276 Japanese Journal of Educational Psychology, 1992, 40, 276—286

# 児童の比例的推理に関する発達的研究

藤 村 宣 之*

# A DEVELOPMENTAL STUDY ON THE PROPORTIONAL REASONING IN SCHOOL AGE CHILDREN

Nobuyuki FUJIMURA

This study investigated 1) the relation between proportional reasoning and comparison of intensive quantity (thickness), and 2) the effect of manipulation of juice and water believed to contain proportional reasoning on the comparison of thickness. Adjustment tasks (proportional reasoning) and comparison tasks (comparison of thickness) were individually administered to 160 pupils in grades 3, 4, and 5. Answers to the tasks and their justifications were analyzed. The results showed that 1) proportional reasoning was found in the 3rd and 4th grades when preceding a comparison of thickness ; and that 2) manipulation involving proportional reasoning promoted the performance on thickness comparison tasks, especially in 4th graders. The factors promoting the performance and its process were discussed.

Key words : proportional reasoning, comparison of thickness, developmental progress, formation experiment, school age children.

## 問　　題

比例的推理 (proportional reasoning) は，小学校中学年，高学年の認知発達を特徴づける思考の1つである。「自動車が2時間で120km走りました。同じ速さで4時間走ると，走ったきょりは何kmになりますか？」このような問題（調整課題）の解決に必要とされるのが，比例的推理である。一般には，2量(この場合は時間と距離)の比例関係をもとに，一方の量の値を変化させたときの他方の量の値を推理することと表現できる。

一方,「2時間で100km走る自動車と，4時間で240km走る自動車ではどちらが速いですか？」といった問題（比較課題）の解決には，2量（この場合は時間と距離）を含む2項の比較が求められる。

比例的推理には，2量の比例関係にもとづく一方の量の値の推理に加えて，2量を含む2項の比較を含める研究もみられる（例えば, Karplus et al., 1983, Tourniaire & Pulos, 1985 など)。一方，2量を含む2項の比較は，比例概念 (Siegler, 1981)，割合概念 (Noelting, 1980)，内包量概念 (藤村, 1990) などのように個別に扱われてきている。

このように従来の研究では，調整課題に対する，2量の比例関係にもとづく一方の量の値の推理と，比較課題に対する，2量を含む2項の比較とを区別し，対比的に論じられることは少なかった。本研究ではまず前者を比例的推理，後者を内包量比較として区別する。ここで内包量とは，速度，濃度，密度などのように2量の商によって表わされる量である。そして，比例的推理と内包量比較を，課題解決時に倍数関係や単位あたりの認識を必要とする点で共通性をもつが，子どもの認識としては別の側面であるととらえ，両者の対比において比例的推理の発達過程について検討する。

比例的推理は，算数教育において，5年生の単位あ

* 日本学術振興会特別研究員（京都大学教育学研究科）(JSPS Fellowships for Japanese Junior Scientists (Faculty of Education, Kyoto University))

たり量(内包量)，6年生の比例の単元に関連をもつ。内包量や比例に関する実践は多く報告されているが，特に内包量に関しては指導の重点は内包量比較におかれ，子どもの行う比例的推理はほとんど考慮されてこなかった。それが，小田切(1987)や正田(1989)が指摘するような，速さ＝距離/時間などの公式は使えるが意味理解が伴わないといった問題の一因になっているのではないかと推察される。

量認識の基本となる内包量比較と，外延量(時間，距離，体積，個数など，合併による加法性の成り立つ量)の予測や操作と関連する比例的推理がいかに関わるか，また後者を特質とする具体物の操作が前者の改善に有効かどうかは，内包量や比例の指導を考える際の重要な問題の1つであろう。

比例的推理に関する先行研究には，大きく分けて2つの流れがある。

1つは，認知発達の分野で，Siegler, R.S. によって主張されたルール評価アプローチを検討し，部分的に修正を加えていこうとする諸研究である。Piaget(1970)が形式的操作期に成立するとした比例概念の発達について，Siegler(1981)は，天秤，写影などの比較課題を用いた実験を行い，処理方略(ルール)の観点から4段階のルールの高次化を示した。各ルールの特徴は次のように整理できる。

ルールI：優位次元のみに着目して判断する。

ルールII：優位次元の値が等しい時のみ，下位次元に着目し判断する

ルールIII：両次元を考慮するが，一方で優位次元の値が，他方で下位次元の値が大きい課題(葛藤課題)に対しては，一貫した解決法をもたず，random に判断する。

ルールIV：両次元を考慮し，それらを組合わせる適切な公式により判断する。

これに対しては，特にルールIIIが子どもが実際にとっているルール，方略を考慮に入れていないという批判や，比較課題が子どもの認知レベルを正確に示していないという批判がなされてきた。Wilkening & Anderson(1982)は，天秤課題を用いて，比較課題で Siegler の基準によりルールIIIに分類される子どもの一部が，調整課題(比例的推理)で代数的統合ルール(特に加法ルール)をとることを示した。また Normandeau et al.(1989)は，比較課題で統合ルールに分類された子どもが，調整課題で比例を質的に理解し，組織的に調整を行うことを示した。

これらの研究は，従来の比較課題に加えて調整課題を導入することにより，ルールIIIと同定された子どもの多様性を示した。しかしながら，主たる分析対象が小問の正誤に限られている点に課題がある。子どもの行う理由づけを分析対象に加え，倍数関係の理解を含めた方略の分析を両課題について行うことにより，比例的推理(調整課題)と内包量比較(比較課題)との関連が，より明らかになると考えられる。

比例的推理に関する研究のもう1つの流れは，算数・数学教育の教科内容に照らして，子どもの比例的推理を明らかにしようとする諸研究である。領域としては，濃度や割合に関する研究が多いが，そのほとんどは中学生以上を対象にしたものであり，児童期の比例的推理を検討したものは少ない。また主に調整課題(または欠損値課題)のみを実施しているため，比例的推理と内包量比較の関連を明らかにし得ていない。

Karplus et al.(1983)は，小学校6年生と中学校2年生に対してレモネードを用いた濃度の比較課題と調整課題を実施し，調整課題では比較課題に比べて質的推理が減少し，加法的推理が増加することなどを示した。Tourniaire(1986)は，小学校3～5年生を対象に複数の概念についての調整課題を実施し，3年生でも比例についての何らかの考えをもち，例えば繰り返し加法などが多く用いられることを明らかにした。

Karplus らの研究は，比較・調整課題間の関連を検討しようとしているが，調整課題の実施が，比較課題で濃度が異なると解答した場合に限られている点で，検討が不十分である。また，課題の数構造が複雑であるために比例的推理のはじまりを検討し得ていない。一方，Tourniaire の研究は，年少の子どもの推理を検討しているが，課題の数構造が1通りであり，比例的推理の発達的な変化を明らかにするためには，数的に構造化された数種類の小問が必要であると考えられる。

また，以上に述べた諸研究では，具体物の操作や手がかりの呈示による認識改善の可能性については，ほとんど触れられていない。

本研究では，以上の先行研究の成果と課題，および算数教育における課題をふまえ，以下の2点を研究の目的とする。

第1は，比例的推理と内包量比較の関連について，小学校中学年から高学年を対象に発達的に明らかにすることである。これに対する仮説は，比例的推理は内包量比較に先行して小学校3，4年生から現れはじめること(仮説1)である。その根拠の第1は，比例的推理(調整課題)には論理的比例の理解を生かしやすいことである。ここで論理的比例の理解とは，例えば「同じ

濃さの砂糖水をつくる場合，水を増やすならば，砂糖も多く入れなければならない」といった理解のことを指す。これにより，Tourniaireが示したような繰り返し加法が可能になると考える。根拠の第2は，内包量比較（比較課題）には内包量（濃さなど）に関する領域固有の理解，特に不等関係の理解が必要なことである。

第2は，比例的推理を特質とする具体物の操作による内包量比較（量認識）改善の可能性を明らかにすることである。これに対する仮説は，比例的推理を特質とする具体物の操作は内包量比較を促進すること（仮説2）である。その根拠は，予測や操作の場面での推理は量的関係把握（「倍」や「単位あたり」）を促し，それが比較の場面にも適用されると考えられることにある。

## 方　法

### 1. 被験児

大阪府下の公立S小学校および京都府下の公立T小学校の3～5年生(計6クラス)を被験児とした。人数および平均年齢は，3年生—47名（平均年齢8；8)，4年生—54名（平均年齢9；8)，5年生—59名（平均年齢10；8）であった。また統制群としてS小学校4年生1クラス（32名，平均年齢9；10）も被験児として追加した。

この年齢段階を選んだ理由は，Piaget (1970) が示した具体的操作の第2段階(9, 10歳)から形式的操作期(11, 12歳—）への移行に対応させて比例的推理のはじまりをとらえ，さらに，Tourniaireが指摘した小学校中学年における「比例についての考え」の詳細を検討するためである。

なお，これらの被験児は，単位あたり量（5年2学期)，比例(6年1学期)など，比例的推理に関連する教科内容は未習であった。

### 2. 課　題

本研究では，ジュースを用いた濃度課題を主たる実験課題とした。内包量のうちで特に濃度を取り上げた理由は，①操作可能な量であり大きさを自由に設定しやすいこと，②空間分布型の量であり実験結果が目に見えやすいことの2点である。濃度課題としては，次に示すように比較課題(Ⅰ, Ⅱ)と調整課題の2種類を設定し，比較課題により内包量比較の側面を，調整課題により比例的推理の側面を明らかにすることをめざした。課題は，比較課題Ⅰ→調整課題→比較課題Ⅱの順に実施した。なお，統制群については，比較課題Ⅰ→計算課題→比較課題Ⅱの順に実施し，計算課題は，整数・小数・分数の加減演算を用いた。

(1)比較課題（comparison task）Ⅰ—内包量比較

濃縮オレンジジュース（1～8個）と水（1dl～4dl）の組を示したカードを用意し，混合したジュースの濃さを比較させた。どちらのジュースが濃いか判断させた後，その理由を尋ねた。ここで，溶質量と溶媒量の単位は，一方を分離量とすることで予測，操作が容易になることに留意し，体積（dl）と個数（個）とした。第1問では，具体物（水の入った透明な容器2個と濃縮オレンジジュースの入った小容器数個）を用いて課題を呈示し，比較判断を行わせることにより課題の内容を理解させた。第2問以降はカード（A4判）を用いて課題を順次実施した。

小問のレベルと課題内容をTABLE 1-1に示す。課題の系列は，前問での推理が直接，次の問題の推理に影響を及ぼすことを避けるため，①1②2③4A④3B⑤$3A_1$⑥$3A_2$⑦4Bの順序で実施した。またTABLE 1-1に示した基準で，子どもの内包量比較の段階の同定を行った。ここに示した段階1～4は，藤村（1990）で明らかにされたものであり，段階1，2，4は，それぞれSiegler（1981）の示したルールⅠ，Ⅱ，Ⅳに対応し，段階3は，Noelting (1980) がジュース課題で示した設問段階ⅡB・ⅢA（倍数関係にもとづく同値類の構成）に対応する。

(2)調整課題（adjustment task）—比例的推理

濃縮ジュースと水の組(例えば濃縮ジュースの入った小容器2個と水1dl）を具体物により呈示し，別の水（2dl）を用いて同じ濃さのジュースを作るには何個の濃縮ジュースが必要かを予測させた後，その理由を尋ねた。予測後，水（2dl）と濃縮ジュース（予測した分量）を実際に混合させ，濃さが同じかどうかを観察させた（水とジュースの分量は，あらかじめ色の変化が識別できるように設定しておいた)。濃さが同じにならなかった場合(予測が誤っていた場合）には，同じにするにはどうすればよいか，またそれはなぜかを尋ねた。予測を修正したときは引き続いて混合を実施し，そのつど判断の理由と現象に対する説明を求めた。小問のレベルと課題内容をTABLE 1-2に示す。課題は①3A②4Aの順に実施し，TABLE 1-2に示した基準で子どもの比例的推理の段階を同定した。

(3)比較課題（comparison task）Ⅱ—内包量比較

調整課題終了後，(1)と同一形式の比較課題をカードを用いて実施し，子どもの内包量比較の段階を同定した。課題は①$3A_2$②4B③$3A_1$④3B⑤4Aの順序で実施した。課題解決状況により，小問②を省略することがあった。

### 3. 手　続

以上の課題を，昼休み，放課後，20分休みの時間に，

**TABLE 1-1**　小問のレベル，課題内容と段階同定基準（比較課題）

| 小問のレベル | 課題内容 | 段階同定基準と表の説明 |
|---|---|---|
| 1（溶媒量共通） | $\frac{1個}{1dl} \leftrightarrow \frac{2個}{1dl}$ | ―小問への正答と内包量比較の段階―<br>（正答した小問）<br>1のみ　段階1（1量の符号化）<br>1，2　段階2（2量の符号化）<br>1～3$A_1$　段階3（倍数関係の認識）<br>1～3$A_2$　〃　〃<br>1～3B　〃　〃<br>1～4A　段階4（単位あたり認識）<br>1～4B　〃　〃 |
| 2（溶質量共通） | $\frac{2個}{1dl} \leftrightarrow \frac{2個}{2dl}$ | |
| 3$A_1$（2量が倍数関係　1：2） | $\frac{2個}{1dl} \leftrightarrow \frac{4個}{2dl}$ | |
| 3$A_2$（2量が倍数関係　1：3） | $\frac{2個}{1dl} \leftrightarrow \frac{6個}{3dl}$ | |
| 3B（1量が倍数関係　1：2） | $\frac{6個}{2dl} \leftrightarrow \frac{8個}{4dl}$ | ―各小問の課題内容について―<br>・上段は濃縮ジュース（オレンジカルピス）の量（個数），下段は水の量をあらわす。<br>・↔は左右の濃さの比較を示す。<br>・小問の数値の設定に関しては，4Bを除いて，1dlあたりの個数が整数値になるようにした。 |
| 4A（非倍数関係　等価） | $\frac{4個}{2dl} \leftrightarrow \frac{6個}{3dl}$ | |
| 4B（非倍数関係　非等価） | $\frac{5個}{2dl} \leftrightarrow \frac{6個}{3dl}$ | |

**TABLE 1-2**　小問のレベル，課題内容と段階同定基準（調整課題）

| 小問のレベル | 課題内容 | 段階同定基準と表の説明 |
|---|---|---|
| 3A（倍数関係1：2） | $\frac{2個}{1dl} = \frac{?個}{2dl}$ | ―小問への正答と比例的推理の段階―<br>（正答した小問）<br>なし　段階2（2量の符号化）<br>3A　段階3（倍数関係の認識）<br>3A，4A　段階4（単位あたり認識） |
| 4A（非倍数関係） | $\frac{4個}{2dl} = \frac{?個}{3dl}$ | |
| | | ・上段は濃縮ジュース（オレンジカルピス）の量（個数），下段は水の量をあらわす。<br>・＝は左右の濃さが等しいことを，？は入れる濃縮ジュースの量の予測を示す。 |

小学校の図書準備室や会議室などで個別に実施した。実施時期は，T小学校が1990年の3月中旬および4月下旬，S小学校が同年の6月上～下旬であった。実験の所要時間は比較課題Ｉ→調整課題→比較課題IIのセッションで，1人あたり15～20分であった。子どもが課題に取り組む様子は記録用紙に記録したほか，ビデオカメラで録画を行った。

目的との関連では，比較課題Ｉと調整課題との関連から，目的1：内包量比較と比例的推理の関係を，比較課題Ｉと比較課題IIとの関連から，目的2：比例的推理を特質とした具体物の操作による内包量比較の改善の可能性を明らかにすることをめざした。また，目的2の検討のため，統制群では調整課題(比例的推理)の代わりに計算課題を実施した。

## 結　果

結果の分析は，1.全般的傾向（課題別得点，正答数の変化），2.個人内の変化（段階移行のタイプ，調整課題内の変化，方略面の変化）の順に行った。

### 1.　全般的傾向

分析に先立ち，子どもの解答を次の2種類の基準により正答と誤答に分類した。第1の基準は，基準Ｓ(strict criterion：厳密な基準）である。この基準では，判断や予測が正しく，理由づけも適切である（倍数関係や単位あたりといった量的な認識にもとづく）場合を正答とし，それ以外の場合を誤答とした。第2の基準は，基準Ｌ(loose criterion：寛大な基準）である。この基準では，理由づけの適切性は問わず，判断や予測が正しい場合を正答とし，誤りがある場合を誤答とした**。

2種類の基準の設定は Siegler & Jenkins (1989) を参考にした。本研究でこれらの基準を設定した理由は，判断や予測が正しいときに，量的認識により適切に理由づけを行う場合のほかに，適切さに欠ける定性的な理由づけを行う場合や，課題状況の説明を繰り返すだけで理由づけになっていない場合が，3，4年生を中心にみられたためである。

まず全般的傾向を把握するために，比較課題Ｉ，調整課題，比較課題IIの3課題に共通に実施した3A ($3A_1$)，4Aレベルの小問への解答を2種類の基準で正誤に分類し，基準Ｓをみたす正答に2点を，基準Ｌをみたす正答に1点を与えた。各課題の平均得点の変化をFIG. 1に示す。

課題別得点について，学年（3, 4, 5年）×課題（比較Ｉ，調整，比較II）の2要因分散分析を行ったところ，学年，課題の主効果が有意であり（それぞれ $F_{(2,157)}=12.69$, $p<.001$ ; $F_{(2,314)}=49.17$, $p<.001$），学年と課題の交互作用は有意でなかった。Ryan の法による多重比較では比較Ｉ―調整，比較Ｉ―比較IIの課題差($t=7.43$, $p<.01$ ; $t=9.44$, $p<.01$

** 例として，比較課題の小問$3A_2$(水1dlに濃縮ジュース2個を入れるジュースと，水3dlに濃縮ジュース6個を入れるジュースの濃さの比較）をとりあげる。これに対して「濃さは同じ」と正しく判断したときの理由づけとしては，①「水もオレンジカルピス（濃縮ジュース）も3倍になっているから」(倍数関係の認識)，②「1dlに2個ずつ入れると3dlだと2×3で6個になるから」(単位あたりの認識)，③「(一方が）水も多いし，オレンジカルピスも多く入れるから」(論理的比例による定性的判断）などがみられた。

基準Ｌでは①②③とも正答としたが，基準Ｓでは①②を正答とし③は誤答とした。なお，①②は4年生（比較課題II）や5年生に，③は3年生や4年生（比較課題Ｉ）に比較的よくみられた。

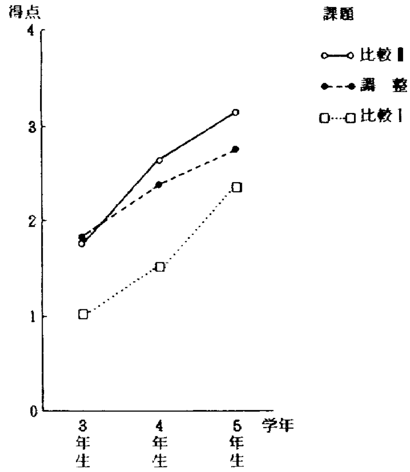


FIG. 1 各課題の平均得点の変化

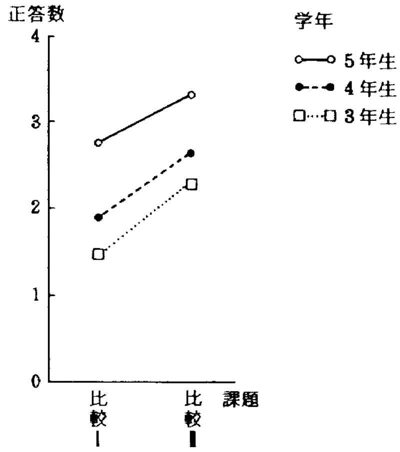


FIG. 2 平均正答数の変化（基準L）

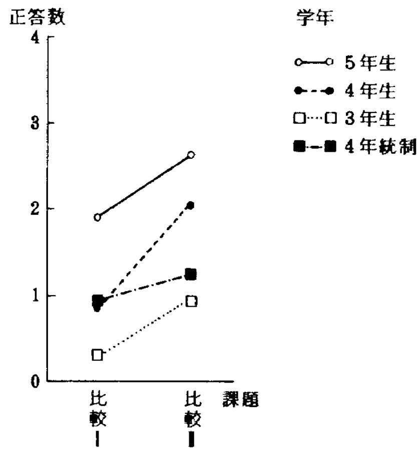


FIG. 3 平均正答数の変化（基準S）

；いずれも df=314），3年―4年，4年―5年，3年―5年の学年差（$t=2.63, p<.05$；$t=2.45, p<.05$；$t=4.94, p<.01$；いずれも df=157）が有意であった。

次に，比較課題Iから比較課題IIにかけての認識の改善についてさらに検討するため，両課題に共通に実施した小問$3A_1$，$3A_2$，3B，4A をとりあげ，正答数(正答した小問数)の変化を検討した。基準Lを適用した場合の平均正答数の変化を3，4，5年生について示したのが，FIG. 2 である。

基準Lを適用した正答数について，学年(3, 4, 5年)×課題（比較I，比較II）の2要因分散分析を行った結果，学年，課題の主効果が有意であり（それぞれ $F_{(2,157)}=9.82, p<.001$；$F_{(1,157)}=52.23, p<.001$），Ryan の法による多重比較の結果，3年―5年，4年―5年の学年差が有意であった（$t=4.27, p<.05$；$t=2.93, p<.05$；いずれも df=157)。

一方，基準Sを適用した場合の平均正答数の変化を3，4，5年生，および4年生統制群について示したのが FIG. 3 である。基準Sを適用した正答数について，学年（3, 4, 5年）×課題（比較I，比較II）の2要因分散分析を行った結果，学年，課題の主効果(それぞれ $F_{(2,157)}=19.35, p<.001$；$F_{(1,157)}=81.28, p<.001$）および学年と課題の交互作用（$F_{(2,157)}=3.10, p<.05$）が有意であった。

交互作用について検討するために単純主効果の検定を行ったところ，各学年における課題の効果（3年生：$F_{(1,157)}=14.72, p<.01$；4年生：$F_{(1,157)}=52.45, p<.01$；5年生：$F_{(1,157)}=20.99, p<.01$），各課題における学年の効果（比較I：$F_{(2,314)}=15.74, p<.01$；比較II：$F_{(2,314)}=18.07, p<.01$）が有意であった。さらに，各課題での学年差について，Ryan の法による多重比較を行った結果，隣接学年間では比較課題Iで4年―5年の学年差が，比較課題IIで3年―4年の学年差が有意であった（それぞれ $t=3.74$, df=314, $p<.05$；$t=3.70$, df=314, $p<.05$)。

このように4年生が3，5年生に比べて比較課題Iから比較課題IIにかけて正答数の大きな伸びを示したことが有意な交互作用をもたらしたと考えられる。また，基準Lと基準Sの分析結果を対比して考えると，4年生の比較課題Iから比較課題IIにかけての正答数の変化は，判断の正確さに加えて理由づけの適切性が高まる変化であったと推察される。このように基準Sの適用により，学年間の上昇傾向の特質がより明らかにされたことから，以下，基準Sを適用して分析を進める。

正答数に顕著な変化のみられた4年生について，変化をもたらした要因を明らかにするために，先に述べたように統制条件での実験を追加して実施した。基準Sを適用した正答数について，条件(4年実験，4年統制)×課題（比較I，比較II）の2要因分散分析を行ったところ，課題の主効果($F_{(1,84)}=39.00, p<.001$)，および条件と課題の交互作用($F_{(1,84)}=11.58, p<.01$)が有意であった。下位

検定では，条件差が比較課題Ⅰで有意と認められなかった（$F_{(1,168)}=0.01$, n.s.）のに対して比較課題Ⅱでは有意であり（$F_{(1,168)}=5.78$, $p<.05$），課題差は実験条件で有意であった（$F_{(1,84)}=46.63$, $p<.01$）のに対して統制条件では有意と認められなかった（$F_{(1,84)}=3.93$, n.s.）。これより，4年生における正答数の増加は，主に調整課題（比例的推理）の効果によるもので，比較課題の繰り返しの効果は小さいことが明らかになった。

## 2. 個人内の変化

次に，比較課題Ⅰから調整課題を経て比較課題Ⅱに至る過程で，個人の認識にどのような変化が生じたのかについて，段階の変化（段階移行のタイプ），調整課題内の変化，方略面の変化の3点から分析を行った。各児の段階の同定は，結果1で学年間の上昇傾向の特質が明らかに示された基準Sにしたがって行った。

(1)段階移行のタイプ

内包量比較（比較課題）と比例的推理（調整課題）が，倍数関係や単位あたりの認識を必要とする点で共通することに着目して，比較課題Ⅰから調整課題を経て比較課題Ⅱに至る段階の移行過程について分析を行った。その結果をFIG. 4に示す。ここで比例的推理（調整課題）の段階の同定は，混合前の予測（初回予測）によることとした。各学年の段階移行の特徴は次のように整理できる。

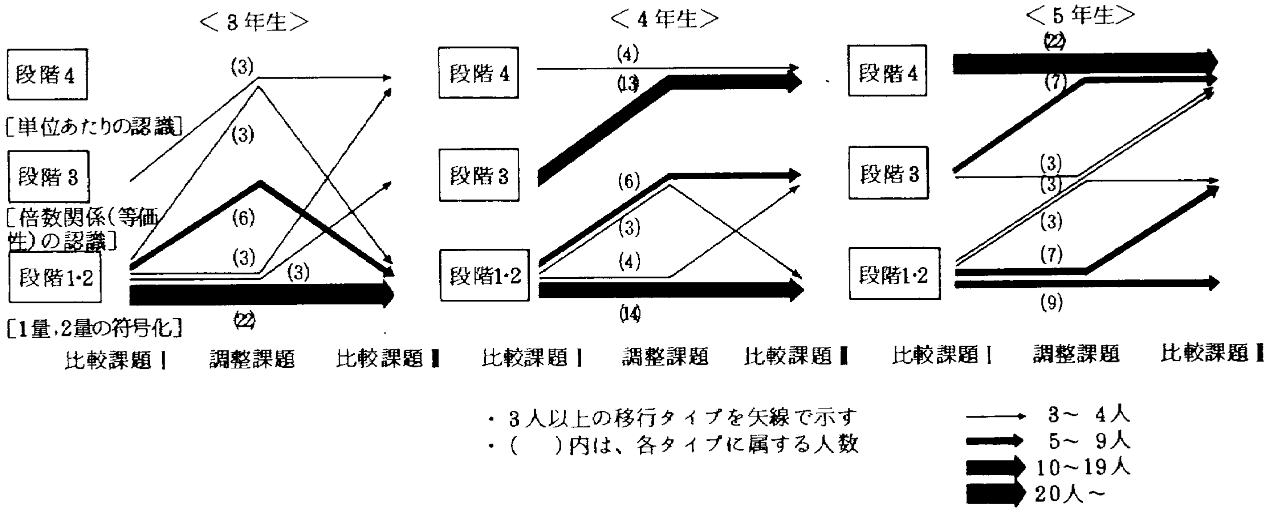


FIG. 4 各学年における段階の移行過程

まず3年生では，3課題を通じて段階1，2である子ども（2-2-2型）が多い。調整課題でのみ段階が高次化する子ども（2-3-2型，2-4-2型）も9人と多く，比例的推理と内包量比較が関連あるものとしてではなく別の過程として認識されていることが推察される。4年生では段階1，2から段階3への移行，段階3から段階4への移行にいくつかのタイプがみられた。段階2から段階4への2段階の移行はみられず，段階移行の漸進性がうかがえる。また5年生では，3課題を通じて段階4である子ども（4-4-4型）が多い。4年生と同様に段階の移行は漸進的で，段階1，2から段階3，段階3から段階4への移行に諸タイプがみられた。

次に3学年を通じた総計が10人以上であった6タイプについて，学年ごとの人数の分布を示したのがTABLE 2である。TABLE 2を用いて，7×3の$\chi^2$検定を行ったところ，学年間でタイプの分布の差に有意性がみられた（$\chi^2=38.83$, $df=12$, $p<.01$）。そこでTABLE 2について，対数線型モデルのあてはめによる分析（Everitt, 1977）を実施した***。その結果，3年生では他学年に比べて，2-2-2型や2-3-2型が有意に多く，4-4-4型が有意に少ないこと，4年生では他学年に比べて，3-4-4型が有意に多いこと，5年生では他学年に比べると，4-4-4型が有意に多く，2-2-2型が有意に少ないことが示された。

(2)調整課題内の変化

調整課題では，①課題を呈示し予測と理由づけ（初回予測）を求める，②予測にもとづいてジュースの混合を行い結果を観察させる，③予測と結果が一致した場合はその小問を終了し，不一致の場合は理由を尋ねた後，再度予測と理由づけ（修正予測）を求める，という手順で予測と結果が一致するまで続けた。また修正予測で理由づけがなく予測と結果が一致した場合は，なぜ一

*** 分析に際しては，弓野（1981）によるプログラムを用いた。

致したかについての説明（結果説明）を求めた。

比較課題Ⅰから調整課題にかけての認識の向上（段階の高次化）は，(a)初回予測時および，(b)修正予測時（または結果説明時）においてみられた。(1)の段階移行タイプの分析において（比較課題Ⅰの段階）＜（調整課題の段階）となっているタイプ，例えば2-3-2型，2-3-3型，3-4-4型などは，すべて(a)初回予測時向上型である。ここでは，(1)では触れなかった(b)修正予測時向上型を加え，両タイプの差異と共通性を中心に分析を行った。以下，各タイプの人数分布，比較課題Ⅱでの認識改善との関連，段階移行タイプとの関連の3点について順に検討した。

各学年について，比較課題Ⅰで段階1～3にあった子どもが，調整課題でどのような認識の向上タイプに分類されたかを人数で示したのが，TABLE 3である。（　）内はそのうち比較課題Ⅱで（比較課題Ⅰからの）認識の改善（段階の高次化）がみられた人数を示す。

まず，全体の人数では，初回予測時向上型が60人に対して，修正予測時向上型は19人と少なかった。また初回予測時向上型では4年生の人数がやや多く，3，5年生がやや少ない（5年生が少ないのは4-4-4型が多いことによる）という学年差がみられたのに対して，修正予測時向上型には学年による人数の変化がほとんどみられなかった。

TABLE 2　段階移行タイプにおける人数の分布

| 段階移行タイプ | 3年生 | 4年生 | 5年生 | total |
|---|---|---|---|---|
| ①　2-2-2 | 22** | 14 | 9* | 45 |
| ②　2-2-3 | 3 | 4 | 7 | 14 |
| ③　2-3-2 | 9* | 3 | 2 | 14 |
| ④　2-3-3 | 2 | 6 | 3 | 11 |
| ⑤　3-4-4 | 3 | 13* | 7 | 23 |
| ⑥　4-4-4 | 1* | 4 | 22** | 27 |
| ⑦　その他 | 7 | 10 | 9 | 26 |
| total | 47 | 54 | 59 | 160 |

・対数線型モデルのあてはめによる分析において，数字は有意な標準効果（正），数字は有意な標準効果（負）
・有意水準　　＊＊……p＜.01　　＊……p＜.05
・段階1，2は，ともに段階2として表記。
・2-3-2型には，2-4-2型も含めた。

TABLE 3　調整課題における認識向上（段階高次化）タイプ

| 認識向上タイプ | 3年生 | 4年生 | 5年生 | total | 段階移行タイプとの対応 |
|---|---|---|---|---|---|
| (a)初回予測時向上 | 15( 6) | 28(23) | 17(15) | 60(44) | → 2-3-2, 2-3-3, 3-4-4 |
| (b)修正予測時向上 | 7( 6) | 6( 4) | 6( 4) | 19(14) | → (2-2-2, 2-2-3, 2-2-4 |
| (c)向上なし | 24( 3) | 16( 3) | 14( 6) | 54(12) | → 3-3-3, 3-3-4) |
| total | 46(15) | 50(30) | 37(25) | 133(70) | ・（　）内は比較課題Ⅱで認識を改善した人数で，下線のタイプに属する。 |
| 4-4-4型 | 1 | 4 | 22 | 27 | |

次に，調整課題での向上タイプにより，比較課題Ⅱでの認識改善がどの程度みられたかについて検討する。学年（3年，4年，5年）×調整課題での向上タイプ（初回予測時向上，修正予測時向上，向上なし）の9つのセルごとに，比較課題Ⅱで比較課題Ⅰより段階を高次化した（認識を改善した）者の割合を求め，逆正弦変換法による分析を行った。その結果，向上タイプの効果が有意であり（$\chi^2=12.29$, $df=2$, $p<.01$），Ryanの法による下位検定の結果，初回予測時向上—向上なし，修正予測時向上—向上なしの間に，比較課題Ⅱでの認識改善に関して有意な差がみられた（それぞれ$\chi^2=19.85$, $df=1$, $p<.01$；$\chi^2=16.91$, $df=1$, $p<.01$）。これより，調整課題で初回または修正予測時に認識の向上（段階の高次化）がみられた子どもは，比較課題Ⅱで認識を改善する割合が高いことが明らかになった。学年別にみた場合，初回予測時の認識の向上では，3年生で比較課題Ⅱの認識改善につながる割合が低く（40%），4・5年生では高い（それぞれ82%，88%）という学年間の差異がみられた。これに対して修正予測時の認識向上は，人数は少ないものの，3～5年を通じて比較課題Ⅱの認識改善につながる割合が高かった（67～86%）。

さらに，修正予測時向上型と段階移行タイプとの関連について検討を行った。段階移行タイプの分析で，（比較課題Ⅰの段階）＝（調整課題の段階）＜（比較課題Ⅱの段階）であったタイプでは，2-2-3型14人中6人（43%），2-2-4型5人中5人（100%），3-3-4型8人中4人（50%），計27人中15人（56%）と半数以上が，調整課題で(b)修正予測時向上型であった（他の12人は，(c)向上なし型であった）。

以上の結果を表に整理したのがTABLE 4である。

TABLE 4　調整課題における2つの認識向上タイプ

| | (a)初回予測時向上型 | (b)修正予測時向上型 |
|---|---|---|
| 特　徴 | 調整課題（比例的推理）に取り組むことで，倍数関係や単位あたりの認識を形成 | 結果のフィードバック（予測と観察結果の不一致）を手がかりにして，倍数関係や単位あたりの認識を形成 |
| 人　数 | 60人—全体*の45%（4年生が比較的多い） | 19人—全体*の14%（学年差は小さい） |
| 比較課題Ⅱの認識 | 73%に認識改善がみられる（3年生の改善は少ない） | 74%に認識改善がみられる（3～5年生を通じて） |
| 段階移行タイプとの対応 | 2-3-2型，2-3-3型<br>2-3-4型，2-4-2型<br>3-4-4型など | 2-2-3型<br>2-2-4型<br>3-3-4型　の半数以上 |

＊全体…比較課題Ⅰで段階1～3であった子どもの数（133人）

(3)方略面の変化

ここでは判断や予測に対する理由づけの分析により，方略面から，(1)(2)でみられた認識の変化の内容について，さらに検討を行った。

小問としては，各学年で方略の変化がよくみられた小問4A を分析の対象とした。まず，比較課題，調整課題について小問4A に対する正誤方略の分類を行った。その結果を TABLE 5 に示す。以下の分析は，比較課題 I と比較課題 II の間の方略の変化を検討した後，調整課題の方略との関連を明らかにするという手順で行った。

TABLE 5 小問4A に対する方略

| 課題内容 | | 〈比較課題〉 左右どちらが濃いか？ ジュース／水 $\frac{4個}{2dl}$ vs. $\frac{6個}{3dl}$ | 〈調整課題〉 ジュースは何個必要か？ ジュース／水 $\frac{4個}{2dl}=\frac{?個}{3dl}$ |
|---|---|---|---|
| 正答に至る方略 | 単位あたり | C 方略（calculating）<br>「同じ」：どちらも水1dl あたりにジュースが 2 個入っているから。 | dm 方略（division & multiplication）<br>「6 個」：4÷2＝2，1dl に 2 個ずつ入れるから，2×3＝6個。 |
| | 論理的比例 | D 方略（disorderly）<br>「同じ」：水もジュースも多いから。 | ℓ 方略（logical proportion）<br>「6 個」：水が多くなっているので，ジュースの量も多くする。 |
| 誤方略 | | $A_3$方略…一方の量による判断<br>「右」：ジュースの量が多いから。<br>$D_1$方略…2 量の誤った関係づけ<br>「右」：水もジュースも多いから。<br>$D_3$方略…不十分な補償関係の理解<br>「右」：水が多いがジュースも多い。 | $a_1$方略…加法的推理による誤り<br>「5 個」：水が1dl増えているので，ジュースの量も 1 個増やす。<br>$m_1$方略…倍数操作の拡大適用<br>「8 個」：水が増えているので，ジュースの量を倍にする。 |

・比較課題における方略名は，藤村(1990)の命名にしたがった。

比較課題の小問4A に対する方略には，TABLE 5 に示したように，正答に至るものとして，C 方略(単位あたりの認識) とD 方略 (論理的比例) がみられた。ここでC 方略は，結果の冒頭で述べた正答の基準Sを，D 方略は基準Lを満たすものである。また主たる誤方略としては，$A_3$方略(一方の量による判断)，$D_1$方略(2 量の誤った関係づけ)，$D_3$方略 (不十分な補償関係) の 3 種類がみられた。

一方，調整課題の小問4A に対する方略には，正答に至るものとして，dm 方略 (単位あたりの認識) と ℓ 方略 (論理的比例)がみられた。ここで dm 方略は正答の基準 Sを，ℓ 方略は基準Lを満たすものである。また誤方略には主として，$a_1$方略(加法的推理)，$m_1$方略(倍数操作の拡大適用) の 2 種類がみられた。

比較課題 I から比較課題 II にかけての，小問4A における方略変化（及び無変化）パターンを示したのが TABLE 6 である。これについて7×3の $\chi^2$検定を行ったところ，方略変化パターンの分布に学年間で有意な差がみられた ($\chi^2=46.43$, df＝12, $p<.01$)。そこで対数線型モデルのあてはめによる分析を行った結果，TABLE 6 に示す標準効果が得られた。

TABLE 6 方略変化パターンの人数分布

| 比較 I →比較 II | 3 年生 | 4 年生 | 5 年生 | total |
|---|---|---|---|---|
| (1)誤方略 → 誤方略 | 15 | 18 | 8* | 41 |
| (2)誤方略 → D 方略 | 9** | 3 | 4 | 16 |
| (3)誤方略 → C 方略 | 6 | 10 | 9 | 25 |
| (4)D 方略 → D 方略 | 11** | 4 | 4 | 19 |
| (5)D 方略 → C 方略 | 3 | 10+ | 5 | 18 |
| (6)C 方略 → C 方略 | 1* | 5 | 22** | 28 |
| (7)その他 | 2 | 4 | 7 | 13 |
| total | 47 | 54 | 59 | 160 |

・対数線型モデルのあてはめによる分析で，数字 は有意な標準効果（正），数字は有意な標準効果（負）
・有意水準 ** ……$p<.01$, * ……$p<.05$, + ……$p<.1$

この分析結果をもとに，比較課題 I の方略ごとに学年間の方略変化の差異について検討した。まず，比較課題 I で誤方略であった場合 (TABLE 6 の(1)(2)(3))，比較課題 II にかけての方略変化として，3 年生ではD 方略への変化が多かったのに対し，4，5 年生ではD 方略よりもC 方略への変化が多くみられた。このことは，4 年生以降では調整課題を経て意味理解が進み，精緻な理由づけを行えるようになることを示している。また比較課題 I でD 方略を用いた場合 (TABLE 6 の(4)(5))，3 年生では方略変化がみられない場合が多いが，4 年生ではC 方略への変化 (理由づけの精緻化) が多くみられた。このように 4 年生では他の学年に比べて，誤方略やD 方略からC 方略への変化が比較的よくみられた。この 4 年生の方略変化の特質は，結果 1 でみられた，学年と課題の交互作用を説明するものであると考えられる。

方略の変化としては，①誤方略からD 方略 (基準 L)，②誤方略からC 方略 (基準S)，③D 方略 (基準 L) からC 方略 (基準 S) の 3 種類 (TABLE 6 で下線を引いたパターン) がみられた。次に，比較課題におけるこの 3 種類の方略変化と調整課題の方略との関連を検討した。両者の関連について人数分布を示したのが TABLE 7 である。TABLE 7 について3×3の $\chi^2$検定を行ったところ，比較課題の方略変化パターンによって，調整課題での方略の分布に有意な差がみられた ($\chi^2=21.16$, df＝4, $p<.01$)。

また，対数線型モデルのあてはめによる分析の結果，比較課題で誤方略からD方略に変化した場合の調整課題における方略は，他の方略変化パターンに比べて，ℓ方略が有意に多く，dm 方略が有意に少なかった。またD方略からC方略に変化した場合の調整課題における方略は，他の方略変化パターンに比べて，dm 方略が有意に多かった。

TABLE 7　比較課題における方略変化と調整課題における方略との関連

| 方略変化パターン 比較Ⅰ→比較Ⅱ | 調整課題の方略 誤方略 | ℓ方略 | dm 方略 | total |
|---|---|---|---|---|
| ①誤方略 → D方略 | 5 | 9* | 2** | 16(10%) |
| ②誤方略 → C方略 | 4 | 3 | 18 | 25(16%) |
| ③D方略 → C方略 | 0 | 1 | 17** | 18(11%) |
| total | 9 | 13 | 37 | 59(37%) |

・対数線型モデルのあてはめによる分析で，数字は有意な標準効果（正），数字は有意な標準効果（負）

・有意水準　**……p<.01，*……p<.05，

・単位は人数，（　）内は総数（160人）に対する割合

以上より，比較課題Ⅰから比較課題Ⅱにかけての方略変化は調整課題での方略に依存することが明らかになった。ここで，D方略とℓ方略は論理的比例という点で共通の認識を必要とし，またC方略と dm 方略は単位あたりという点で共通の認識を必要とする。この点から結果を再度解釈するならば，調整課題では比較課題Ⅰに比べて認識面でより高次の(より精緻な)方略が用いられ，比較課題Ⅱでは調整課題と類似した(共通の認識を必要とする）方略が用いられる傾向にあるといえる。

## 考　　察

### 1. 仮説の検証

(1)比例的推理と内包量比較の関係

課題別得点の分析において，課題差(比較課題Ⅰ<調整課題)が有意であったこと，また，段階移行タイプの分析において，3年生で2-3-2型，4年生では2-3-3型，3-4-4型など，比較課題Ⅰに比べて調整課題で高次の段階にあるタイプの人数が多かったことより，仮説1：比例的推理は内包量比較に先行して，3，4年生から現れはじめる，は支持された。

(2)具体物の操作(比例的推理)による内包量比較の改善

正答数の分析において，各学年(特に4年生)で，比較課題Ⅰ—比較課題Ⅱの課題差が有意であったこと，また，段階移行タイプの分析において，4年生で2-3-3, 3-4-4型，5年生で2-2-3，3-4-4型など，比較課題Ⅰと比較課題Ⅱの間で段階が高次化するタイプの人数が多かったことより，仮説2：比例的推理を特質とする具体物の操作は内包量比較を促進する，は4，5年生において支持された。3年生では判断の正しさが増した子どももがいくらかみられたが，全体として変化は小さかった。

### 2. 比例的推理，内包量比較における発達的変化

以上の分析，仮説検証の結果をもとに，小学校3年生から5年生にかけての発達的変化について考察を行い，先行研究との関連を検討する。

まず3年生（8～9歳）では，比例的推理が内包量比較に先行するが，比例的推理における量的な認識(倍数関係や単位あたり）を内包量比較に適用できない子どもが多い。これは，数学的には同一事象の2側面である比例的推理と内包量比較が子どものなかで協応せず，別の過程として認識されていることを示すものと考えられる。

次に4年生(9～10歳)になると，比例的推理が内包量比較に先行するとともに，比例的推理における認識を内包量比較にも適用できる子どもが多くなる。しかしながら2-3-2型の子どもが若干みられたことからも，4年生における比例的推理と内包量比較の協応はまだ不完全であると考えられる。

5年生（10～11歳）では，内包量比較が当初からある程度高い水準にあるのが特徴的である。この学年でも，比例的推理による量認識（内包量比較）の改善がみられた。4年生と比較すると，比例的推理と内包量比較の協応はより進んでいるが，一方で，内包量比較，比例的推理ともに低次の子ども（2-2-2型）もいくらか存在し，段階の分布に広がりがみられた。

Inhelder & Piaget (1955) は，天秤課題や写影課題などを用いて，児童期から青年期にかけての比例概念の発達を検討した。それによれば，具体的操作期の第2段階（ⅡB：9, 10歳）では，「(天秤課題の場合）重りが重いほど，支点に近づけるとつりあう」といった質的対応（correspondance qualitative）によって主に課題の解決が見いだされるのに対し，形式的操作期の第1段階(ⅢA：11, 12歳)以降では，計量的比例(proportion métrique)によって課題の解決が導かれた。

本研究で見出された2-2-2型の子どもは，倍数関係などの量的関係把握に至らない点で，認識面では Inhelder & Piaget の示した段階ⅡBに対応すると考えられる。一方，2-3-2型，2-3-3型，3-4-4型など，比例的推理で段階3以上の諸タイプは，倍数関係や単位あた

りにもとづく計量的な推理を行う点で，比例的推理の側面に限定すれば段階IIIAの認識的特質を持つと考えられる。

本研究の結果より，年齢的には段階IIBに対応する3，4年生のうち，3年生で38%，4年生で63%が，2-3-2型，3-4-4型など比例的推理で段階3以上のタイプであり，1：2や2：3など比較的単純な比を含む調整課題(比例的推理)の場合には，倍数関係や単位あたりなど認識的には段階IIIAの特質を示すことが明らかになった****。これに対して，形式的操作期に至って比例についての法則が発見され説明されるとしたPiagetの指摘は，比例的推理と内包量比較が十分に協応し，単位あたり認識が全般的に成立する時点(4-4-4型が多数出現する5年生以降）を捉えていたものと推察される。

また，本研究の3，4年生の約半数(2-3-2型，3-4-4型など）が比例的推理の側面で示した倍数関係や単位あたりの認識は，Tourniaire (1986) が指摘した「比例についての何らかの考え」を説明するものであろう。Wilkening & Anderson (1982) は，調整課題（比例的推理)での代数的統合ルールを指摘したが，比例的推理が内包量比較に先行しつつ，倍数関係や単位あたりの認識が徐々に成立していく過程が，Siegler (1981) の示したルールIIIに対応するところでの，より詳細な発達の様相ではないかと考えられる。

比例的推理が内包量比較に先行する理由としては，第1に，比例的推理には，「内包量が一定のとき，一方の量が増加すると他方の量も増加する」という初歩的な論理的比例の理解が反映されやすいことが挙げられる。松田ら (1990) が，距離，時間，速さの定性的関係理解が9歳頃までに成立するとしたことからも，この論理的比例の理解は早期(小学校低学年)に成立すると推測される。そしてこの理解が，比例的推理の場面で変化率に着目する手がかりとなり，倍数関係や単位あたりといった量的認識の形成を促すと考えられる。第2の理由としては，内包量比較には，特に内包量固有の理解が必要とされることが挙げられる。濃度の場合，一般に溶質と溶媒が同種の量であることと，溶質と溶媒の混合のイメージが，「濃さ」の理解の妨げになると考えられる。

**** 比例的推理の前提となる，単一次元内の量化（quantification）については，1：2の量化のみ，9，10歳からみられはじめることが，Piaget et al. (1968) により指摘されている（車輪の半径と回転数，移動距離の関係を問う実験などの結果による)。

### 3. 調整課題による認識の改善

結果1，2を通じて，調整課題(比例的推理)の実施による内包量認識の改善（比較課題IからIIにかけての段階の高次化）がみられた。

認識の改善に働く要因としては，結果2(2)で示したように，(a)比例的推理の効果（初回予測時向上型）と(b)フィードバックによる仮説検証の効果（修正予測時向上型)の2つが明らかになった。(a)の効果は比例的推理と内包量比較の協応が不十分である3年生で小さく，協応が進んだ4・5年生では大きいという学年差がみられた。一方，(b)の効果は(a)の効果に比べるとかなり小さいものの，3～5年生を通じてみられた。本研究の場合，(a)の効果が認識改善を促す主たる要因であったが，フィードバックをより明確にし，予測と観察結果の不一致を際立たせるなど，具体物の工夫により(b)の効果を高めることが可能ではないかと考える。

認識の改善の内容に関しては，結果2(3)で示したように，比較課題IIで適用された方略と調整課題で適用された方略との間に，認識面での共通性がみられた。このことから，比較課題IIでみられた認識の改善は，より具体的には，調整課題における精緻な方略の適用が比較課題IIでの方略の精緻化をもたらしたものであることが明らかになった。

これらの結果より，比例・内包量指導に関しては，(a)(b)の効果を高める教具の工夫を通じて，子どもが比例的推理の側面で示す精緻な方略を内包量比較の改善に結びつけることが1つの方向性として示唆される。

## 引用文献

Everitt, B.S. 1977 *The analysis of contingency tables*. London : Chapman & Hall. /山内光哉（監訳） 1980 質的データの解析 新曜社.

藤村宣之 1990 児童期における内包量概念の形成過程について 教育心理学研究, 38, 277—286.

Inhelder, B., & Piaget, J. 1955 *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Presses Universitaires de France. / A. Parsons, & S. Milgram (Trans.) 1958 *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Basic Books.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K. 1983 Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York : Academic Press.

小田切忠人 1987 算数科における「1当たり量」の指導に関する一考察 琉球大学教育学部紀要, **30**, 1—6.

松田文子・橋本 巌・松田伯彦 1990 時間, 距離, 速さの関係概念の形成過程 日本心理学会第54回大会発表論文集, 73.

Noelting, G. 1980 The development of proportional reasoning and the ratio concept : Part I differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, 217—253.

Normandeau, S., Larivée, S., Roulin, J., & Longeot, F. 1989 The balance-scale dilemma : Either the subject or the experimenter muddles through. *Journal of Genetic Psychology*, **150**, 237—249.

Piaget, J. 1970 *L'épistémologie génétique*. Presses Universitaires de France. / 滝沢武久 (訳) 1972 発生的認識論 白水社.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. 1968 *Épistémologie et psychologie de la fonction*. (*Études d'Épistémologie Génétique* **23**.) Presses Universitaires de France.

Siegler, R.S. 1981 Developmental sequences within and between concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, No. 189.

Siegler, R.S., & Jenkins, E. 1989 *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

正田 良 1989 関数のつまずきと量 数学教室8月増刊号 (No.452), 国土社

Tourniaire, F. 1986 Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, **17**, 401—412.

Tourniaire, F., & Pulos, S. 1985 Proportional reasoning : A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, **16**, 181—204.

Wilkening, F., & Anderson, N.H. 1982 Comparison of two rule-assessment methodologies for studying cognitive development and knowledge structure. *Psychological Bulletin*, **92**, 215—237.

弓野憲一 1981 対数—線型モデルによる質的データの解析とそのためのBASICプログラム 静岡大学教育学部研究報告自然科学篇, **32**, 189—215.

付 記

本論文は京都大学大学院教育学研究科に提出した修士論文（1990年度）の一部を加筆修正したものです。論文の作成にあたり，御指導いただきました，京都大学教育学部 田中昌人教授，子安増生助教授に心から感謝いたします。また本研究の実施にあたり，御協力いただきました小学校の先生方，ならびに児童の皆様に厚く御礼申し上げます。

(1992年2月10日受稿)