつかって $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{10}$ といった簡単な分数の意味が教えられた。次に、分数の大きさとして、1は $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$ であることや $\frac{1}{5}$ と $\frac{3}{5}$,あるいは $\frac{2}{4}$ と $\frac{2}{3}$ などとの大きさの比較などが教えられた。最後に、同一異のパターンを利用した簡単なたし算とひき算が導入された。この単元の授業時間数は、1クラス平均して10時間であった。

4年生では、まず分数のタイプとして、真分数、仮分数、帯分数が導入された。その後に、等しい分数の意味として、たとえば、 $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{4}$ とは等しいといったことが教えられた。最後に、分数のいろいろのタイプを使ったたし算とひき算の計算が教えられた。この単元の授業時間数は、平均10時間であった。

5年生では、分数の新しい側面が導入された。つまり、分数は分子を分母でわると小数になること、次に、約分は分数の分母と分子を同じ数でわって、分母の小さい分数にすること、および通分は分母の違ういくつかの分数を分母が同じ分数になおすことが教授された。また、分数と整数および小数の関係についても言及し、最後に異分母のたし算とひき算が教えられた。この単元の授業時間数は、平均して18時間であった。

誤り方略の判定 大小関係について子どもがどのような方略をもっているかは、Yoshida & Kuriyama (1988) にしたがった。

異一異の問題では、分母と分子がそれぞれ異なるために、このルールSやLとはやや異なる方略がみられたが、基本はこれらのルールと同一であった。つまり、分母または分子のどちらかの数のみに注意し残りの数

を無視して、注意した数の大きさで分数の大小を決める方略である。分母と分子、それにルールSまたはLの2つの要因から計4つの方略が観察された。ルールC1は、分母を無視して分子が大きくなれば分数の大きさは小さくなる方略である。ルールC2は、分子が大きくなれば分数の大きさは大きくなる方略である。ルールC3は、分母が大きくなれば分数の大きさも大きくなる方略、ルールC4は分母が大きくなれば分数の大きさは小さくなる方略である。この内容から分かるように、ルールC1とC4はルールSと同じ論理が控えており、ルールC2とC3はルールLと同じ論理によっている。

児童のタイプ分け 大小関係における並べかえ課題を基準にして、それぞれのルールをもつ児童を以下の群のいずれかに分類した。

(1)正答群：正答率が80%以上で、かつ誤り方略が1以下の者。

(2)S群：ルールSの方略が2以上で、かつルールLが1以下の者。

(3)L群：ルールLの方略が2以上で、かつルールSが1以下の者。

(4)SL群：ルールSとLの両方とも2以上の者。

(5)他群：上記の分類のどれにも入らない者。

なお、4年の事後テスト以後では、異一異のパターンが導入されたので、この型の問題についても、同一異、異一同のパターンと同じタイプ分けをおこなうことができた。

結果と考察

各テスト時期における児童の方略群の割合（横断的分析）

まず、3年の事前テストでは整数形式の問題が用いられたが、ここでは86%もの子どもが正答群として分類された。L群には7%、残りはその他群であった。こうして、ほとんどの子どもは、分数を学習する以前にも、その基本となる概念を理解していることが分かる。さらに、分数単元を学習した後でおこなわれた整数形式による事後テストでは、L群は皆無となり正答群は99%にも達していて、子どもの既有知識に合致した形で問題が出題されると、全員がきちんとその意味を理解できることを示唆している。

次に、3年の事後テスト以後の分数の記号の形式をとってテストされた結果を見てみる。同一異と異一同タイプに対する反応に基づいた子どもの分類は、TABLE 2 に示されている。TABLE 2 は同一の子どもを用いているので、 χ^2 検定は各テスト時期におけるそれ

ぞれの方略群について行った。3年の事前テスト($\chi^2=228.96$, $df=4$, $p<.001$)、4年の事前テスト($\chi^2=69.21$, $df=4$, $p<.001$)、4年の事後テスト($\chi^2=214.32$, $df=4$, $p<.001$)、5年の事前テスト($\chi^2=219.64$, $df=4$, $p<.001$)、5年の事後テスト($\chi^2=350$, $df=4$, $p<.001$)とも明らかに有意であった。

TABLE 2 同一異、異一同問題の各テスト時期における方略群の割合

	正答群	S群	L群	SL群	他群
3年事後	.65(106)	.03(6)	.24(39)	.06(9)	.02(4)
4年事前	.17(27)	.16(26)	.45(74)	.07(12)	.15(25)
4年事後	.64(105)	.10(17)	.19(31)	.01(2)	.06(9)
5年事前	.65(107)	.09(14)	.18(29)	.04(7)	.04(7)
5年事後	.78(128)	.05(9)	.12(19)	.03(5)	.02(3)

(注) () 内は人数である。

これらのデータから、どのようなことがいえるだろうか。まず、分数単元を学習する以前のテストでは86%もの正答群がいたので、3年で単元を学習した後ではさらに正答群が増えると考えられた。しかし、TABLE 2 から明らかなように、3年の事後テストでの正答群は65%に落ち込んでいる。その分、L群が24%もの増加となっている。こうして、3年で記号系としての分数を学習することで、分数の大きさという基礎的な概念が理解されたとはいえない傾向が見いだされた。

さらに、この段階での分数の理解はそれほど安定したものではないということが、およそ10か月後に実施された4年生の事前テストから明らかになっている。ここでは、3年の事後テスト時とはかなり異なる様相がみられる。TABLE 2 からも見られるように、正答群は17%と極端に減少している。その代わりに、L群は、3年の事後テストから4年の事前テストにかけて24%から45%へと大きく増加しており、S群も3%から16%へと増加している。

これらの結果は、子どもは分数という新しい概念に接するまでは、その基本的な意味はきちんと理解していたが、学校で分数を学習することが、整数系で占められている既有知識の中に端数としての分数概念を取り込むことができなかったことを示唆するものである。つまり、正答群は、3年の事後テストでは65%に減少し、4年の事前テストでは17%までも低下している。その代わりに、整数の知識の反映であるルールLが大きく増加しているということから、10か月間というかなり長い間分数を学習しないうちに、それまでの既有知識である整数的な知識に戻ってしまったことを

意味するものであろう。

その後、4年生で分数単元を再び学習することによって、全体の傾向はかなり変化した。正答群は、4年生の事前テストの17%から事後テストでは64%へと大きく増加している。その代わりに、事前テストで45%もいたL群が、事後テストでは16%へとかなり減少している。また、事前テストで16%いたS群は、事後テストでは10%へと減少している。こうした結果は、子どもが、整数の知識からではなく分数の知識という点からこの概念を理解し始めたことを示している。そうした変化をもたらしたのは、4年生で学習する分数の内容と関連しており、とくに分数のいろいろとして真分数、仮分数、帯分数と、等しい分数などが教えられることによって、分数への理解は深まり、整数の知識をある程度克服できたと考えられる。

4年生での分数の学習が終わってから5年生で分数を学習するためには、再び10か月間ほどの空白がある。3年生から4年生にかけての分数量学習の空白期間では、既有知識への後退現象が観察された。しかし、4年生から5年生にかけてはそうした傾向は見られなかった。このことから、2年間にわたって分数を学習することで、これを学習しない空白期間があっても、すぐに既有知識に戻ってしまうようなことはなく、ある程度分数概念が知識の中に定着してきていることを示唆している。

5年生での分数単元は、分数の概念的な意味というよりも、計算手続としての通分を中心におよそ1か月にわたって教えられる。教師による指導によって子どもが学習する内容が規定されているとすれば、分数の大きさの理解は5年では変化はないと期待される。しかし、実際には正答群は78%にも達して、L群やS群はわずかではあるが減少している。こうして、手続的な知識を学習することによっても、ある程度分数の大きさへの理解は進むことが示された。

さて、4年生の事後テストでは、新たに異一異問題が追加された。手続のところではC1群、C2群、C3群、C4群の4つの群に分類できると述べた。実際には、4年生の事後テストでは、C3群は5人、C4群は1人がいただけで、残りの子どもは分子に着目したC1とC2群に分類された。その後のテストでも、こうした傾向はほぼ同じであった。C3のルールは、C2と同じくルールLと同じ意味であることは先述したとおりであり、人数も少ないので、C2とC3を一括してL群とした。同じ理由で、C4群はC1群を一括して、S群とした。

異一異タイプの問題での結果は、TABLE 3 に示されている。TABLE 3 は同一の子どもを用いているので、 χ^2 検定は各テスト時期におけるそれぞれの方略群についておこなった。4年の事後テスト ($\chi^2=24.13$, $df=3$, $p<.001$)、5年の事前テスト ($\chi^2=28.8$, $df=3$, $p<.001$)、5年の事後テスト ($\chi^2=93.49$, $df=3$, $p<.001$) とも明らかに有意であった。

TABLE 3 異一異問題における方略群の割合

	正答群	S群	L群	他群
4年事後	.32(53)	.37(60)	.16(27)	.15(24)
5年事前	.35(57)	.34(56)	.22(36)	.09(15)
5年事後	.56(91)	.23(38)	.17(28)	.04(7)

(注) () 内は人数である。

このことより、TABLE 2 の4年の事後テストから示唆される子どもがかなり分数を理解しているという傾向は、彼らの真の理解の姿を反映したものではないことが、分かる。つまり、異一異タイプの問題になると、正答群は低下し、S群が急激に増加するのである。この傾向は、5年生の事前テストまではほぼ同じである。しかし、先述したように5年生で通分の計算を学習した後では、正答群は半数をこすまでになる。しかし、5年生の事後テストにおいてさえ、誤った方略をもつ子どもは合わせると40%になっている。なお担任教師によれば、通分の計算を学習する前に、この異一異タイプの問題はできないのではないかという疑問が寄せられた。しかし、分数の大きさを量としてきちんと理解していれば、このタイプの問題でも、3年生以後で可能であるとわれわれは考えた。実際、通分を学習する以前のテストでも、30%を超す子どもが正しくこのタイプの問題に答えることができていた。

TABLE 2 と TABLE 3 の結果から、興味ある違いがみられる。それは、まず同一異や異一同タイプの問題では、4年生の事前テストまではL群が多いが、その後は誤った方略群は低下する。ところが、異一異タイプの問題では、4年生の事後テスト以後では、ルールSが誤った方略の主流となっている点である。この結果は、整数から構成されていた既有知識がどのように変化していくかを、ある程度示唆している。つまり、3年で分数の単元を学習しても、子どもは分数を分数概念として捉えるというよりも、整数の知識から捉えている。しかし、4年でさらに分数の単元を学習することで、整数の知識というよりも分数に近い知識をもつに至るという過程である。こうした過程が妥当かどうかを検討するために、以下の縦断的分析を行ってみる。

テストごとの方略の変化（縦断的分析）

ここでは、それぞれの子どもが、テストを通してどのように変化したかを縦断的に検討する。この縦断的分析をおこなう際には、2種類の分析が可能となる。1つは、あるテストから次のテストにかけての変化を明らかにするデータである。もう1つは、3年間にわたるすべてのテストを通して、それぞれの子どもがどのように変化したかを明らかにするデータである。

1. 第1の分析。3年生の事前テストとそれ以後のテストでは、分数の大小関係を調べるテスト形式が異なるので、3年の事前テストは、本分析からは除外する。まず異一同、異一異タイプの問題において、3年生の事後テストである群に分類された子どもが、4年の事前テストではどの群に変化したかその割合が、TABLE 4の1段目に示されている。4年の事前テストから事後テストへの変化が2段目に、4年の事後テストから5年の事前テストへの変化が3段目に、5年の事前テストから事後テストへの変化が最後の段に示されている。なお、これらのデータは、各セルの値に0があるので、統計的検定は行わなかった。

TABLE 4 同一異、異一同問題における各テスト時期毎の変化

		4年事前				
		正答群	S群	L群	SL群	他群
3年事後	正答群 (106)	.21	.16	.40	.05	.18
	S群 (6)	0	.17	.50	.33	0
	L群 (39)	.08	.18	.51	.10	.13
	SL群 (9)	.22	.11	.45	.11	.11
	他群 (4)	0	0	1.00	0	0
		4年事後				
		正答群	S群	L群	SL群	他群
4年事前	正答群 (27)	.85	.04	.07	0	.04
	S群 (26)	.77	.15	.08	0	0
	L群 (74)	.51	.12	.29	.01	.07
	SL群 (12)	.50	.17	.17	.08	.08
	他群 (25)	.72	.04	.16	0	.08
		5年事前				
		正答群	S群	L群	SL群	他群
4年事後	正答群 (105)	.80	.04	.09	.05	.02
	S群 (17)	.47	.23	.18	0	.12
	L群 (31)	.33	.10	.45	.06	.06
	SL群 (2)	.0	.50	.50	0	0
	他群 (9)	.56	.22	.11	0	.11
		5年事後				
		正答群	S群	L群	SL群	他群
5年事前	正答群 (107)	.88	.04	.07	.01	0
	S群 (14)	.65	.07	.07	.14	.07
	L群 (29)	.49	.07	.38	.03	.03
	SL群 (7)	.58	.14	0	.14	.14
	他群 (7)	.86	.14	0	0	0

(注) () 内は人数である。

以下、短く TABLE 4 から引き出される傾向を述べてみる。分数を最初に学習してその後10か月ほどこの学習から離れている3年事後から4年事前にかけては、正答群の半数近くがL群に後退している。また、LやS群も、その傾向は同じである。

しかし、4年で再度分数を学習すると、正答群が正答群に留まるのは当然だが、それぞれの誤った方略群もかなり正答群に移行している。ただ、単元の学習をした後でも、L群のみに同じ群に留まる傾向が見られる。

4年で学習して再び10か月ほどの分数に関する空白期間があるが、この間に生じていることは、3年で学習した後の空白期間でみられた傾向とかなり類似している。つまり、L群は半数ほどが同じ群として分類されている。S群でも、同じ群に留まるものが23%見られ、ルールLに後退するものも18%見られる。ただし、この傾向は3年事後から4年事前にかけて現れたものほど、顕著ではない。

しかし、5年でおおよそ1か月にわたって分数を学習すると、誤り方略群がほとんど正答群に移行する。しかし、L群では、4割ほどが同じ方略を持ち続けるものがあることは、興味ある結果である。

TABLE 4 から観察される傾向は、基本的には横断的分析から示唆されるものと類似していた。つまり、3年で分数を学習した後ではある程度分数を理解するものの、分数に接していない間に元の既有知識に戻っている。しかし、4年で単元の授業を受けることでルールLをもつ子どもを除けば、正答群に移行している。そして、4年で再度分数に関しての空白期間があると、やや既有知識に戻る傾向がみられる。しかし、5年での単元を学習することで、ルールLを除いてほぼ正答群に移行するという傾向がうかがえる。

異一異タイプの問題では、このような傾向に加えて別の傾向も観察された。この結果は、TABLE 5 に示されている。第1段目には、4年の事後テストから5年の事前テストにかけての変化が、2段目には5年の事前テストから事後テストへの変化が、それぞれ示されている。

つまり、分数概念から離れている間に、正答群を除いて、SやL群で正答群に移行したものはごくわずかで、S群では半数が同じ方略を持ち続け、25%のものはルールLに後退している。しかし、L群は少し様相が異なっていて、ルールLをもつ子どもの半数はルールSの方略を持つようになっている。これは、異一同、同一異タイプの問題ではみられなかった重要な方略の

TABLE 5 異一異問題における各テスト時間毎の変化

		5 年事前			
		正答群	S 群	L 群	他群
4 年事後	正答群 (53)	.77	.09	.08	.06
	S 群 (60)	.18	.50	.25	.07
	L 群 (27)	.04	.48	.37	.11
	他群 (24)	.17	.33	.29	.21
		5 年事後			
		正答群	S 群	L 群	他群
5 年事前	正答群 (57)	.91	.05	.02	.02
	S 群 (56)	.45	.34	.16	.05
	L 群 (36)	.22	.28	.44	.06
	他群 (15)	.40	.40	.13	.07

(注) () 内は人数である。

変化である。

5 年で通分操作を学習した後でも、誤った方略を持つ子どもは正答群には移行できず、ルール S を持つものの内 34% は同じ群に留まっている。L 群では、44% の子どもが同じ方略を持ち続けている。さらに、4 年事後からの変化でも見られたように、ルール L をもつ子どもの 28% は、ルール S に変化している。

2. 第 2 の分析 こうした傾向をさらに確認するため、すべてのテストにわたって 1 人の子どもがどのように変化したかという第 2 の分析をおこなった。一人ひとりについて、すべてのテストでどのように変化したかそのタイプを全員について分類したところ、96 種類にも上ったのでここでは別の視点からこのデータを分析した。それは、これまでの分析から示唆されるものであり、方略の変化を大まかにいえば、ルール L からルール S に移行し、その後に正しい方略へという変化過程をとっていることが観察された。このような過程をたどるとすれば、テストからテストへの変化を正しい概念に近づく正の変化、既有知識に後退する負の変化、および変化なしという 3 つの変化のいずれかで分類できることになる。正の変化としては、それぞれの誤った方略群が正答群へ変化した場合、および L 群、LS 群、他群が S 群へ移行した場合であった。負の変化としては、正答群がいずれかの誤った方略群へ、また S 群が L 群、SL 群、他群のいずれかへ、さらに L 群が LS 群へ、それぞれ移行した場合であった。変化なしは、2 つのテスト間で同一の方略を示した場合である。なお、S 群、L 群、および SL 群が、他群へ移行した場合は、変化なしに含めた。

この正、負、変化なしという視点で、3 年の事後テスト以後の同一異、異一同タイプの問題における方略の変化のパターンを分類したところ、20 のパターンが得られた。なお第 1 の分析では、一応 5% の割合を示したもののみを資料として取り上げ、それ以下のパターンは分析から除外した。

もっとも多かったのは、最初に負の変化を示し (3 年事後から 4 年事前へ)、次に正の変化を示し (4 年事前から事後へ)、その後は変化なしとなる第 1 パターンであった。このパターンが、全体の 28% (46 人) を占めた。この内の 45 名は、3 年の事後テストでは正答群に分類されたものであり、その後は L 群、または S 群に後退し、4 年で分数概念を学習することで正答群に移行するという変化を示すものが、主であった。これは、横断的分析から見いだされた傾向とほぼ同じである。このパターンは、模式的な形で FIG. 1 に示されている。

次に多かったのは、3 年の事後テストから変化なしの第 2 パターンであり、全体の 13% (21 名) であった。この内の 17 名は、最初から最後まで正答群であったもので、3 年で分数を学習することで着実にそれを既有知識の中に取り込んだものであろう。このことは、また分数を最初に着実に理解したものは、全体の 1 割ほどしかないことであり、分数の概念的意味の習得がいかに困難かを示唆するものである。残りの内の 3 名は、最後までルール L から離れることができなかった子どもである。

第 3 のパターンは、4 年の事前テストまでは変化がなく、4 年で単元を学習すると望ましい方向へ移行して、その後は安定するものであり、全体の 6% (10 名) であった。この中では、ルール L を持っていて、4 年での学習の後に正答群に移行するもの 4 名と S 群に移行するもの 3 名が、主であった。

また、残りのパターンの中で興味あるのは、3 年で分数についての空白期間に負の変化を示し、その後、後退したままの状態が続き、5 年で分数単元を学習することでやっと正の変化を示す第 4 のパターンである (9 名)。また、分数学習から離れている間は負の変化、分数単元の授業を受けることで正の変化という繰り返しの示した第 5 のパターン (7 名) も、興味あるパターンである。

次に、異一異タイプの問題における方略の変化過程のパターンについて、FIG. 1 と同様の分析をおこなった。変化のパターンは、ぜんぶで 8 種類見いだされたが、ここでは上位の 3 つのパターンのみを分析の対象とした。この結果は、FIG. 2 に示されている。

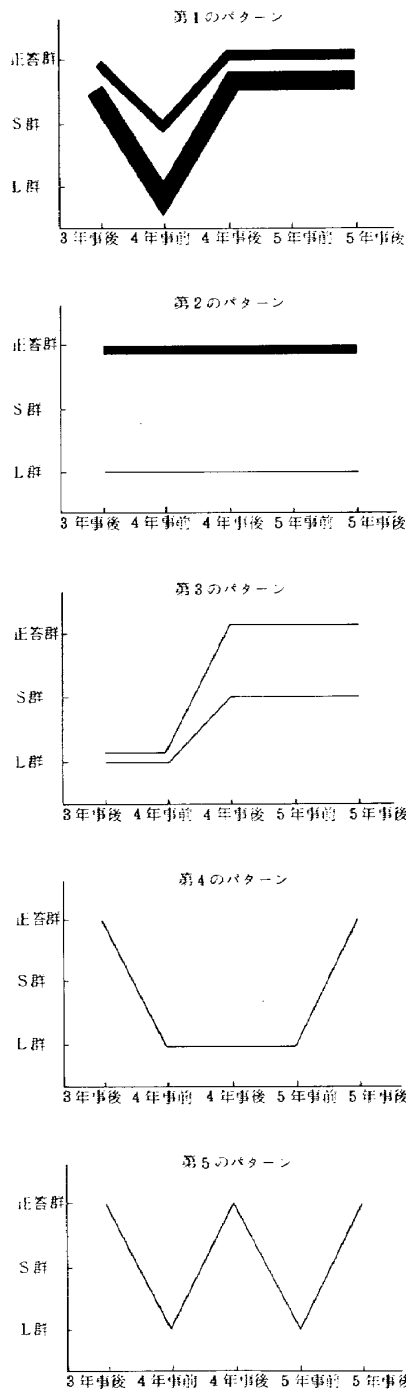


FIG. 1 同一異, 異一同問題における方略の変化パターン

もっとも多くみられたのは、4年の事後テスト以後で方略に変化のない第1パターンであり、全体の40% (66人)を占めていた。その内訳は、正しい方略の者37名、ルールSの者14名、ルールLの者が6名であった。残りの9名は他群であった。合計して29名の子どもは、異一異タイプの問題に対して何らかの誤った方略を持ったまま5年を終わっている。このことは、指導上大きな問題になろう。

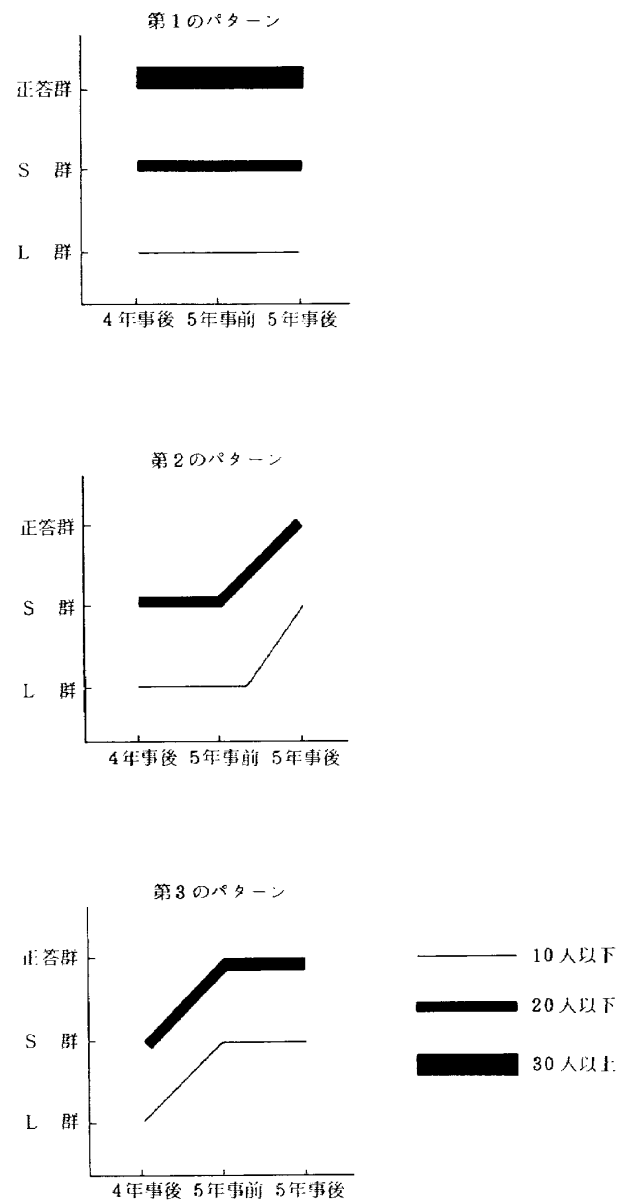


FIG. 2 異一異問題における方略の変化パターン

次に多かったのは、4年での空白期間の間では方略に変化がなく、5年で単元を学習した後、正の方向への変化をした第2パターンである。全体の19% (32名)を占めており、この内の16名は4年の事後からルールSを持っていて、5年の事後テストで正しい方略へ変化したものである。さらに残りの中で6名は、ルールLを5年の事前テストまで持っていたが、5年の学習の後でルールSに変化したタイプであった。この傾向も、第1の分析から得られたルールLからルールSへという移行に対応したものであった。

第3のパターンに入るものは、4年での空白期間の間に正の方向への変化を示し、その後は変化しなかつ

たパターンである。これは、全体の14% (23名)に見られている。この内の10名は、4年の事後テストでルールSを示し、5年の事前テストでは正答群に変化したものである。さらに残りの7名は、最初にルールLを持っていたが、空白期間の間にルールSに変化していた。この変化も、第2のパターンで観察された傾向と同じである。

全体的考察

本研究では、分数の大小関係を手がかりにして、分数が既有知識にどのように統合されるかを検討した。その結果は、分数概念の習得過程をかなり明確にしている。ここでは、結果を要約しながら、その習得過程を考察する。本研究から明らかにされた習得過程として、4段階が設定可能である。

まず第1段階は、分数を学習する以前である。子どもは、学校で正式に分数を学習する前にも、整数系の知識としては、分数の基本的な意味を正しく理解していた。この既有知識が、その後の分数概念を理解させる重要な既有知識となるようである。

第2は、分数にはじめて出会う段階である。3年で分数の概念を記号システムとして公式に学習することによって、何が生じるだろうか。既有知識と異なる分数概念は、3週間にわたって学習しても、簡単には既有知識の中には統合されないことが明らかにされた。むしろ、分数の概念を整数系から構成されている既有知識という視点から理解しようとしていた。その傾向は、分数の概念に接しない間に、よりはっきりとしてきた。

こうしたことが、なぜ起きるのであるか。それは、1つには、分数の概念の特性からくることが考えられる。つまり、同分母で異分子の分数の大きさを比較する状況では、分母が同じなので分子の大きい方が分数の大きさは大きくなる。これは、まさに整数の知識とぴったり一致する。しかもこの知識を使えば、同一異タイプの問題には正しく答えられるのである。しかし、それを異一同タイプの問題に適用すると、もちろん誤りとなる。つまり、子どもがもつ既有知識に依存すると、ある状況では正答し、別の状況では間違うのである。

さらにもう1つの理由は、教師の指導内容にある。彼らは、3年での分数単元の指導では、分数の大きさについて以下のようなまとめをしていた。つまり実際の授業の中で、分母が同じ時は分子が大きい方が大きい、分子が同じ時は分母が大きい方が小さいと板書し、

これを子どもに復唱させている。子どもが、この内容を分数の量的表現として認識した上でまとめとして学習するのであれば、問題はない。もし単に表面的に意味を捉えたとすれば、既有知識に近い形のまとめであるので、誤った知識として定着することも考えられる。この教授と子どもの理解との関連は明確な資料として得られているわけではないので、今後の課題であろう。これらの理由によって、この第2段階がかなり続くということが、考えられる。いずれにしろ、この段階では、分数が既有知識の中に一応取りこまれるが、そこで既有知識に働きかけて新しい概念との間に相互作用が生じるのではない。あくまでも、既有知識の点から新しい材料を捉える段階であるといえる。

次の第3段階では、分数の知識が整数系の既有知識の中に取り込まれてくるが、それらがまだ統合されてはいない段階である。ここでは、分数をもはや整数系の知識から考えるということとはなくなる。しかし、分数に対する知識が全体として理解されておらず、一部が誤った知識状態にある。この例は、ルールSに見られる。前にも述べたように、このルールSは、全体を多くの部分に分けるほど分数の大きさは小さいというもので、これを同一異タイプに適用すると、誤った方略となる。しかし、TABLE 4や5から明らかのように、このルールは教授介入によってすぐに正しい知識に達する段階であると考えられ、その意味で正しい知識に近い状態にあるとみなすことができる。

最後は、分数系の知識を整数系の知識に統合できる段階である。ここでは、分数系と整数系との知識システムを区別し、それを状況に応じて使い分ける段階である。

ここで仮定した分数概念の発達段階に関する1つの疑問は、すべての子どもが、4つの段階を経由して正しい概念に達するかどうかである。つまり、ここで仮定した分数の段階は、既有知識の中に分数概念を取り込んでいく知識統合過程としての発達であり、大多数の子どもはこうした過程をたどっていくとみなされる。しかし、学校で学習することにより、直ちに第4段階に到達するものも1割ほどはいる。あるいは、第2段階に留まっている少数の子どもがいることも、事実である。こうして、知識統合の過程がすべての子どもにとって同じようには進行しないのがなぜかという疑問は、今後の検討課題である。

引用文献

Behr, M.J. Wachsmuth, I., Post, T.R. & Lesh, R.

- 1984 Order and equivalence of rational number : A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, **15**, 323—341.
- Behr, M.J., Wachsmuth, I., & Post, T.R. 1985 Construct a sum : A measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, 120—131.
- Carpenter, T.P. 1986 Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge : Implications from research on the initial learning. In Hiebert, J. (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge : The case of mathematics*. LEA, Hillsdale, NJ.
- Hiebert, J. & Wearne, D. 1985 A model of students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction*, **2**, 175—205.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986 Conceptual and procedural knowledge in mathematics : An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge : The case of mathematics*. LEA Hillsdale, NJ.
- Hunting, R.P. & Shrpley, C.F. 1988 Fraction knowledge in preschool children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 175—180.
- 石田忠男 1985 分数・小数の意味理解はなぜむずかしいか 算数教育, **27**, 21—27.
- Piaget, J. 1960 *The psychology of intelligence*. Totowa, NJ : Littlefield, Adams.
- Pothier, Y. & Sawada, D. 1983 Partitioning : The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **14**, 307—317.
- Resnick, L.B., Cauzinille-Marmèche, E., & Mathieu, J. 1987 Understanding algebra. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics*. Clarendon Press. Oxford.
- Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peld, I. 1989 Conceptual bases of arithmetic errors : The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**, 8—27.
- Sackur-Grisvard, C. & Leonard, F. 1985 Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept : The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, **2**, 157—174.
- Yoshida, H., & Kuriyama, K. 1988 Process of the acquisition knowledge for understanding fraction. A paper presented at the third Japan-Germen Science seminar.

付 記

実験にご協力頂きました宮崎市立大宮小学校の校長先生、諸先生、ならびに児童の皆様に厚く御礼申し上げます。

(1991年1月21日受稿)