

展 望

数学的問題解決における転移を促進する知識の獲得について

寺 尾 敦¹ 楠 見 孝²

本レビューは数学的問題解決（特に代数文章題の解決）における転移を促進する知識の獲得に焦点を当てたものである。数学の問題には「類似」目標課題と呼ばれるある難しい問題のクラスが存在する。どのような知識がこの類似目標課題への転移を促進するのかという問題の検討が本レビューの目的である。研究を整理するために、獲得される知識の違いに関して、「例題アプローチ」「解法構造アプローチ」「構造生成アプローチ」という類別を用いた。「例題アプローチ」では、獲得すべき知識は多数の例題とその解法であるとされる。このアプローチは類似問題への転移という問題に答えるものではなかった。「解法構造アプローチ」では、獲得すべき知識は解法構造すなわち等式の形レベルの抽象的知識であるとされる。このアプローチにはこれを支持する実験的証拠が不足していた。「構造生成アプローチ」では、獲得すべき知識は等式レベルより抽象的な解法生成のアイデアであるとされる。このアプローチは、まだ実験的証拠が十分でないものの、最も有望なアプローチであると考えられた。我々は解法生成の知識の獲得に関して今後の研究課題を議論し、獲得のプロセスを明らかにすることが必要であると主張した。

キーワード：転移，知識獲得，数学的問題解決，抽象化，アナロジ。

1. はじめに

問題解決に熟達するためには、ある課題（例題）で学習したことを他の新奇な課題（目標課題）に適用して、その問題を解決する能力の獲得が非常に重要となる。このような問題解決は「学習の転移」と呼ばれる。学習の転移についての心理学的研究は古くは Thorndike らの研究（Thorndike & Woodworth, 1901）から、現在まで数多く行われてきた。また、教育現場では、学習の転移は学習者にぜひとも身につけさせたい能力とされ、「応用力の育成」などといった言葉のもとで多くの実践が工夫されてきた。

一般的結論として学習の転移は容易には成立しない。数学的問題解決を扱った研究だけを取り上げても、多くの研究が転移の成立が非常に困難であることを証明している（たとえば、Reed, 1989; Reed, Dempster & Ettinger, 1985; Reed & Ettinger, 1987; Ross, 1984）。たとえば、代数の文章題を題材にした Reed, Dempster & Ettinger (1985) では、問題の解法がほんの少し変化しただけで転移は妨げられてしまった。多くの実験が失敗に終わっているために、転移の成立に懐疑的な研究者もいる（Detterman, 1993）。

しかしながら、いくつかの研究は転移の証拠を示すことに成功している。Reed, Ernst & Banerji (1974) は、「宣教師と人喰い人種問題」と「嫉妬する夫問題」を用いて、2つの問題間の関係を教示すれば、「嫉妬する夫問題」から「宣教師と人喰い人種問題」への方向に限って転移が生じることを示した。Singley & Anderson (1985, 1989) は3種類のテキストエディタ（ライン・エディタが2つとスクリーン・エディタが1つ）を用いて、あるライン・エディタの使用がもう1つのライン・エディタの使用に正の転移をもたらすことを示した。Gick & Holyoak (1983) や Catrambone & Holyoak (1989) は、「デュンカーの放射線問題」とその同型問題（問題文の文脈は異なるが解法が同一の問題）を用いて、2つの問題の解法についての一般的なスキーマを形成することによって転移が促進されることを示した。このほかにも、いくつかの研究が転移の存在を示してきた（たとえば、Kieras & Bovair, 1986; Kotovsky, Hayes & Simon, 1985）。数学的問題解決を扱った研究としては、Reed & Bolstad (1991) が、代数の文章題を用いて、ある問題カテゴリーの最も単純な問題と最も複雑な問題を学習すれば、そのカテゴリーに属する他の問題への転移が生じることを示した。また、Schoenfeld (1985) は、不等式の証明などを題材にして、ヒューリスティックスの直接的教示が転移を促進することを示している。

¹ 東京工業大学総合理工学研究科システム科学専攻

² 東京工業大学社会理工学研究科人間行動システム専攻

以上の諸研究から、転移は非常に難しいながらも確かに成立しうることがわかる。したがって、転移はいつ起こり、なぜそれが起こるのか、あるいはなぜ起こらないのかといったことを明らかにする必要がある。しかしながら、1世紀にもなろうとする転移研究の歴史にもかかわらず、転移についての研究者たちはこれらの疑問にはまだ十分に答えることができないでいる(Reed, 1993)。転移メカニズムの解明において最も重要な課題の1つは、学習者が例題からどのような知識を獲得すべきかを明らかにすることである。学習者が例題の解決から「何か」を学習することは確実だが、その学習内容についてはまだはっきりとわかっていない(Vollmeyer, Burns & Holyoak, 1996)。

このレビューでは、数学的問題解決における学習の転移を促進する知識とはどのようなものであるかという問題について、最近までの研究をまとめ、今後の課題を述べたい。特に、代数文章題を題材にした研究を中心に議論を進める。Reed (1993) も指摘するように、代数文章題は数学的問題解決における転移を研究する題材として最も適切なものの1つである。

2. 数学的問題解決に特有の目標課題

転移を促進するような知識とはどのようなものであるのかがこのレビューの興味を中心であるが、この知識にはある条件が付けられなければならない。それは数学の問題の特徴に関連している。この条件についてまず述べよう。結論を先にいえば、「この知識は、例題と同型でない類似問題と呼ばれる目標課題にも適用可能でなければならない」というのが、学習者が獲得すべき知識に付ける条件である。

これまでの多くの転移研究は、例題とまったく同一の解法構造を持つ「同型問題」を目標課題として用いることがほとんどであった。「同型」の一般的定義は、ベース領域とターゲット領域の表象間に1対1の対応があること(VanLehn, 1989)であり、代数文章題では2つの問題が同一の方程式で解けること(Reed, 1987)である。

パズル的な同型問題の解決を題材にしたものとしては、先にも述べた Gick & Holyoak (1983) が有名である。彼女らの実験で用いられたのはデューカーの放射線問題とその同型問題であり、いずれも「収束解法」と呼ばれる同一の解法で解決される。数学の問題を題材にしたものとしては、代数の文章題を用いた Reed (1989) や初等的な確率の問題を用いた Ross & Kennedy (1990) などがある。これら2つの研究では、目標課題は例題と同じ形の等式(公式)を用いて解決され

る。

一般に、同型問題の難しさは、問題文脈の違いを越えて例題から目標課題への解法の写像を行わなければならない点にある(Reed, 1993)。これはアナロジの問題であって、近年多くの研究が行われている。アナロジとは、既によく理解している「基底領域」の知識を現在の場面(「目標領域」)に適用(写像)するためのメカニズムであり、「ターゲットの表現」「ベースの検索」「写像」「正当化」「学習」というプロセスを含む(Holyoak, Novick & Melz, 1994; 鈴木, 1996, p.32)。

多くの転移研究が同型問題を用いており、またそれはアナロジの諸理論の構築に貢献してきたが、数学的問題解決における目標課題は同型問題だけではない。というより、目標課題において例題にはなかった要素が加えられることは非常に頻繁に起こり、実際の教育場面では学習者に与えられる目標課題のほとんどが同型問題ではないといった方が正確である。認知科学の文献では、たとえば Holyoak, Novick & Melz (1994) が、例題と目標課題が完全に同型であるのはまれなことだと指摘している。数学的問題解決において、この事実は問題のレベルが上がるほど顕著であり、たとえば大学入試レベルの問題について中西(1994)や吉永(1993, 1994)が指摘している。例題と何らかの意味で(たとえば、問題の文脈において)類似はしているが同一の解法(代数文章題なら同一の等式)で解決できない目標課題を、Reed (1987) にならって「類似問題」と呼ぶことにする。

多くの目標課題が同型問題でなく類似問題であるという点が、数学の問題の特徴である。このため、数学的問題解決における転移のメカニズムを明らかにするためには、類似問題を材料に用いた研究がどうしても必要になる。しかし、鈴木(1996, p.35)も述べているように、このような研究はまだ少ないのが現状である。数学の問題は、転移課題のほとんどが類似課題であるという点で、パズル的な問題とも算数の文章題とも異なっている。まず、パズル的な問題を用いた転移研究が用いてきたのは同型な目標課題であり(たとえば、Catrambone & Holyoak, 1989; Gick & Holyoak, 1980, 1983; Gick & McGarry, 1992; Reed, Ernst & Ettinger, 1974)、これらの研究で得られた知見がより複雑な問題である数学の問題解決にただちに拡張できるとは限らない(Reed, 1993)。また、算数文章題を題材にした研究は非常に多くなされているが、算数文章題での目標課題も基本的には同型問題であり、数学的問題解決での転移を支えるメカニズムを明らかにするためにはこれらの研究か

ら得られた知見だけでは十分でない。さらに、「算数」文章題の難しさは「数学」の問題の難しさとかなり異なっている。たとえば、算数文章題の難しさは問題の理解過程、特に問題文中の個々の文の理解をもとに全体的な問題理解が行われる「統合過程」(Mayer, 1992)にあるとされ、問題理解の重要さが強調される(坂本, 1997; 多鹿・石田, 1989)。問題理解後の方略選択にしても、たとえば「問題文中に何倍という表現があればかけ算を使う」(坂本, 1997)など、不十分な問題理解(この例では、問題文中の量の関係でなくキーワードに着目している)と深く関連した方略選択が問題にされることが多い。したがって、「問題を理解できればもうその問題は解けている」といったことがよくいわれる。しかしながら、代数文章題など「数学」の問題では、学習者は文章読解能力の発達した中学生や高校生であり、問題文の誤った理解が問題解決を妨げるというよりは問題を理解した後いかにその問題を解くかという方略に解決の難しさがある場合がほとんどであろう。寺尾・市川・楠見(1998)は、代数文章題を題材にして、問題解決に失敗した後に学習者(高校1年生)に誤りの原因を分析させているが、問題文理解段階での誤りを原因にあげたのは41人のうちわずか6人であった。また実際、こういった誤りが原因と考えられる問題解決の失敗も非常に少数であった(この部分のデータは未公開)。パズル的な問題や算数文章題を用いた研究が多くの成果を上げてきたことは間違いないが、数学的問題解決における転移を理解するにはこれらの研究だけでは埋められない溝が確かにあると言える。

類似問題を解決するということは、代数文章題でいえばこれまで構成したことのない形をした等式を組み立てるということである。このような問題解決が難しいものであることはすぐにわかる。今世紀初頭にThorndikeによって提唱され、後にSingley & Anderson(1985)によって正しさが実証された、転移の「同一要素説」によれば、転移の容易さは例題と目標課題で共有される「同一要素」(共有されるプロダクション・ルール)の数によって決まる。すると、例題にはなかった要素が加えられる類似問題への転移は難しいことがわかる。Holyoak, Novick & Melz (1994)は、Reed (1987)の実験データを再検討し、類似問題の解決の難しさは例題にはなかった要素を生成するプロセス(彼らは、このプロセスをAdaptationと呼んでいる)にあることを主張している。Novick & Holyoak (1991)も同様の結果を提出している。

初心者の問題解決は例題で学習した解法に強く依存

しており、問題中に与えられた数量や求める数量を含んだ等式を思い出してそれを利用しようとしたり(Bhaskar & Simon, 1977; Larkin, Mcdermott, Simon & Simon, 1980)、例題での等式をまったく修正しないで目標課題に適用したりしようとする(Reed, Dempster & Ettinger, 1985)。しかし、テキストや例題にあった等式や公式を単に記憶しただけでは類似問題は解決できない。学習者が会おう多くの課題は類似問題なののである。それではどのような知識を獲得すれば同型問題のみならず類似問題への転移も促進されるかということが重要な問題になる。

3. 類似問題への転移を促す方法

類似問題でも同型問題でも、一般に、目標課題を解決するために学習者が取りうる方法は2つに大別される(Reed, 1993; Reed & Bolstad, 1991; Ross & Kennedy, 1990; 鈴木, 1995)。1つは例題の解法を直接に利用する方法である。このレビューでは、これを「例題アプローチ」と呼ぶことにする。このアプローチでは例題の解法の抽象化は行われず、学習者は例題中の要素を目標課題の要素に写像しようと試みる。もう1つのアプローチは、多くの目標課題に適用可能な抽象的知識を例題から獲得し、それを利用するという方法である。これを「抽象化アプローチ」と呼ぶことにする。例題の直接的利用でなく、抽象化を媒介として転移の成立を目指すところが例題アプローチとの違いである。

「例題アプローチ」と「抽象化アプローチ」という類別は、転移や類推を研究する多くの研究者が認める基本的なものである。たとえば、鈴木(1995)は、転移を成立させる基本的メカニズムは類推と抽象化であると述べている。Ross & Kennedy (1990)は、前者を「学習-利用性(study-availability)ビュー」、後者を「一般化ビュー」と呼んでいる。

本レビューも、基本的にこの類別に従って先行研究を整理するが、抽象化のレベルの違いに基づいて「抽象化アプローチ」をさらに2つのアプローチ(「解法構造アプローチ」と「構造生成アプローチ」と呼ぶ)に分ける。つまり、基本的類別は「例題アプローチ」と「抽象化アプローチ」であり、後者をさらに「解法構造アプローチ」と「構造生成アプローチ」に類別する。「抽象化アプローチ」を2つに類別した点が本レビューの重要な特徴である。なぜこのような類別が必要になるかというと、以下に述べるように、「抽象化アプローチ」の中で抽象度の異なる知識の有効性が主張されるようになったからである。

従来の多くの研究では、学習者が例題から獲得すべ

き抽象的知識は解法構造そのもの（数学的問題解決では、等式や方程式の形）であると見なされてきた（たとえば、Reed, 1987 ; Reed & Bolstad, 1991 ; Ross & Kennedy, 1990）。つまり、解法構造そのもの（等式の形）を骨組みとして獲得し、目標課題の解決においてはそれに適切な肉付けをして対処するという方法である。このレベルの抽象化を媒介にして転移の促進を図る方法を「解法構造アプローチ」と呼ぶことにする。このアプローチに対して、近年、解法構造よりも抽象度の高い知識が問題解決に有効であるという主張が行われるようになった（Schoenfeld, 1985 ; Sherin, 1997 ; Terao, Kusumi & Ichikawa, 1997）。一般的に言えば「いかにして正しい解法を作っていくか」という「解法構造生成の知識」であり、転移の文脈で言えば「いかにして目標課題の正しい等式を構成していくか」という知識の有効性の主張である。こういった知識を利用して転移を図る方法を、解法構造（等式の形）を生成するという意味から、「構造生成アプローチ」と呼ぶことにする。「解法構造アプローチ」も「構造生成アプローチ」も抽象的知識の利用という点では共通しているが、抽象化のレベルが異なっている。「解法構造を生成する知識」の方が「解法構造そのもの」よりも抽象的だと言えるのは、前者の方がより広範囲の問題に適用可能（後者の適用範囲を含んで）だからである。

このレビューでは、「例題アプローチ」「解法構造アプローチ」「構造生成アプローチ」という3つのアプローチの類別を用いて先行研究を展望し、今後の研究課題について議論する。文献展望には、教育心理学と教育実践との対話を少しでも行いたいという考えから、いわゆる受験参考書と呼ばれているものも含めた。

これら3つのアプローチでは、学習者が獲得する知識の抽象度が異なる。学習者が獲得する（すべきとされる）知識は「例題アプローチ」では多数の例題とその解法（抽象化なし）であり、「解法構造アプローチ」では解法構造そのもの（等式の形レベルの抽象化）であり、「構造生成アプローチ」では解法構造を生成するアイデア（等式の形よりも抽象的）である。FIGURE 1は、3つのアプローチで利用される知識とその抽象度を図示したものである。

3.1. 例題アプローチ

一般に、例題アプローチでは、学習者は例題とその解法を学習し、目標課題（類似目標課題でも同型目標課題でも）の解決では例題の解法を目標課題へと「写像」と考える。単一の例題を学習するだけでは、類似目標課題への転移は難しい（Reed, Dempster & Ettinger, 1985）。

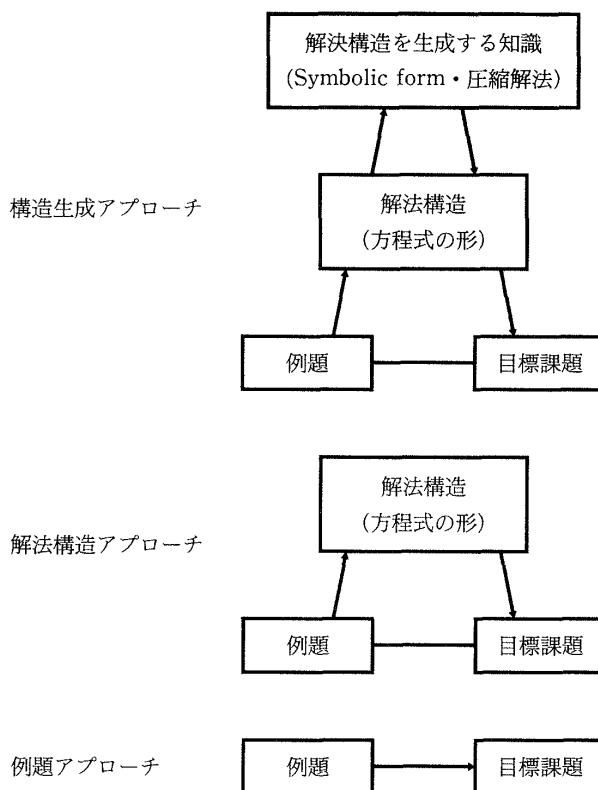


FIGURE 1 3つのアプローチで利用される知識とその抽象度

そこで、このアプローチでは、類似目標課題の解決のために、多数の例題を学習し複数の例題の解法を組み合わせることで類似目標課題を解決しようとする。類似問題の難しさが例題にはなかった要素の出現にあるのならば、その要素は別の例題で学習して、目標課題の解決では複数例題からの類推（例題の直接的利用）を行えばよい、という発想である。

Reed & Bolstad (1991) はこの方法の有効性を実証した（実験2）。彼らは、いわゆる「仕事算」と呼ばれる問題カテゴリに属する最も単純な問題と最も複雑な問題を学習すれば、そのカテゴリ内の他の問題への転移が生じることを示した。目標課題の等式にあらわれる各要素は、最も単純な例題か最も複雑な例題のどちらか一方に必ず含まれていた。これをもう少し具体的に説明しよう。ある仕事をAとBの2人が行うとき、最も単純な問題では2人が同時に仕事を始めることになっており、最も複雑な問題では2人のうち一方が遅れて仕事を始めるようになっていた。また、最も単純な問題では仕事の全部が未完成であったが、最も複雑な問題では仕事の一部が完成していた。もし目標課題が「2人が同時に仕事開始／仕事の一部が完成」ならば、前者（仕事の開始）については最も単純な例題の

解法を利用し、後者(仕事の完成度)については最も複雑な例題の解法を利用すればよい。また、もし目標課題が「1人が遅れて仕事開始/仕事の全部が未完成」ならば、前者については最も複雑な例題、後者については最も単純な例題を利用すればよい。

この方法はあくまで例題の直接的利用を行うものであり、例題やその解法の抽象化を行うという観点はほとんどない。いわば、例題で学習した等式の「切り張り」によって必要な等式を構成する。類似目標課題の難しさは例題にはなかった要素が目標課題中に現れるという点にあるが、この方法では目標課題での正しい等式の中にどの例題でも学習しなかった要素が現れることはない。Reed (1993) は、類似問題を解決するためには複数例題を学習してその解法を直接利用することが有効であると主張し、この主張は Catrambone & Holyoak (1990) や Sweller & Cooper (1985) の結果からも支持されると述べている。Catrambone & Holyoak (1990) は、ポアソン分布を利用する問題を用いて、正解を得るための下位目標とその目標を達成するための方法が異なる場合には、問題間の転移はほとんど起こらないことを見出した。彼らは、学習者は広範囲にわたる例題を通して様々な解法手続きを学習する必要があると主張した。Sweller & Cooper (1985) も、代数方程式の操作を行う問題を用いて同様の結果を示し、問題解決に熟達化するためには様々なバリエーションの例題を学習する必要があると主張した。受験参考書では、和田 (1987, 1988) が類似の学習方法を薦めている。しかしながら、例題アプローチで類似問題への転移が可能であることは認めるにしても、このアプローチにはいくつかの大きな問題点がある。

まず、多くの例題とその解法を記憶することは、学習者にとって負担が大きいという問題がある。例題から目標課題へ解法の写像を行うためには、例題とその解法が詳細に記憶されていなければならない。この問題に対し、Reed & Bolstad (1991) は、「仕事算」では8つのバリエーションの問題が作成できるが、そのうち最も単純なものと最も複雑なもののわずか2種類を学習すればよいと述べている。基本的な代数文章題では、問題カテゴリとそのカテゴリ内の最難問題と最易問題がはっきりしているので、例題の増加という問題に対してこのような対処ができるだろう。しかし、もっとレベルの高い問題では代数文章題よりも多くの問題要素が含まれており、それらが様々に変化するので、問題カテゴリやその中での問題バリエーションの範囲をうまく決定することは非常に困難である。たとえば

大学入試の問題を見ても、ある問題がどのようなカテゴリに属しそのカテゴリ内で最も難しい問題と最も易しい問題はどれかを決定することは明らかに困難である。つまり、Reed & Bolstad (1991) の行った方法の忠実な実行は、問題のレベルが上がればすぐに困難になってしまう。それでは、彼らが有効性を示した方法の条件を少しゆるめ、ある問題カテゴリ内の最難と最易の問題がはっきりしなくても多くの例題とその解法を獲得していれば例題の解法の少しの修正で目標課題に対処できるのではないかと考えるのはどうだろうか。和田 (1987, 1988) はこの方法を推奨している。しかし、これまでの心理学実験の結果はこの考えを支持していない。学習者が問題の細部のほんのちょっとした変化に対応できないということが類似問題の難しさであり (Reed, 1987; Reed, Dempster, Ettinger, 1985), 多くの例題とその解法を知っていてもそれだけではよほど酷似した目標課題でない限り転移は期待できない。

次に、鈴木 (1996, p.80) も指摘するように、抽象化を媒介しない例題アプローチでは、例題と目標課題での要素の対応を決めるのに意味のない対応仮説が多く生じてしまうという問題点がある。例題中の要素の何が目標課題のどの要素に対応するかを考えると、正しい対応関係は最初から明らかではないので、様々な対応を考慮することになる。そうすると対応関係についての仮説が膨大になってしまうのである。いろいろな仮説を考えて、そこからいらないものを捨てよさそうなものを選ぶという目標課題の解決法がないわけではない。鈴木 (1996, p.81) は、受験参考書の公式などをよく意味を咀嚼しないまま例題を解き、応用問題(転移課題)にあたるときには、このような問題解決が行われるのではないかと述べている。Chi, Bassok, Lewis, Reimann & Glaser (1989) は、あまり優秀でない学習者がこのような問題解決を行っていることを見出した。彼らは例題を頻繁に参照するのだが、目標課題の正答率は優秀な学習者の半分程度であった。一方、優秀な学生は例題をあまり見ないで目標課題を解いていた。これは、優秀な学習者が例題から何らかの抽象化を行っている証拠であり、例題とその解法を詳細に記憶(あるいは頻繁に参照)してそれを目標課題に当てはめるという例題アプローチは、優秀な学生の行う柔軟な問題解決法ではないということを示している。

最後に、目標課題が学習済みの例題の解法の組み合わせだけで解けるものに限定されてしまっているという問題がある。もちろん、どのような目標課題であってもそれが解決できたということは解決のための何ら

かの知識を持っていたということであり、決して無から有を作り出したわけではない。しかし、Reed & Bolstad(1991)が行ったようないわば「解法の切り張り」ができなければ類似問題への転移が期待できないというのも不自然な考え方であろう。学習者は、ある目標課題に対する「例題」として与えられた課題で用いられる数学的知識の他に、様々な数学的知識を保持している。したがって、類似目標課題の解決において、「例題」の中では利用されなかった他の既有知識を用いることが可能なはずである。また、そうでなければ、目標課題の解決は、その目標課題に対して「例題」として学習した問題に含まれていたことしか利用できないという、きわめて柔軟性を欠いたものになってしまう。例題を学習したとき、その例題は学習者の知識構造の中で、他の既有知識と切り離されて単独で存在するわけではない。その例題と関連する他の既有知識と整合が取れるよう、相互に作用し、結びついて存在すると考えられる。鈴木(1996, p.74)も指摘するように、一般に例題アプローチでは、例題は他の知識と切り離された単独の知識として表現されてしまっているという問題点がある。目標課題の解決において例題に現れない数学的事実や性質が利用できるという証拠は、たとえば Terao, Kusumi & Ichikawa (1997) の研究で示されている。この研究の実験1では、学習者は距離を扱う例題を学習するが目標課題は角度を扱う問題であった。学習者が学んだ例題では角度に関する数学的事実や性質(たとえば、円の一周は360度であるとか、角度は距離のように和や差を求めることが可能であるということ)は用いられていないが、学習者(高校生)はこれを既有知識として保持していると考えられる。だから、目標課題が距離でなく角度を用いるものであっても、こういった知識の助けをかりて転移が成立しうるし、実際そうであった。

人間の問題解決は一般に例題に強く依存していることが示され(たとえば、Reed, Dempster & Ettinger, 1987)、論理的推論についての多くの研究が抽象的ルールの有効性に否定的な見解を示してきた(たとえば、Griggs & Cox, 1982; Manktelow & Evans, 1979)という流れもあって、例題アプローチはいま転移研究の中心となっている。認知科学における類推のモデル化(たとえば、Holyoak & Thagard, 1989)も、このアプローチが主流である。しかし、上に述べたように、このアプローチには大きな問題点がある。

我々が最も問題視するのは、最後の問題点として述べた、「解法の切り張り」によって類似目標課題を解決しようとするこのアプローチの基本的発想である。結

局、このアプローチは「目標課題中に現れる例題にはなかった要素にどう対処するか」という問題を回避しており、ここでの目標課題はすでに類似目標課題ではないとも言える。これは教育理念の問題であるが、我々は目標課題の中に例題にはなかった要素があっても何とか対処ができるような知識の獲得を学習者には期待したい。つまり、学習者は初見の問題に対しても対処ができることを目標にしたい。このような考えは受験参考書にもよく見られ(中西, 1994; 吉永, 1993, 1994)、我々研究者サイドとしてはそのようなことが可能なのか不可能なのか、可能であるとしたらどのような知識の獲得が必要なのかといったことを明確に示すことで教育実践に貢献したいと考える。

3.2. 解法構造アプローチ

このアプローチでは、等式の形を例題から獲得する抽象的構造と考え、このレベルの抽象的知識を媒介にして転移を成立させようとする。これは、先に述べた多数の例題を利用する方法には抽象化という観点がほとんどないことと対照的である。一般に、抽象的な知識ほどより広範囲の課題に適用が可能である。したがって、例題との解法の類似性が低い類似目標課題に対しても、ある抽象化を媒介にして転移の促進が図れるのではないかと考えることは自然である。抽象化を媒介すれば、例題アプローチの問題点は解決される。学習者は、大量の例題を詳細に覚えておく必要はなく、抽象化したもののだけを記憶すればよい。また、獲得した抽象的知識を例示化することによって目標課題を解決するので、その解決が「例題の解法の切り張り」になったり、例題と目標課題との要素の対応について無意味な仮説が大量に発生することはない。

同型問題への転移では、このアプローチの有効性が示されてきた。Gick & Holyoak(1983)や Catrambone & Holyoak (1989) は、デューカーの放射線問題とその同型問題を用いて、「収束解法」と呼ばれる抽象的な解法スキーマを獲得することが転移を促進することを示した。「収束解法」は、代数の文章題では等式の形に相当すると考えられる。なぜなら、この抽象度のレベルにおいて同型問題間の「解法の同一性」が保証されるからである。Reed (1989, 1993) も、「収束解法」と「等式の形」が対応すると見なしている。

Ross & Kennedy (1990) は、順列や組み合わせなど初等的な確率の同型問題を用いて、抽象化が数学的問題解決での転移において重要な役割を果たしている証拠を得た。彼らの実験では、類推的問題解決において利用可能な先行例題を学習者に教えると、問題タイプ

についての一般化が促進され、次に会う目標課題のパフォーマンスが向上することが示された。つまり、最初の目標課題の類推的解決から解法の一般化がなされ、この一般的知識が第2の目標課題の解決を促進させることが明らかにされた。彼らは学習者が獲得した抽象的知識の内容を直接には明らかにしていないが、等式の形レベルで問題の類別を行っているので、このレベルの抽象化を媒介にしての転移を仮定していると考えられる。

このように、等式レベルの抽象化が同型問題への転移を促進するという証拠は示されてきた。しかしながら、数学的問題解決において、等式レベルの抽象化が「類似問題」への転移を促進するという証拠はまだ得られていない。Gick & Holyoak (1983) や Catrambone & Holyoak (1989) の結果は印象的であるが、この結果が数学的問題解決での類似問題への転移についてそのまま当てはまるとは言えない。Reed (1993) も指摘するように、代数文章題は放射線問題よりも複雑であるし、類似問題は同型問題よりもしばしば解決が難しい。

Reed & Bolstad (1991) は、「仕事算」と呼ばれる代数文章題を用いて、正しい等式とその等式のスロット（値の入る場所）に入れる値をどのように生成するかの手続き（たとえば、「一方の労働者の労働時間が、解答として要求されている労働者の労働時間（h）よりも3時間多いのならば、前者に対応するスロットに $h+3$ を代入せよ」というもの）を教示することによって、類似テスト課題への転移促進をねらった（実験1）。等式の形のレベルでは例題と類似目標課題の同一性が保証されないため、その部分を手続きの教示によって補おうという発想である。これは、代数文章題を題材にして「解法構造アプローチ」で類似問題への転移の促進を図った唯一とも言える研究である。彼の試みが成功していれば「いかなる知識を獲得することが類似目標課題への転移を促進するか」という問題に対して「解法構造アプローチ」の有効性を主張できたのだが、転移促進は見られなかった。現在の結論として、このアプローチは同型問題への転移には有効だが、類似課題への転移に有効であるという証拠はまだないと言える。

一般に抽象的知識はその利用が難しく、近年類推研究が盛んになったのには抽象的知識よりも具体的ベース（例題）を用いた思考の有効性に注目が集まったからというのも1つの事実である（鈴木, 1996）。「例題アプローチ」の有効性の主張はこの流れの中に位置づけられる。Reed & Bolstad (1991) は、まず「解法構造アプローチ」で転移の成立を示そうとしたが失敗し（実験

1）、「例題アプローチ」での成功を示している（実験2）。しかし、最近になって、「解法構造アプローチ」をあきらめて「例題アプローチ」を試みるという流れとは逆に、もっと抽象的な知識の有効性を主張する研究が見られるようになった。次に、この「構造生成アプローチ」に属する研究を取り上げる。

3.3. 構造生成アプローチ

抽象化を媒介にした転移を考えると、これまでの多くの研究は解法構造そのもの（等式の形）を学習者が獲得すべき抽象的知識と見なしてきた（たとえば、Reed & Bolstad, 1991 ; Ross & Kennedy, 1990）。しかし、3.2. で述べたように、このレベルの抽象化を媒介にして類似問題への転移を成立させようという試みは失敗に終わった（Reed & Bolstad, 1991）。そもそも学習の転移が成立するのは、例題と目標課題がある意味において同一と見なせるからである。等式の形レベルの抽象化は、例題と「同型」目標課題との同一性を保証する（等式の形という観点から見て2つの問題は同一）が、例題と類似問題との同一性は保証しない。類似問題に対して例題との同一性を保証するためには別次元の抽象化が必要である（最も極端な抽象化としては「数学の問題」という点で2つの課題が同一と見なせる）。構造生成アプローチでは、解法構造そのものではなく、解法構造を構成する、より抽象的な知識を媒介にして転移を成立させようとする。「方略的知識」や「ヒューリスティック」といわれる知識は、この「解法構造生成の知識」の1つである。

Terao, Kusumi & Ichikawa (1997) は、等式の形そのものよりも抽象的な知識である「いかにして等式を構成するか」という等式生成のアイデアの獲得によって、類似目標課題への転移を促進させることを試みた。実験に用いられた3つの問題は「追いつき問題」と呼ばれるもので、「2つのものがあって一方がもう一方に追いつく。このとき、2つのものが進んだ距離の差がある距離に等しくなる」という等式生成のアイデアという点で共通していると考えられた。方程式の形そのものは問題間で異なっていた。このアイデアは、一種の問題スキーマ（見慣れた問題を取り巻く知識のまとまりのこと。VanLehn (1989, p.546) などを見よ）であり、これが適用される問題のクラスに関する情報（一方がもう一方に追いつく問題）と解法に関する情報（距離の差がある距離に等しくなる）とから構成されている。このアイデアは、等式の形そのものよりも抽象的な知識である。スキーマ中の解法情報は方程式の形を柔軟に規定（「ある距離」の数式表現は問題ごとに決まる）しており、1つのアイデアから様々な形の等式が構成可能である。Terao et al. (1997)

はこのアイデアを「圧縮解法」と呼んでいる。実験結果は、圧縮解法の獲得によって転移が促進されるという考えを支持するものであった。

Sherin(1997)は、物理の問題解決を題材に、「シンボリック形式」(symbolic form)と呼ぶ知識(たとえば、「等式の全体が2つあるいはそれ以上のパーツの和になる」「2つの作用がきっちりバランスをとる」というような抽象的知識)が等式の理解や、等式生成の背後にあることを主張した。この知識の利用によって、テキストにはなかった等式を課題にあわせて生成できることがプロトコル分析によって示された。彼の研究は転移を題材にしたものではないので、シンボリック形式は学習者が保持しているものと仮定され、圧縮解法のように例題から獲得するという話はされていない。しかしながら、シンボリック形式も圧縮解法も式を作り出す基本的・抽象的なアイデアであり、記憶からそのまま検索したのではない新しな形の等式を構成できるという点で共通している。

鈴木ら(鈴木, 1995; 鈴木・栗山, 1996)は、「仕事算」と呼ばれる代数文章題の解法を「達成する」という抽象化を用いて教えると転移が促進されることを示した。「達成する」という抽象化そのものは数学的解法について何も言及していないので、この観点によって「2人の貢献量の総和が全体の達成量になる」ということ(これは Terao et al.,(1997)の言う「圧縮解法」に相当する)が学習者に明確になったと考えられる。

Koedinger & Anderson (1990)は、エキスパートによる幾何の証明問題の解決を研究し、エキスパートは抽象的なレベルの重要な解法ステップに注目し、重要でないステップをとばして証明の計画を立案することを見出した。幾何の問題の解決は代数の問題の解決とかなり異なっているので、類似問題への転移を促進する知識の性質はかなり異なっているだろう。また、彼らの研究は転移という文脈のものではない。しかしながら、彼らが見出したエキスパートの問題解決は、類似問題間で共通した大まかな等式の形を想定し、その後で問題ごとに変わる細部を構成するという、圧縮解法やシンボリック形式の利用による転移と類似点を持っている。解法の略図を先に構成し、その後で細部を埋めるからである。

グリーン(1985)は、6人の学生に対して8ヶ月の長さにわたって幾何の問題を解かせ、その発話プロトコルを詳細に分析し、Perdix というコンピュータプログラムで問題解決の様相をシミュレートした。ここでは「幾何的パターンの認識のための知識」「推論のための命題的知識」「目標設定と計画のための方略的知識」と

いう3つの知識が区別された。彼の研究は、数学的問題解決のプロセスとそこに使われる知識を明らかにしようとしたものであり、転移研究と言うよりはもっと広く問題解決の研究と言う方がふさわしい。したがって、類似目標課題にどう対処するかということに解答を提出しているわけではないが、問題領域に固有な「方略的知識」の有効性を主張しているという点では「構造生成アプローチ」に分類される研究と言えるだろう。

解法構造そのものよりも抽象的な方略的知識を利用して目標課題を解決しようという考え方は、古くは Polya (1945) による数学領域一般のヒューリスティックの有効性の主張に始まる。彼は、「図を書け」「似た問題を思い出せ」「問題を言い換えることができるか考えよ」など、非常に抽象的なヒューリスティックの有効性を主張した。また、Schoenfeld (1985) は、数学の授業を受講している大学生が参加した実験で、ヒューリスティックの直接的教示が転移を促進することを示した。教示されたヒューリスティックは5種類あったが、このうち、「可能であれば図を書け」「もし整数のパラメータがあれば帰納法を試みよ」「変数の少ない類似の問題を考えよ」というものについて教示の効果が認められた。彼の実験は数学的問題解決にかなり慣れた大学生が参加者であり、また参加者の数が7人と少なく、結果の一般性には疑問の余地が残る。しかしながら、「構造生成アプローチ」の有効性を示す1つの証拠として重要であろう。

3.2.の最後で述べたように、認知科学は抽象的知識の有効性に悲観的であったので、Polya (1945) のような主張は近年まで下火になっていた。しかし、実際の問題解決において解法構造そのものよりも抽象的な方略的知識が確かに利用されていることが明らかになったり(グリーン, 1985; Koedinger & Anderson, 1990; Sherin, 1997), そのような知識の教授が可能でその獲得が転移を促進することが示されたり(Terao, Kusumi & Ichikawa, 1997)するなど、こういった知識が再び注目されるようになった。ただし、Polya (1945) に比べればもう少し特定領域(幾何とか代数文章題)に固有の抽象的知識が取り上げられていることと(たとえば, Terao et al.(1997)の圧縮解法は問題スキーマの一種と言えるが, Polya のヒューリスティックは問題スキーマとは普通言わない), 単に有効性を主張するだけでなくそのメカニズムまで踏み込もうとする認知科学的研究が行われていることが異なる。

4. まとめと今後の課題

「構造生成アプローチ」は公開された研究がそれほど多くなく、特に類似目標課題への転移を支える知識に

ついて十分な実験的証拠が集まっているとはいいがたい。しかしながら、上に述べたようにいくつかの研究がこのアプローチの有効性を支持しており、類似問題への転移を促進する方法として現在のところ最も有望なアプローチではないかと考えられる。複数例題の解法の「切り張り」によって類似目標課題に対処する「例題アプローチ」は、有効性は実証されたが (Reed & Bolstad, 1991), 例題にはない目標課題での要素にどう対応するかという基本的問題を回避したものであった (3.1.の議論を参照せよ)。つまり、「新奇な形の等式をどう構成するか」という基本的問題に対して答えを提出していないと言える。また、このアプローチには記憶負荷の大きさなど様々な問題点があった。「解法構造アプローチ」は、類似目標課題に対するその有効性を支持する実験的証拠が見あたらなかった。前述したように、Reed & Bolstad (1991) の結果は、このアプローチでは類似問題への転移は促進されないことを示していた。市川(1997)は、「公式をひたすら暗記しているが、全部が覚えきれず、覚えた公式も問題解決場面で使えない」という実際の学習者の例を挙げている。公式を覚えるという行為は「解法構造アプローチ」のものであり、この事例は「解法構造アプローチ」の有効性に疑問を呈するものとなっている。受験参考書では、池田(1997)が、「公式をたくさん知っていて早く正確に適用できる」(解法構造アプローチに相当)ということ批判し、「自分で公式を作り出せること」(構造生成アプローチに相当)を重視する発言をしている。吉永 (1993, 1994) や中西 (1994) も同様の主張をしている。

構造生成アプローチが有効であるとしても、まだ明らかにしなければならない問題はいろいろ残されている。最も重要な課題の1つは、学習者が圧縮解法やシンボリック形式をいかに獲得するかを明らかにしなければならないということであろう。特に、教師の直接教示がない状況では、学習者はどのようなメカニズムでこれらの知識を獲得できるのだろうか。このレビューをまとめるにあたって、この課題について議論する。

一般に、問題スキーマはそれが適用できる問題のクラスについての情報と解法についての情報を持つ (VanLehn, 1989, p.546)。例題の解法は抽象化されて解法についての情報となるが、例題の文脈も抽象化されて問題のクラスについての情報となる。前述したように、圧縮解法 (Terao, Kusumi & Ichikawa, 1997) はこの2つの情報を持っている。最初に、抽象的な解法をいかに獲得するかという問題について述べる。

解法の抽象化

抽象的解法を獲得する方法として、2つの例題とその解法を比較する方法がまず考えられる。問題の比較は問題スキーマの帰納における重要なステップであることが示されてきた (たとえば, Gick & Holyoak 1983 ; Ross & Kennedy, 1990)。類似の方法として、数学の問題どうしの比較でなく、親しみある日常的な場面と1つの例題を比較することも可能である。鈴木 (1995) は、いわゆる仕事算の解法を「棒あめを2人が両端から食べる」ことにたとえて説明すると転移が促進されることを示した。この方法は、類推による問題解決の研究が「例題」から「目標課題」への類推的転移とその後に獲得される問題構造に関する知識を扱ってきたのに対して (たとえば, Gick & Holyoak, 1983 ; Ross & Kennedy, 1990), 親しみのある「日常的な場面」から「例題」への類推を利用して抽象的知識を獲得する点が特徴的である (ただし、鈴木(1995)ではこの類推には言及がない)。

複数例題の比較は有望な方法であるが、Terao, Kusumi & Ichikawa (1997) は、学習者は単一の例題からでも圧縮解法を獲得できることを示した。この事実にも注意を向けなければならない。従来の研究は構造的・抽象的な知識の帰納にあたって複数例題の比較プロセスを重視するので、この結果は興味深い。なぜ単一例題からでも等式生成の知識がうまく獲得できるのだろうか。この点は今後明らかにしなければならない問題である。有力な仮説として、学習者は2つの「例題」は比較できなくても、自分の解答と提示された解答という2つの「解法」を比較することができるから、ということが考えられる。学習者は、問題解決を試みているときに何に気がつけば自分の解答が完全になったのかを分析することによって、問題解決の成功を導く抽象的知識を獲得することができるかもしれない。この仮説は、市川 (1991) による「教訓帰納」の考え方と一致している。また、学習における誤りを重視する点は Gick & McGarry (1992) と共通しているが、彼女らのように失敗経験が自動的に転移を促進するというだけでなく、問題解決に失敗したときに何を行うべきか (市川, 1991) という点を重視したい。

問題文脈の抽象化

解法の抽象化について述べたので、次に問題の文脈の適切な抽象化について考える。問題スキーマにおける問題のクラスについての情報は、例題の文脈の適切な抽象化によって獲得される。鈴木(1995)および鈴木・栗山 (1996) は、いわゆる仕事算の問題を「仕事を達成する」という抽象化 (彼らは「準抽象化」と呼ぶ) を取り入

れて教えると、文脈の異なる様々な問題への転移が促進されることを示した。この「達成する」という表現は、「おのおのの仕事量の和が全体に等しい」という解法が明確になっているのみならず、この解法を適用する問題のクラスも明確にしている。水槽に水を入れる問題も2人が仕事をする問題も、「達成の問題」という観点によって同じクラスに属する問題であることがわかる(栗山・鈴木・楠見, 1997)。

例題の文脈の適切な抽象化は、抽象化された解法を適切な目標課題に対して利用するために重要である。しかし、教師などによる直接的な教示によらず学習者が自力でこのような知識を獲得していく場合には、問題文脈の適切な抽象化がはじめからうまく行くととは限らないであろう。とりわけ、何が重要かがわかるとは限らない初期の学習では、情報を落とすことはリスクが大きい(Ross & Kennedy, 1990)。いくつかの例題を学習していくうちに適切な文脈の抽象化が徐々に進むと考えることが自然であろう。

このように考えると、文脈の適切な抽象化は単独の例題からでは難しいと思われる。そうすると、同一の抽象化された解法が使える例題に出会ったとき、以前に学習した例題を思い出して比較をする必要があるが、この想起はどのように行われるのだろうか。言い換えれば、比較をすべき課題は長期記憶からどのように選択されるだろうか。これは、今後検討しなければならない重要な課題の1つである。

引用文献

- Bhaskar, R., & Simon, H. A. 1977 Problem solving in semantically rich domains : An example from engineering thermodynamics. *Cognitive Science*, **1**, 193—215.
- Catrambone, R., & Holyoak, K. J. 1989 Overcoming contextual limitations on problemsolving transfer. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **15**, 1147—1156.
- Catrambone, R., & Holyoak, K. J. 1990 Learning subgoals and methods for solving probability problems. *Memory & Cognition*, **18**, 593—603.
- Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. 1989 Self-explanations : How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, **13**, 145—182.
- Detterman, D. K. 1993 The case for the prosecution : Transfer as an epiphenomenon. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial : Intelligence, cognition, and instruction*. Norwood, NJ : Ablex. Pp.39—67.
- Gick, M., & Holyoak, K. J. 1980 Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, **15**, 1—38.
- Gick, M., & Holyoak, K. J. 1983 Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, **12**, 306—355.
- Gick, M. L., & McGarry, S. J. 1992 Learning from mistakes : Inducing analogous solution failures to a source problem produces later successes in analogical transfer. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **18**, 623—639.
- グリーンノ, J. G. 山口修平・東洋 (共訳) 1985 問題解決の過程—幾何の課題による研究— ライブラリ教育方法の心理学—1 サイエンス社 (Greeno, J.G. 1978 A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.), *Advance in instructional psychology*. Vol.1. Hillsdale, NJ : LEA.)
- Griggs, R. A., & Cox, U. R. 1982 The elusive thematic-materials effect in Wason's selection task. *British Journal of Psychology*, **73**, 407—420.
- Holyoak, K. J. Novick, L. R., & Melz, E. R. 1994 Component processes in analogical transfer : Mapping, pattern completion, and adaptation. In J. A. Barnden & K. J. Holyoak (Eds.), *Analogical connections : Advances in connectionist and neural computation theory*. Vol.2. Norwood, NJ : Ablex. Pp.113—180.
- Holyoak, K. J., & Tagard, P. 1989 Analogical mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science*, **13**, 295—355.
- 市川伸一 1991 実践的認知研究としての認知カウンセリング 箱田裕司(編) 認知科学のフロンティア 第1巻 サイエンス社 Pp. 134—163.
- 市川伸一 1997 認知カウンセリングと学校数学 日本数学教育学会(編) 学校数学の授業構成を問い直す 産業図書 Pp. 94—106.
- 池田和正 1997 コンパクト作用素 (Blow up 高校数学 その6) 大学への数学 1997年11月号 東京出版 Pp. 58—59.
- Kieras, D. E., & Bovair, S. 1986 The acquisition

- of procedures from text : A production system analysis of transfer of training. *Journal of Memory and Language*, **25**, 507—524.
- Koedinger, K., & Anderson, J. R., 1990 Abstract planning and perceptual chunks : Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, **14**, 511—550.
- Kotovsky, K., Hayes, J. R., & Simon, H. A. 1985 Why are some problems hard? Evidence from tower of Hanoi. *Cognitive psychology*, **17**, 248—294.
- 栗山直子・鈴木宏昭・楠見 孝 1997 問題解決における類似性判断—抽象化水準と問題間類似性—日本教育心理学会第 38 回総会発表論文集, 383.
- Larkin, L., Mcdermott, J., Simon, D. P., & Simon, H. A. 1980 Expert and novice performance in solving physics problems. *Science*, **208**, 1355—1342.
- Manktelow, K. I., & Evans, J. St. B. T. 1979 Facilitation of reasoning by realism : Effect or non-effect? *British Journal of Psychology*, **63**, 395—400.
- Mayer, R. E. 1992 *Thinking, problem solving, cognition*. Second edition. NY : Freeman.
- 中西伸介 1994 受験数学超上達法 桐原書店
- Novick, L. R., & Holyoak, K. J. 1991 Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **17**, 398—415.
- Polya, G. 1945 *How to solve it*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Reed, S. K. 1987 A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **13**, 532—540.
- Reed, S. K. 1989 Constraints on the abstraction of solutions. *Journal of Educational Psychology*, **81**, 532—540.
- Reed, S. K. 1993 A schema-based theory of transfer. In D.K. Detterman & R.J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial : Intelligence, cognition, and instruction*. Norwood, NJ : Ablex. Pp.39—67.
- Reed, S. K., & Bolstad, C. A. 1991 Use of examples and procedures in problem solving. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **17**, 106—125.
- Reed, S. K., Dempster, A., & Ettinger, M. 1985 Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **11**, 106—125.
- Reed, S. K., Ernst, G. W., & Banerji, R. 1974 The role of analogy in transfer between similar problem states. *Cognitive Psychology*, **6**, 436—450.
- Reed, S. K., & Ettinger, M. 1987 Usefulness of tables for solving word problems. *Cognition & Instruction*, **4**, 43—59.
- Ross, B. H., & Kennedy, P. T. 1990 Generalizing from the use of earlier examples in problem solving. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, & Cognition*, **16**, 42—55.
- 坂本美紀 1997 コンピュータ提示による文章題のつまずきの解明—割合文章題を用いて— 教育心理学研究, **45**, 87—95.
- Schoenfeld, A. H. 1985 *Mathematical problem solving*. San Diego, CA : Academic Press.
- Sherin, B. L. 1997 The language of physics equations. In *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Hillsdale, NJ : LEA. Pp.686—691.
- Singley, M.K., & Anderson, J.R. 1985 The transfer of text-editing skill. *International Journal of ManMachine Studies*, **22**, 403—423.
- Sweller, J., & Cooper, G. A. 1985 The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition & Instruction*, **2**, 59—89.
- 鈴木宏昭 1995 転移における具体例と抽象化の役割 日本教育心理学会第 37 回総会発表論文集, 204.
- 鈴木宏昭 1996 類似と思考 日本認知科学会(編) 認知科学モノグラフ 1 共立出版
- 鈴木宏昭・栗山直子 1996 類推的転移における転移のコスト 日本教育心理学会第 38 回総会発表論文集, 448.
- 多鹿秀継・石田淳一 1989 子どもにおける算数文章題の理解・記憶 教育心理学研究, **37**, 126—134.
- 寺尾 敦・市川伸一・楠見 孝 1998 数学学習における誤りからの「教訓帰納」の内容と学業成績との関係についての実験的事例と考察 日本教育工

- 学会論文誌, 22, 119—128.
- Terao, A., Kusumi, T., & Ichikawa, S. 1997 Solution compression in mathematical problem solving : Acquiring abstract knowledge that promotes transfer. In *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Hillsdale, NJ : LEA. Pp.733—738.
- Thorndike, E. L., & Woodworth, R. S. 1901 The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other function. *Psychological Review*, 8, 247—261.
- VanLehn, K. 1989 Problem solving and cognitive skill acquisition. In M. I. Posner (Ed.), *Foundations of Cognitive Science*. Cambridge, MA : MIT Press. Pp.527—579.
- Vollmeyer R., Burns, B. D., & Holyoak, K. J. 1996 The impact of goal specificity on strategy use and the acquisition of problem structure. *Cognitive Science*, 20, 75—100.
- 和田秀樹 1987 受験は要領 ごま書房
- 和田秀樹 1988 受験勉強入門 ごま書房
- 吉永良正 1993 数学正しい学び方 ごま書房
- 吉永良正 1994 勉強は基本 ごま書房
- (1997.9.12 受稿, '98.5.16 受理)

A Review of Knowledge Acquisition Promoting Transfer in Mathematical Problem Solving

ATSUSHI TERAO (DEPARTMENT OF SYSTEMS SCIENCE, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY) AND TAKASHI KUSUMI (DEPARTMENT OF HUMAN SYSTEM SCIENCE, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY) JAPANESE JOURNAL OF EDUCATIONAL PSYCHOLOGY, 1998, 46, 461—472

This review focuses on knowledge acquisition which promotes transfer in mathematical problem (especially, algebra word problem) solving. Within mathematical problem solving, similar (nonisomorphic) target problems have been shown to be difficult for the learner to solve. The purpose of this review was to discuss what type of knowledge facilitated transfer to similar targets. We distinguished between three types of knowledge : knowledge based on examples, knowledge based on solution structures, and knowledge based on structure generation. In the example-based approach, the knowledge which facilitated transfer consisted of multiple examples and their solutions. We argued that this approach did not address the facilitation of transfer to similar targets. The solution structure-based approach suggested that the acquisition of abstract knowledge at the level of solution structures or forms of equations was necessary for transfer to occur. We found little experimental evidence supporting this approach. In the structure generation-based approach, the knowledge of how to construct solutions was considered to be the one promoting transfer. We think that this approach was the most promising of the three. We discussed further directions as to the acquisition of the knowledge of generating solution structures, and stressed the importance of clarifying the process of acquiring such knowledge.

Key words : transfer, knowledge acquisition, mathematical problem solving, abstraction, analogy.